[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ELEMENTORUM

ARITHMETICAE PURAE.

VOL. I.

AUCTORE

J. F. L. SCHRÖDER,
IN ACAD. RHENO-TRAJ. PROF. ORD.

TRAJECTI AD RHENUM,
APUD JOH. ALTHEER,
ACADEMIAE TYPOGRAPHUM.
MDCCCXXXIV.

ELEMENTA MATHESEOS PURAE.

PARS II.

ELEMENTORUM ARITHMETICAE PURAE.

VOL. I.

AUCTORE

J. F. L. SCHRÖDER,
IN ACAD. RHENO-TRAJ. PROF. ORD.

TRAJECTI AD RHENUM,
APUD JOH. ALTHEER,
ACADEMIAE TYPOGRAPHUM.
MDCCCXXXIV.

ELEMENTA ARITHMETICAE PURAE.

PARS I.

DE PRONUNCIANDIS ATQUE DESIGNANDIS NUMERIS; DE MENTIS ACTIONE, QUAE IN ADDITIONE, SUBTRACTIONE, MULTIPLICATIONE ET DIVISIONE NUMERORUM CERNITUR.

CAPUT I.

DE POSTULATIS ARITHMETICIS ATQUE DE AEQUATIONE.

§. 1. *Postulata Arithmetica* (1).

Est conjuncta quaedam imaginationis et intelligentiae actio, qua unitates ejusdem generis (2), alia post aliam et cum aliis congregantur, ita ut Quantum, ex his unitatibus compositum, id est *numerus* (3), oriatur. Haec actio mentis, quae efficit atque auget numeros, un-

(1) Vide Prolegomena p. 491, 492.
(2) Proleg. p. 7, 8, 10.
(3) Proleg. p. 4.

unde etiam dicitur *numerare*, hoc Matheseos universalis *Postulato* indicatur:

Datae unitates ejusdem generis quotlibet in unum numerum congregari possunt.

Si autem non congregantur sed a numero deinceps demuntur unitates, alia perspicitur earundem facultatum actio, qua ex dato numero auferuntur unitates una post aliam, ita ut numerus oriatur, qui pauciores contineat unitates, quam datus numerus. Haec indicatur altero Postulato:

A numero quolibet unitates auferri possunt.

Haec duo postulata valent de unitatibus et numeris puris non solum integris sed etiam fractis, si sunt ejusdem generis, id est eandem habent denominationem; tum etiam de unitatibus et numeris denominatis, dummodo qualitas unitatum eadem sit (1).

Animadversio 1. Nos in his praeceptis Arithmeticae purae, quae vere dici potest *Mathesis universalis*, de solis unitatibus et numeris *puris* agimus, praeterquam, si ad praecepta illustranda, eorumque usum explicandum, nonnumquam denominatis utimur numeris. Numeri puri, quamvis vere sint Quantitates, non Quanta, id est, indicent, quaenam sit Quantitatis ratio (2) inter Quanta, atque quo-

(1) Proleg. p. 10, 11.

(2) Proleg. p. 4. 12.

quoties idem Quantum sit repetendum, tamen, quod attinet ad unitates puras, ex quibus compositi esse intelliguntur, pro Quantis haberi possunt. Quod idem dici potest de unitate ipsa, qua ex unitatibus fractis consistere cogitatur. Unitas autem *denominata*, si rem individuam repraesentat, sine partibus est. Si agitur de quatuor hominibus, unitas intelligitur esse sine partibus; si de quatuor florenis, in decem, viginti, centum partes dividi potest, quoniam valor quidem, aut quantitas, non florenus ipse, sive res individua, spectatur. Numeri *denominati* tum solum inter se comparari et congregari possunt, si ipsorum unitates sunt eaedem, aut saltem ad idem genus reduci possunt. Omnis numerus denominatus, ut 5 lapides, duas habet notas: altera indicatur numero puro 5, atque *quantitatis* est nota; altera autem notione unitatis denominatae (lapidis notione), atque *qualitatis* est nota. Euclides (1) non alios assumit numeros, nisi puros. Μονὰς ἐστι, ait, *καθ'ἣν ὃ ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δέ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.*

Animadv. 2. Quaenam sit Postulatorum natura explicatum est in Prolegomenis p. 491-493. Kantius (2) vult, cum omnes enunciationes Mathematicas,

(1) Elementa Lib. VII.

(2) *Critik der reinen Vernunft*, edit. 2. 1787. p. 10-15. 205. ejusque *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik*, p. 28.

eas, tum Postulata et Axiomata, quae sunt principia hujus disciplinae, esse *Synthetica* non Analytica, aut esse ejusmodi, ut eorum Praedicata sint extra notiones Subjecti, neque ex iis evolvi possint (1). Quam rem, magni momenti in philosophia theoretica, uberius exposuit, atque argumentis confirmare conatus fuit Johann Schulze (2). Alii autem in contrariam partem disputarunt, ut Gottlob Ernst Schulze (3); alii alium sensum vocibus: *enunciatio analytica et synthetica*, tribuerunt (4).

§. 2. *Progressus atque regressus in numerando.*

Hae duae mentis actiones sunt principia, ex quibus profecta est Arithmetica. Cernuntur continuo

(1) Confer. *Proleg.*, p. 93–96.

(2) *Prüfung der Kantischen Critik der reinen Vernunft*, 1789., Pars I. p. 28–78. p. 211–234.

(3) *Critik der theoretischen Philosophie* 1801., Pars II. p. 167–183.

(4) Conferatur Fries. *Neue Critik der Vernunft* 1807., Pars I. p. 258. seqq. qui affirmat, totam Logicam, quatenus sit disciplina Philosophica, esse *Systema enunciationum Analyticarum*. Vide ejusdem auctoris *System der Logik* 1819., p. 182. seqq., atque Krug, *Encyclopaedisch-philosophisches Lexicon* 1827., Tom. I. ad vocem *Analytisch*.

timo in Additione et Subtractione numerorum, unde prodeunt Multiplicatio et Divisio, aliaeque actiones, quae in componendis et decomponendis numeris, formisque eorum mutandis versantur.

Prior actio est tanquam *progressus* in numerando, posterior est *regressus*. Prior indicatur signo, quod est crux +; posterior signo, quod est lineola transversa —. Si deinceps conjungimus unitates, unam post alteram, cum iis, quae jam conjunctae sunt

+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,

prodit haec numerorum Series, cognitis signis notata:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

Si autem unitates deinceps auferimus a numero 9.

9 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1 — 1, eadem oritur Series, sed ordine inverso:

9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Cum autem recta linea duas directiones easque contrarias repraesentet, istum in numerando progressum et regressum commode designat.

§. 3. *Corollarium.*

In hoc numerationis *progressu* nulli positi sunt limites menti humanae; *regressus* autem suos habet limites, ubi numerus, sublatis omnibus uni-

unitatibus, ex quibus consistit, ipse desinit esse: Quod indicatur enunciatione:

Quilibet numerus finitus, addendis unitatibus, indefinite augeri, atque auferendis unitatibus ad nihilum reduci potest.

Ad id designandum Arithmetici uti solent characteribus ∞ et o. Priore charactere indicatur, nullum esse finitum seu datum numerum, qui non augeri possit; quare symbola est numeri, qui dicitur *infinitus*, qui omnibus numeris finitis seu datis major est. Posterior autem nota o designat, nullum prorsus esse numerum, sive nullus antea fuerit, sive numerus ipse, sublatis unitatibus, evanuerit: ut $4 - 1 - 1 - 1 - 1$ est o.

§. 4. *Aequatio, signa aequalitatis et inaequalitatis. Definitio ejus.*

Aequatio est propositio Categorica, indicans aut duas diversas formas ejusdem Quanti Arithmetici, aut aequalitatem duorum Quantorum (1). Duo autem Quanta *aequalia* esse dicuntur, si earundem unitatum eundem numerum continent, aut si alterutrum toties eandem continet unitatem, sive integram sive fractam, quoties alterum eam continet.

Ae-

(1) Confer. Proleg., p. 98-100, 108, 109.

Aequalitas ipsa indicatur signo $=$, inter aequales numeros, aut diversas formas ejusdem Quanti posito, ita ut $a=b$ significet, numerum a esse aequalem numero b. Numerus, qui ante signum aequalitatis vel post id positus est, vocatur *membrum aequationis*. Cujusque igitur aequationis duo sunt membra.

Si propositio declarat, alterutrum Quantum, sive Arithmeticum sive Geometricum, majus esse quam alterum Quantum, id indicari solet signis $>$ et $<$, ita quidem, ut id Quantum majus sit, quod cruribus anguli inclusum est. Ita propositione $8 > 6$ et $6 < 8$ declaratur, 8 esse majorem numerum, sive continere plures unitates quam numerum 6. In aequationibus numeri incogniti ultimis plerumque Alphabeti literis indicantur (1).

Animadv. Signum $=$ universe indicat aequalitatem duorum Quantorum, sed in Arithmetica refertur ad solum numerum. Quod idem valet de signis inaequalitatis $>$ et $<$.

§. 5. *Corollarium.*

Si duo Quanta sunt aequalia tertio Quanto, inter se sunt aequalia.

Haec

(1) Conf. Proleg., p. 16.

Haec est forma Syllogismi, quem saepissime usurpant Mathematici (1), sive spectatur forma sive magnitudo Quantorum sive utraque. Sequitur ex definitione aequalitatis (§. 4.)

CAPUT II.

DE NUMERORUM ADDITIONE ET SUBTRACTIONE, DE POLYNOMIIS, MONOMIIS, ATQUE DE NUMERIS CONTRARIIS.

§. 6. *Definitio.*

Addere numerum b ad numerum a est adjicere numero *a* eas unitates vel integras vel fractas, quas complectitur *b*, sive invenire tertium numerum *x*, qui tot contineat unitates, quot sunt in *a* et *b* simul sumtis. Numerus *x* dicitur *summa* horum numerorum, atque actio mentis, qua summa reperitur, *Additio* vocatur, quae prodit ex ea, quam Postulato primo §. 1. expressimus. Numerus igitur addendus *b* significatur anteposita cruce $+$, veluti $a + b = x$, $2 + 3 = 5$, quod signum additionis etiam voce *plus* designari solet.

Plu-

(1) Conf. Proleg. p. 245.

Plures etiam, quam duo numeri in unam summam congregari possunt, veluti $a+b+c=y$, $2+3+4=9$. Primum numero a additur b, atque deinde huic summae additur c. Aequatio his verbis declaratur: *summa numerorum a, b et c est y*, vel etiam brevius: *a plus b plus c est y*.

§. 7. *Coroll.*

Ex hac definitione atque ex definitione aequalitatis §. 4. consequitur.

Si aequalia aequalibus adduntur, summae sunt aequales.

Quare si $a=b$, erit $a+c=b+c$ atque si $c=d$, erit $a+c=b+d$.

§. 8. *Definitio.*

Quantum aliquod dicitur *Totum*, quatenus ex suis partibus omnibus compositum esse intelligitur.

§. 9. *Coroll.* 1.

Summa igitur numerorum a, b, c, sive $x=a+b+c$, est *Totum*, cujus partes sunt a, b et c, atque Additione Totum ex suis partibus componitur.

§. 10. *Coroll.* 2.

Ex hac definitione *Totius* continuo sequitur:

a. *Totum aequale est omnibus suis partibus simul sumtis*, veluti $9 = 2 + 3 + 4$.

b. *Totum majus est quam una ejus pars, vel pars Totius minor est quam Totum*, ut $9 > 2 + 3$.

c. *Si Quantum a habet partem aequalem Quanto b, a majus est quam b*, veluti $4 + 2 > 4$.

d. *Si Quantum a majus fuerit, quam Quantum b, habebit partem aequalem huic b*, id est: si $a > b$, erit aliquod Quantum c, ita ut sit $a = b + c$.

Hae enunciationes non sunt appellandae *axiomata* (1), quoniam ex ipsa definitione Totius continuo sequuntur.

§. 11. *Coroll.* 3.

Si duo Quanta aequalia sunt, atque alterutrum est majus aut minus tertio Quanto, alterum Quantum etiam majus aut minus est hoc tertio, atque utrumque Quantum ab eo aequaliter differt (2).

Nam si $a = b$, atque $a > d$, sit $a = d + c$ (§. 10. *d*), ergo $b = d + c$ (§. 5.) ergo $b > d$ (§. 10.

(1) Proleg. p. 167. 292. 492.

(2) Proleg. p. 245.

(§. 10. b), atque ut a, ita etiam b, ab ipso d differt Quanto c.

Animadv. Eodem modo perspicitur, si $a > b$, atque $b > c$, esse etiam $a > c$, atque si $a < b$, atque $b < c$, esse $a < c$.

§. 12. *Coroll.* 4.

Si inaequalia aequalibus adduntur, aut aequalia inaequalibus, summae sunt inaequales. Summa major est, ubi majus additur aequali, vel aequale majori.

Ita si $a > b$, erit $a + d > b + d$. Quoniam enim $a > b$ ponere possumus $a = b + c$ (§. 10. d.), ergo $a + d = b + c + d$ (§. 7.) Ergo $a + d > b + d$ (§. 10. b). Similiter si $d = e$, erit $a + d = b + c + e$ (§. 7.), ergo $a + d > b + e$ (§. 10. b).

§. 13. *Coroll.* 5.

Ex hoc sequitur: *si majus majori additur, summa major est;* ergo si $a > b$, atque $c > d$, erit $a + c > b + d$.

§. 14. *Coroll.* 6.

Summa numerorum a et b eadem est, sive singulae partes numeri a, altera post alteram ad-

adduntur numero b, sive totus numerus a simul additur numero b.

Veluti cum sit $6 = 4 + 2$, erit $3 + 6 = 3 + 4 + 2$. Sint enim p, q, r partes numeri a. Ergo $a = p + q + r$ (§. 10. a), ergo $b + a = b + p + q + r$ (§. 7.)

§. 15. *Coroll.* 7.

Summa numerorum a et *b eadem est, sive a additur numero b, sive b additur numero a;* id est $a + b = b + a$. Nam quod ad summam nihil interest, utrum pars a prius cogitetur quam b, an posterius. Denotent puncta ...... unitates numeri a, atque puncta ..... unitates numeri b, nihil interest, utrum numeratio incipiat a punctis prioribus, an a punctis posterioribus.

Ergo in summa reperiunda plurium numerorum §. 6. quolibet ordine progredi possumus, veluti: $a + b + c = c + b + a = b + a + c$.

Animadv. Quinque enunciationes, §. 11-15. memoratae, non sunt axiomata, sed consequuntur ex definitione *aequalitatis*, *additionis* et *Totius*. De duabus posterioribus uberius egit Johannes Schulz (1), eum in finem, ut ostenderet, eas esse *syntheticas* non analyticas.

§. 16.

(1) *Prüfung der Kantischen Critik*, Pars I. p. 219-232.

§. 16. *Definitio. Coefficiens.*

Si in summa saepius occurrit idem numerus universalis, compendii causa ei anteponitur numerus determinatus, qui dicitur *coefficiens*, atque indicat, quoties in hac summa numerus iste universalis repetatur, veluti $a+b+b+b = a+3b$, ubi 3 est *coefficiens* ipsius b, atque $3b$ *multiplum* (1) *hujus b*. Coefficiens potest etiam esse numerus universalis, ut $ax+ax=2ax$, ubi a atque $2a$ sunt coefficientes, quod fit imprimis, quando praeponitur numero *incognito* vel *variabili*. Numeri simplicis b *coefficiens* intelligitur esse *unitas*, id est $b=1b$.

§. 17. *Definitio. Subtractio.*

Subtrahere numerum b numero a est tot auferre unitates vel integras vel fractas ex numero a, quot sunt in b. Numerus, qui restat, dicitur *residuus*, *reliquus*, vel etiam *residuum*, *reliquum*. Vocatur etiam *differentia*, ubi tamen ex eo oritur ambiguitas, quod non indicatur, uter eorum sit subtrahendus; quae tolletur, si ita inter se convenerint Arithmetici, ut is numerus, a quo unitates auferuntur, prius nominetur.

Nu-

(1) Proleg. p. 6.

Numerus b, qui subtrahitur, *Subtrahendus*; numerus a, a quo aufertur b, *Minuendus* dicitur. Actio mentis, qua *Residuum* reperitur, *Subtractio* vocatur, atque igitur (§. 2.) indicatur lineola transversa $-$ posita ante Subtrahendum, quod signum vulgo voce *minus* designatur. Quare aequatio $a-b=x$ indicat, *si numero a subtrahitur numerus b*, restat numerus x; *aut numerus a minus numero b* est x; quod etiam ita brevius enunciatur: *a minus b est x*. Ita $3b-b=2b$. Uterque et *Subtrahendus* et *Minuendus* potest esse *summa vel differentia ipsa aliorum numerorum*, verum hoc in casu uncinis ( ) sive [ ] includitur, vel recta linea ipsi superne apponitur. Veluti: $(a+b)-(c+d)=x$, id est: numerus x est differentia inter summam numerorum a et b atque summam numerorum c et d; $\overline{a-b}-\overline{c-d}=y$, id est: y est differentia inter differentiam numerorum a et b, atque numerorum c et d.

Eodem modo numeri addendi possunt esse vel summae, vel differentiae; veluti $[a+b]+[c+d]=x$, atque $(a-b)+(c-d)=y$.

§. 18. *Coroll.* 1.

Ex hac Subtractionis definitione sequitur: *summam Residui atque Subtrahendi esse aequalem*

tem Minuendo, id est, si $a-b=x$, esse $a=b+x$. Unde concludimus:

Subtrahendo numerum b numero a, tertius invenitur numerus x, qui additus numero b exhibet summam a.

Quare ope *Additionis* investigari potest, an *Subtractio* accurate peracta fuerit.

Rursus si $a=b+x$, erit $a-b=x$, id est: *Si summae duorum numerorum alteruter subtrahitur, restat alter numerus.* Ergo *Subtractione* perspicitur, an Additio accurate peracta fuerit, atque solvitur problema:

Ex dato Toto aliquo a, atque una ejus parte b, reperire alteram partem x.

Ergo, in aequatione $a+b=c$, c est *summa* numerorum a et b, sive *Totum*, cujus partes sunt a et b; a est *differentia* inter Totum ejusque partem b; b est *differentia* inter Totum ejusque partem a.

Ex his etiam consequitur, *numerum pristinum suum servare statum, si idem ipsi numerus additur, atque ab eo aufertur*, id est $a=a+b-b$, atque $b-b=0$. Quare si *Minuendus et Subtrahendus eodem numero augentur vel diminuuntur, Residuum idem permanet.*

§. 19. *Coroll.* 2.

Utrumque membrum aequationis (§. 4.) potest con-

constare ex pluribus numeris, qui signis $+$ et $-$ inter se conjuncti sunt. Ita aequationis $a-b-c-d=e+f-g$, prius membrum consistit ex quatuor, posterius ex tribus numeris, qui membrorum *termini* vocantur.

§. 20. *Coroll.* 3.

Quoniam, si fuerit $a+b=x$, erit $a=x-b$, atque $b=x-a$, atque si fuerit $a-b=x$, erit $a=b+x$, concludere possumus:

In omni aequatione quilibet terminus membri (§. 19.) alicujus aequationis ad alterum membrum transferri potest, dummodo signum mutetur. Verum termini, qui nullo signo affecti sunt, intelliguntur habere signum $+$.

Ergo si $a+b-c-d=e-f$,

erit $a=e-f-b+c+d$, atque

$o=e-f-b+c+d-a$.

Ita quidem aequatio semper sic mutari potest, ut alterutrum membrum reddatur nihilum, quod dicunt *aequationem ad nihilum reducere.*

§. 21. *Coroll.* 4.

Quoniam, si $a=b$, atque $c=d$, erit $a+c=b+c$, atque $a+d=b+c$ (§. 7.) erit etiam $a-c=b-c$, atque $a-c=b-d$ (§. 20.), id est.

Si

Si aequalibus aequalia subtrahuntur, Residua aequalia sunt.

§. 22. *Coroll.* 5.

Ex Cor. 4. sequitur:

Si aequalibus inaequalia subtrahuntur, Residua inaequalia sunt, atque majus est Residuum, ubi minor est Subtrahendus. Eadem ratione, si inaequalibus aequalia subtrahuntur, Residua inaequalia sunt, atque majus est Residuum, ubi major est Minuendus.

Ita si $c = d$, atque $a > b$, erit $c - a < d - b$, atque $a - c > b - d$.

Quoniam enim $a > b$, sit $a = b + e$ (§. 10. *d*),
ergo $a - c = b + e - d$ (§. 21.)
Ergo $a - c > b - d$ (§. 10. *c*. 3.)
Atque $c - a = d - b - e$ §. 21.
Aut $c - a + e = d - b$ §. 20.
Ergo $c - a < d - b$ §. 10. *a*.

§. 23. *Coroll.* 6.

In aequatione $a - b = x$, Residuum x idem est, sive singulae partes numeri b, altera post alteram, subtrahuntur numero a, sive totus numerus b simul ei subtrahitur. Ita cum sit $5 = 3 + 2$, erit $9 - 5 = 9 - 3 - 2 = 4$.

Ut enim totus auferatur numerus necesse est, singulas ejus partes auferri. Quod etiam liquet ex §. 21. Sit enim $b=p+q+r$, ergo $a-b=a-p-q-r$.

§. 24. *Coroll.* 7.

Ut eidem numero plures numeri addi (§. 6.) ita etiam plures numeri subtrahi possunt, veluti $a-b-c-d=x$. Primum b aufertur ab a, deinde c a residuo atque tandem d, a residuo $a-b-c$. Sed haec subtractio etiam ita fieri potest, ut summa numerorum b, c et d subtrahatur ab a, id est.

$a-b-c-d=a-(b+c+d)=x$. §. 23.

Ad valorem igitur Residui, nihil interest, quo ordine subtrahantur plures numeri vel partes ejusdem numeri.

§. 25. *Problema.*

Data summa atque differentia duorum numerorum, invenire hos numeros.

Explicatio.

Sint numeri reperiundi x et y, ex quibus major sit x. Repraesentetur summa eorum litera s, atque differentia inter x et y, litera d. Ergo $s=x+y$, atque $d=x-y$.

Solutio.

$$s+d=(x+y)+(x-y)=2x+y-y=2x$$
$$s-d=(x+y)-(x-y)=x+y-x+y=2y.$$

§. 26. *Coroll.*

Cum haec solutio non numeris determinatis, sed indeterminatis x, y, s, d indicetur, atque i[illegible]tur generalis sit, ita ut quilibet numerus determinatus in eorum locum substitui possit, sequitur, semper sine ulla exceptione, quales-cunque sint numeri, duplo majorem numerum reperiri, si differentia summae additur, duplo autem minorem numerum, si ipsi subtrahitur. Ita si pro s atque d ponuntur 7 atque 3, numeri sunt 5 et 2. Hac igitur solutione generali soluta sunt omnia problemata ejusdem generis, quae spectant numeros determinatos, id est, lex reperta est, juxta quam solvi possunt. Itaque ex hoc exemplo perspicitur usus numerorum universalium, de quo diximus. (1)

(1) In Prolegomenis. p. 14.

§. 27.

§. 27. *Definitio. Monomium atque Polynomium.*

Ex Additione et Subtractione numerorum proficiscitur eorum divisio in *Monomia* et *Polynomia.* Numerus enim dicitur *Monomium* sive *unius termini*, si partes constituentes non sunt conjunctae signis + et —, veluti $7a$, 3.8, $\frac{a}{c}$, Vocatur autem *Polynomium* sive *plurium terminorum*, si est summa vel differentia duorum, aut plurium Monomiorum; quod indicatur signis + et —, inter partes collocatis. Ita $3a + b - \frac{c}{d} + 5$, est Polynomium compositum ex quatuor Monomiis, quae ejus *termini* appellantur. Dicitur *Binomium*, *Trinomium*, *Quatrinomium*, caet. si ex 2, 3, 4 .... terminis constat. Ejusmodi Polynomium est quodlibet membrum aequationis, quod plures terminos habet.

Polynomium potest etiam constare ex aliis Polynomiis, quae signis + et — conjuncta sunt, atque uncinis, vel linea superne scripta, indicantur, velut:

$$(a-b+3c) + (4d-3e+f)$$
$$(3x+2y-z) - (-5d+4g-f).$$

Monomium atque Polynomium aut *integrum* aut *fractum* est, si formam habet numeri aut in-

integri aut fracti. Ita $7a$ et $\frac{a}{b}$ est Monomium integrum et fractum; $a+b$ atque $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ est Polynomium integrum et fractum. Polynomium est *mixtum*, cujus alii termini habent formam numeri integri, alii autem formam numeri fracti, ut $4a+\frac{b+c}{d}$.

Quae dicta sunt spectant formam solam, non valorem numerorum. Ita a est *Monomium integrum*, etiamsi in locum hujus a substitui potest numerus determinatus fractus plurium terminorum; 8 est Monomium integrum, quamvis sit aequalis Binomio $6+\frac{4}{2}$. Quamdiu hac formula generali a et b repraesentantur, sunt Monomia integra.

§. 28. *Problema. Definire Binomii $a-b$ valorem.*

Solutio.

Tria esse possunt. Aut enim a est aequalis numero b, aut major aut minor illo.

1. Si $a=b$, totum Binomium evanescit, quod designatur aequatione $a-b=0$, quae nihil aliud indicat nisi aequalitatem numerorum a et b, (§. 3.)

2. Si

2. Si $a > b$, sit $a = b + c$ (§. 10. d).

Ergo $a - b = c$, quae aequatio indicat a majorem esse quam b, atque ab ipso differre c unitatibus.

3. Si $a < b$, sit $b = a + c$.

Ergo $a - b = -c$, ubi signum $-$ ante c ostendit, post sublatas b unitates evanuisse a, ita ut c unitates restent subtrahendae. Quare haec aequatio docet, numerum a esse c unitatibus minorem quam b.

§. 29. *Problema. Definire Polynomii cujuslibet valorem.*

Polynomium (P) potest habere aut omnes terminos signo $+$, aut omnes signo $-$, aut alios signo $+$, alios signo $-$ affectos.

1. Si omnes Polynomii termini affecti sunt signo $+$, eorumque summa est M, P est $= M$, veluti: $(2a + 3a + 4a) = 2a + 3a + 4a = 9a = P$. Si Polynomium continet numeros universales, qui ad pauciores terminos reduci nequeunt, Additio solummodo significatur, ut $(3a + 2b + c) = 3a + 2b + c = P$. (§. 10.)

2. Si omnes termini sunt affecti signo $-$, eorumque summa est m, P est $= -m$, veluti: $(-2a - 3a - 4a) = -(2a + 3a + 4a) = 9 - a = P$. $(-3a - 2b - c) = -(3a + 2b + c) = P$. (§. 10.)

3. Si

3. Si alii signo $+$, alii signo $-$ sunt affecti, atque M est summa eorum, quibus est signum $+$, m autem summa eorum, quibus est signum $-$, P est $= M - m$. (§. 14. 23.) Quare:

Si fuerit $M = m$, P erit $= o$.

Si $M > m$, sit $M = m + c$ (§. 10. d) ergo

$$P = M - m = c$$

Si $M < m$, sit $m = M + c$ (§. 10. d) ergo

$$P = M - m = -c$$

Veluti:

$$P = (5a - 2a + 3a - 6a) = 8a - 8a = o.$$

$$P = (6a - 2a + 3a - 4a) = 9a - 6a = 3a.$$

$$P = (4a - 5a + 2a - 3a) = 6a - 8a = -2a.$$

§. 30. *Coroll.*

Ex his consequitur:

a. Polynomium, si ejus terminis idem est signum, aequale est summae horum terminorum, atque eodem, quibus illi, signo afficitur.

b. Si termini diversa habent signa, Polynomium aequale est differentiae inter summam terminorum, quibus est signum $+$, atque summam eorum, quibus est signum $-$, ita ut signum Polynomii idem sit atque eorum terminorum, qui majorem efficiunt summam. Itaque evanescet Polynomium, si hae duae summae aequales fuerint.

§. 31. *Coroll.* 2.

Eodem modo reperitur summa Polynomiorum veluti: $P=(a+b-c+d)+(-e+f+g-h)$ $=a+b+d+f+g-c-e-h=(a+b+d+f+h)$ $-(c+e+h)$.

Ergo in unam summam reducuntur termini affecti signo $+$, atque similiter termini affecti signo $-$. Si prior summa est M, posterior m, P est $=M-m$.

§. 32. *Problema. Differentiam duorum Polynomiorum reperire.*

Sint Polynomia $p=a+b-c+d$

$p'=-e+f+g-h$,

atque differentia sit P.

ergo $P=(a+b-c+d)-(-e+f+g-h)$,

ergo $P+(-e+f+g-h)=(a+b-c+d)$ (§.20.)

aut $P-e+f+g-h=a+b-c+d$,

ergo $P=a+b-c+d+e-f-g+h$. (§.20.)

Quare si Polynomium subtrahendum est Polynomio, ejus termini, signis mutatis, *adduntur* Polynomio.

§. 33. *Coroll.* 1.

Idem fit, si Polynomium subtrahitur Monomio, ut $P=a-(b-c)=a-b+c$.

§. 34. *Coroll.* 2.

Ex his sequitur:

$P = a - (-b) = a + b.$

$P = a + (-b) = a - b.$

$P = -(-b) = b.$

$P = +(-b) = -b.$

$P = b - (-b) = 2b.$

$P = b + (-b) = o.$

Ergo si numerus, qui sibi praefixum habet signum —, auferendus est ab aliquo numero, huic numero additur, sed si addendus est, ab hoc numero aufertur.

§. 35. *Definitio. Numeri oppositi sive contrarii.*

Termini alicujus Polynomii, si diversa habent signa, in hac relatione, qua ejusdem Polynomii partes sunt, dicuntur numeri *oppositi* sive *contrarii.* Qui signum + sibi habent praefixum, *positivi* sive *affirmantes*, quibus autem est signum —, *negativi* vel *negantes* dici solent. Quibus nullum praepositum est signum, ii pro *positivis* habentur. Primus etiam terminus Polynomii *positivus* nullo solet affici signo. Itaque Polynomium $(a + b - c - d + e)$ dicitur constare ex numeris positivis a, b, e atque ex numeris negativis c et d.

Dicuntur *contrarii*, quoniam, ut effectus virium in contrarias partes agentium, in hac conjunctione sese prorsus tollunt, si aequales sunt, veluti $a-a=0$, $8-8=0$; aut ex parte tollunt, si inaequales sunt, veluti $8-3=5$, ubi Polynomii valor est *numerus positivus quinque*; sed Polynomii $3-8=-5$ valor est *numerus negativus quinque*, quoniam *quinque relinquuntur subtrahendi*.

Quod dictum est de terminis, qui aliquod Polynomium efficiunt, dicitur de Polynomiis ipsis, ex quibus aliud Polynomium est compositum.

Ex his sequitur, *si numerus negativus subtrahendus est alicui numero, notam negationis amittit, atque ut numerus positivus numero additur*; ut $b-(-a)=b+a$. *Si addendus est numero, notam affirmationis amittit, atque ut numerus positivus subtrahitur*, veluti $b+(-a)=b-a$.

§. 36. *Animadv.*

Quae exposita sunt de addendis atque de subtrahendis numeris negativis, non repugnant iis, quae dicta sunt §. 3. 12. 22., addendis unitatibus augeri numerum, subtrahendis, diminui, majusque esse residuum, si minus subtrahitur,

ma.

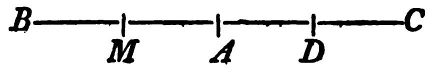
majoremque summam, si majus additur, caet. Etenim per se patet, Polynomio $a+(-b)$ significari, auferendum esse numerum b ab a. Id enim indicatur, progressui in numerando, quo oritur a, accedere regressus, quo fit $-b$; aut subtractionem esse adjiciendam. Quod attinet ad $a-(-b)$, id indicat, *subtractionem esse tollendam*, id est b, quod ante sublatum erat, esse restituendum. Ponamus enim Polynomium $a+b-b=a$, atque tollamus $-b$, quo facto mutatur in $a+b$. Verum hoc ipsum tollere $-b$ significat, tollere subtractionem, ex quo fit, ut tot unitatibus augeatur numerus a, quot antea erant sublatae. *Quare additio numeri negativi vera est subtractio, atque subtractio ejus vera est additio appellanda.*

§. 37. *De usu numerorum contrariorum.*

Hujus divisionis numerorum in positivos et negativos magnus est usus in tota Mathesi, cum pura tum mixta. Sunt enim multa Quanta ceteroquin quidem homogenea, adeo ut conjungi atque partes efficientes Totius alicujus esse possint, sed inter quae talis intercedat ratio, ut in conjunctione aut prorsus aut ex parte se tollant, si aequalia vel inaequalia sunt; vel quae ejus sunt indolis, ut in conjunctione alterutrum

eva-

evanescat, sed evanescens tantum diminuat quantitatem alterius, quanta sua ipsius est. Eorum igitur Quantorum quantitates, si conjunguntur, contrariis numeris indicandae sunt. Hujus generis sunt accepta et expensa, possessiones et debita, pecunia quam nos debemus aliis, et quae nobis debetur ab aliis. Imprimis huc referendae sunt duae directiones in contrariam partem, quas designat quaelibet recta linea *BC*.



In doctrina de motu, duo motus in eadem recta linea versus partes oppositas distinguuntur signis + et —, ita ut via, quam corpus percurrit in alterutra directione *AC*, sit positiva, in altera autem directione *AB*, negativa, atque distantia corporis a puncto *A* sit differentia inter has vias. Si corpus progressum est ab *A* ad *C*, atque deinde regressum est a *C* ad *D*, haec distantia est $AD = AC - CD$, ubi Quantitas *AC* pro positiva atque *CD* pro negativa habetur. Quoniam *AC* major est quam *CD*, *AD* est positiva, quod significat, corpus esse ad dextram partem puncti *A*. Si autem corpus progressum est ab *A* ad *C*, atque deinde regressum est ad *M*, erit $AC - CM = -AM$, ubi sig-

signum — ante *AM* indicat, corpus esse ad sinistram partem puncti *A*.

Hos motus contrarios vocibus *progressus* et *regressus*, *adscensus* et *descensus*, *motus orientem et occidentem*, vel *septentrionem et austrum versus*, aliisque indicamus, dicimusque *duas vires moventes in contrarias agere partes*. Quare si Quantitates horum motuum contrariorum, id est vias, quas percurrit corpus, numeris designamus, alter numerus est subtrahendus alteri, id est notandus signo —. Quantitas *positiva* est, cujus numero antecedit signum + aut nullum signum; quantitas *negativa*, cujus numero praecedit signum —. Quaestio ipsa, de qua agitur, indicat, utra quantitas positiva sit, utra negativa. Nam si quis v. c. computat, quantum lucri ex negotiis susceptis fecerit, accepta sunt *positiva*, expensa sunt *negativa* habenda. Contrarium obtinet, si quaeritur, quantum jacturae fecerit; quod cum fit, expensa positiva, accepta negativa habenda sunt. Si nondum liquet, utrum jactura an lucrum factum sit, nihil interest, utrum eorum fuerit positivum. Si accepta pro positivis habentur, et expensa pro negativis, sed calculo subducto invenitur, expensa majora esse, summa est negativa, atque non lucrum sed jacturam indicat.

In

In Arithmetica vulgari signa + et — non usurpantur, neque etiam numeri in positivos et negativos distinguuntur. Quare in Additione et Subtractione calculus Arithmeticae universalis tum convenit cum calculo Arithmeticae vulgaris, si haec signa sunt eadem. Si haec addens possessiones aut debitum octoginta atque sexaginta florenorum, reperit 140 florenorum possessionem aut debitum, illa idem facit, utens hac aequatione $80+60=140$ aut $-80-60=-140$. At vero si possessio octoginta florenorum atque debitum sexaginta florenorum sunt conjungenda, ut appareat, quanta sit possessio, quae ex conjunctione redundet, Arithmetica universalis possessionem ponit positivam, debitum negativum, ita ut aequatio sit $80+(-60)=80-60=20$, qui igitur numerus 20 indicat possessionem. Arithmetica autem vulgaris, nulla ratione signorum habita, simpliciter docet, 60 florenos subtrahendos esse 80 florenis, atque residuum 20 florenos esse possessionem.

CA-

CAPUT III.

DE VOCIBUS ET NOTIS, QUIBUS PRONUNCIANTUR ET DESIGNANTUR NUMERI DETERMINATI.

§. 38. *De vocibus, quibus declarantur numeri determinati.*

Quoniam quilibet numerus, addendis unitatibus ad libitum augeri potest, infinitus requiretur notarum et vocum numerus, si quamlibet unitatum copiam peculiari nota, atque voce non composita designare velimus. Quare reperiundus erat modus, paucis notis, et vocibus simplicibus earumque compositione, quam maximam et minimam unitatum copiam ita designandi, ut ab omni alia copia satis esset distincta. Hac quidem in re consistit, quae dicitur *notatio numerorum*, in qua adminiculum quoddam homini suppeditasse videtur ipsa natura, quae *decem digitos* manibus dederit. Puerulus enim, atque quicunque artis Arithmeticae prorsus est rudis, digitorum ope ad numerandum utitur, atque cum ad *quinque* aut ad *decem* pervenit, numerationem repetit. Cujus rei omnes linguae afferunt testimonia. Ita Latini propriis et simplicibus verbis decem priores numeros designant, atque tum additione utentes, voces ex prioribus com-

po-

ponunt *undecim*, *duodecim*, *tredecim*, in quibus nonnunquam etiam usurpant subtractionem velut *undeviginti*, *duodeviginti* caet. Si *bis*, *ter*, *quater* ... *novies* ita numeratum est, id declaratur vocibus *viginti*, *triginta*, *quadraginta* .. *nonaginta*. Si autem *decies*, usurpatur vox propria et simplex *centum*. Hunc autem numerum centum *bis*, *ter*, *quater* .. *novies* esse repetitum, id designant voces compositae *ducenti*, *trecenti*, *quadringenti* .... *nongenti*, sed *decies* esse repetitum, declaratur voce simplici *mille*.

Animadv. Vernacula lingua eandem sequitur legem et ordinem. Patet enim, voces *twintig*, *dertig* .. *negentig* indicare *twee tienen*, *drie tienen* .. *negen tienen*. Vox *elf*, monente *Adelung* in egregio *Lexico Germanico* ab ipso edito, composita est ex voce *één*, atque ex obsoleto verbo *leiben*, quod est Anglosaxicum *lyfan*, Anglicum *to leave*, Graecum λείπειν, atque nostrum *blijven* (ubi litera *b* vocis vim auget) ita ut *elf* significet, *één blijft over van de tien*, atque *twaalf*, *twee blijft over*. Ipsae voces *honderd* atque *duizend* (Latinum *decies centum*) repetitionem numeri *decem* atque *centum* indicare videntur.

Nonnulli etiam populi *pedis digitis* in numerando usi fuisse videntur. Sunt enim, a quibus singulae hae duae notiones, *numerus decem* atque *pes*, *numerus undecim* atque *pes et unum*, caet. *nu-*

numerus quadraginta, atque *duo homines* eodem vocabulo designantur. Alii vocant quinque *unam* atque decem, *duas manus* (1).

§. 39. *De notis, quibus designantur numeri.*

His vocibus convenientes plerumque sunt notae sive characteres, quibus veteres utebantur. Ita Graeci, literis Alphabeti utentes, a prima litera incipiunt, ita ut priores decem literae, lineola superne adscripta, designent priores numeros usque ad decem.

α′, β′, γ′, δ′, ε′, ϛ′, ζ′ η′, θ′, ι′,
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10,

sequentes literae autem *viginti*, *triginta* .. *centum*.

κ′, λ′, μ′, ν′, ξ′, ο′, π′, ϙ′, ρ′,
20 30 40 50 60 70 80 90 100,

reliquae autem, numeros *ducenti*, caet.

σ′, τ′, υ′, φ′, χ′ ψ′, ω′ ϡ′,
200 300 400 500 600 700 800 900,

in

(1) Confer. Alexander von Humboldt, *über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlenzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den Indischen Zahlen;* quae Dissertatio reperitur in Crelles, *Journal der reinen und angewandten Mathematik*, IV. 3. p. 206.

in quibus inserta est litera ϛ (6); literae autem, quibus designabantur 90 et 900, non amplius sunt in nostro Alphabeto Graeco.

Ad majores numeros indicandos, denuo incipiunt a prima litera alphabeti, sed lineolae sub literis scribuntur. Quare

,α,	,β,	,γ,	,δ,	,ε,	,ϛ,	,ζ,
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000
,η,	,θ,	,ι,	,κ,	,λ,	,μ,	
8000	9000	10000	20000	30000	40000	
,ν,	,ξ,	,ο,	,π,	,ϟ,	,ρ,	
50000	60000	70000	80000	90000	100000	
,σ.						
200000.						

Numeri intermedii his signis facile designantur, ut v. c. 1831 est ,αω'λ'α'. At vero numerus 10000 etiam designatur literis Mυ, quae sunt primae literae vocis μυρίας, significantis *decem millia*. Utuntur etiam coëfficientibus, ut δ'Mυ = 4. 10000 = 40000; δ'Mυγ' = 40003.

Latini lineis verticalibus utuntur atque nonnullis aliis notis, quae notae, quod memorabile est, vestigia sunt methodi *numerandi per quinque, aut per digitos unius manus.* Una, duabus, tribus lineis verticalibus *I. II. III.* designant unam, duas et tres unitates. Nota autem *V.* (tanquam angulus, quem minimus digitus facit

cum

cum pollice) indicat numerum *quinque*, unde nota *X.* indicans *bis quinque*, quae consistit ex duabus notis *V*, ex adverso inter se conjunctis. Praeterea, ut in lingua ipsa (v. c. undeviginti, duodeviginti) ita etiam in his notis non solum Additione sed etiam Subtractione utuntur. Numerus minor majori additur, si ipsi *postpositus* est, sed subtrahitur, si ipsi est *antepositus*, ut *IV*, *VI*, *IX*, *XIX*, *XXI*. Si numeri aequales sunt, adduntur, ut *XX*, *XXX*. Quando pervenerunt usque ad *quinquies decem*, id est ad quinquaginta, usurpant signum L, quo significatur angulus rectus (quasi duplus angulus *V*). Eodem modo *decies decem* i. e. *centum* signo *C*, (prima litera vocis *centum*); *quinquies centum* i. e. *quingenta*, signo *D* vel *IϽ*; *decies centum* signo *M* (prima litera vocis *mille*) vel signo *CIϽ* indicant, unde *XC*, *CX*, *IϽC* *nonaginta*, *centum et decem*, *sexcenti*. Majores numeri ita designantur:

MM	*IϽϽ*	*CCIϽϽ*	*IϽϽϽ*	*CCCIϽϽϽ*, caet.	
2000	5000	10000	50000	100000.	

§. 40. *De modis designandi numeros per notas, quarum valor etiam pendet ex loco, quem inter se occupant.*

Quamquam autem hi designandi modi ex numeratione ipsa Decadica prodeunt, atque igitur paucas requirunt notas, tamen majoribus numeris non sufficiunt, atque calculis Arithmeticis nequaquam sunt accommodati. Multo ipsis excellunt et simplicitate et facilitate illae methodi, juxta quas eidem notae duplex tribuitur valor, alter *absolutus*, alter *relativus*, id est, quem per se habet nota, atque quem collocatione sua acquirit. Maxima autem laus his debetur methodis, quod calculis diversis Arithmeticis egregie sunt aptae; ex quibus una, dicta *Systema Decadicum*, linguae est conveniens, quippe quae utitur numeratione ipsa Decadica, atque hanc ob caussam caeteris longe est anteferenda. Hanc paucis sumus expositùri.

§. 41. *De natura Systematis Decadici.*

Problema.

Quamlibet unitatum copiam, decem adhibitis notis 1. 2. 3. . . 9. 0, *designare.*

Solutio.

1. Notae 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. designent

nent *unam*, *duas*, *tres* .... *novem* unitates, atque hic sit *valor absolutus* ab ipsis indicatus.

2. Alium autem designent valorem tum, cum plures juxta se in recta linea horizontali sunt scriptae. Fiat enim progressus a dextra ad sinistram, atque eae, quae primum locum occupant, sive primi sunt ordinis, hunc solum denotent valorem absolutum, id est simplices unitates, sed quae secundo, tertio, quarto, quinto et sexto loco positae sunt, designent unitates decies, centies, millies, decies millies, centies millies majores quam simplices. Quaevis itaque nota sequentis ordinis et loci numerum indicet decies majorem, quam si in antecedente ordine collocata fuisset. Ita quidem in numero composito

(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)
2	2	2	2	2	2

nota 2. in primo ordine *duas*; in secundo *decies duo*, id est *viginti*; in tertio *decies viginti*, id est *ducenta*; in quarto *decies ducenta*, id est *duo millia*; in quinto *decies duo millia* id est *viginti millia*; in sexto *decies viginti millia*, id est *ducenta millia*, designet.

3. Si in aliquo ordine nullus est numerus, hoc indicetur signo o, quod dici solet *zero*, vel etiam *cifra* atque nullum adesse numerum declaret. Quare 10, 100, 1000, 10000, 100000 indicat *decem*, *centum*, *mille*, *decies mille*, *centies mille*,

le, atque numerus 436085 est Polynomium = 400000 + 30000 + 6000 + 80 + 5, id est quadringenta millia + triginta millia + sex millia unitatum + octoginta + quinque unitates. Idem numerus, Graecorum more designatus, ita foret ,υ ,λ ,ς π' ε' in quo designandi modo aliqua convenientia cernitur cum Systemate Decadico, a quo caeterum magnopere differt. Maxime autem huic Systemati Decadico repugnat modus, quo Latini numeros indicant, isque calculo Arithmetico minime est accommodatus.

4. Millies mille dicatur *Millio*, millies mille Milliones *Billio*, millies mille Billiones *Trillio*, et eodem modo progrediendo utamur vocibus *Quatrillio*, *Quintillio*, *Sextillio*, caet. Progressus eodem modo a Millione ad Billionem, a Billione ad Trillionem, a Trillione ad Quadrillionem, caet. fiat, ut a simplici unitate ad Millionem, adeo ut dicatur *decem Milliones*, *centum*, *mille*, *decies mille*, *centies mille Milliones*.

5. Ergo si numeri designandi sunt, majores quam centum millia, notae septimi ordinis designant *Milliones*, sed notae octavi, noni, decimi, undecimi, duodecimi ordinis unitates, quae sunt decies, centies, millies, decies mille, centies mil-

mille Milliones. Septimum igitur usque ad duodecimum locum occupant *Milliones*, locum decimum tertium usque ad locum decimum octavum *Billiones*, locum decimum nonum usque ad vigesimum quartum *Trilliones*, caet. Quare, quo expeditius et facilius cognoscatur et verbis declaretur numerus, majore notarum serie indicatus, tota series a dextra ad sinistram progrediens dividatur in classes, quarum singulae sint sex notarum, atque ad primam notam singularum classium adscribantur superne characteres *o*, ′, ″, ‴ .... id est *o* ad notam primae classis, cujus numeri sunt minores quam Millio, ′ ad notam secundae classis, cujus numeri sunt *Milliones*, ″ ad notam tertiae classis, ubi numeri sunt *Billiones*, caet.

Dividatur praeterea quaelibet classis in duas partes, quarum utraque contineat tres notas, veluti:

$$18''' \; 446,744'' \; 073,709' \; 551,615^{o}$$

id est octodecim Trilliones, quadringenties quadragies sexies mille et septingentae quadraginta quatuor *Billiones*, septuagies ter mille et septingentae novem *Milliones*, quingenties quinquagies et semel mille et sexcenta quindecim (1).

Ani-

(1) Hic numerus indicat summam granorum, quae invenitur

Animadv. 1. Alii autem Arithmetici, imprimis Gallofranci, hoc sensu utuntur vocibus Billio, Trillio, caet., ut *Billio* sit millies Millio (un Milliard) *Trillio* millies Billio; *Quatrillio*, millies Trillio; *Quintillio*, millies Quatrillio, caet. adeo ut eundem numerum ita dividant et pronuncient.

Quint.	Quatr.	Trill.	Bill.	Milliones.	Mille.	
18	446	744	073	709	551	615

id est: octodecim *Quintilliones*, quadringentae quadraginta sex *Quatrilliones*, septingentae quadraginta quatuor *Trilliones*, septuaginta tres *Billiones*, septingentae et novem Milliones, quingenta quinquaginta unum *Millia*, sexcenta et quindecim. Hic modus pronunciandi numeros facilior et commodior est.

Animadv. 2. Progressus ordinum fit a dextra ad sinistram, quamquam scribimus notas, easque eloquimur, a sinistra ad dextram progredientes. Id jam indicat, Systema Decadicum ex Oriente esse profectum, quoniam Orientales plurimi a sinistra ad dextram scribere solent. Id ita esse monumenta Historica affirmant. Hoc Systema atque etiam notas ipsas nobis tradiderunt Arabes, qui tamen ipsi id acceperunt ab Indis, qui ejus in-

nitur si tabulae latruncularíae primo quadrato datur unum granum; secundo quadrato duo grana, tertio quatuor, quarto octo, quinto sedecim, et ita deinceps, hac lege, ut sequens quadratum semper duplo plus accipiat granorum, quam antecedens.

inventores, testibus auctoribus Arabicis ipsis, fuisse dicuntur. Sed in Europa Christiana non ante seculum decimum quartum usu receptum fuisse videtur. Patet, Indos etiam solitos fuisse supra notas semel, bis, ter ... scribere *zero* vel Graecum *omicron* ad designandum primum, secundum, tertium .. ordinem ut $\overset{\circ}{4}=40$, $\overset{\circ\circ}{4}=400$, $\overset{\circ}{\overset{\circ\circ}{4}}=4000$ $\overset{\circ}{\overset{\circ\circ}{4}}\ \overset{\circ\circ}{4}\ \overset{\circ}{4}\ 4=4444$. (1)

§. 42. *De Additione et Subtractione numerorum integrorum juxta Systema Decadicum designatorum.*

Ex Systematis Decadici ratione, exposita §. 37, facile explicantur regulae, quas in addendis et subtrahendis numeris integris praescribit Arithmetica vulgaris, cum eos solos numeros investiget, qui juxta hoc Systema sunt designati.

Ac primum quidem per se patet ratio, cur numeri addendi vel subtrahendi ita sint collocandi, ut, *qui ejusdem sint ordinis in eadem ponantur linea verticali.* In istas enim unitates cadit Additio et Subtractio, veluti numerorum:

$$\begin{array}{r} 1356 \\ 2511 \\ 122 \\ \hline \end{array}$$

Summa est 3989.

Ete-

(1) Confer. Dissertatio A. Humboldt memorata, atque Klugel, *Lexicon Mathematicum*, ad vocem *Zahlreihen* qui fontes hujus rei indicavit.

Etenim 1356 = 1000 + 300 + 50 + 6
2511 = 2000 + 500 + 10 + 1
122 = 100 + 20 + 2

Ergo summa est 3989 = 3000 + 900 + 80 + 9

Similiter numerorum, si minor a majore subtrahitur:

76894
4313

Residuum est 72581.

Etenim 76894 = 70000 + 6000 + 800 + 90 + 4
4313 = 4000 + 300 + 10 + 3

Residuum est = 72581 = 70000 + 2000 + 500 + 80 + 1.

Eadem numerorum collocatio est servanda, si acciderit, ut Summa unitatum alicujus ordinis major fuerit, quam *novem*, atque igitur duabus aut pluribus sit designanda notis. Oritur tum duplex vel triplex Additio, id est Summa Summarum est reperiunda. In qua Additione aut a sinistra ad dextram aut a dextra ad sinistram progredi possumus, veluti:

1345
6789

14
12
10
7

Summa = 8134.

14793
7345
6238
5389
3976

1
25
24
31
31

Summa 37741.

Sed

Sed compendii causa, ea pars summae, quae majoris est ordinis statim adnumeratur numeris sequentis ordinis, veluti:

$$\begin{array}{r} 873 \\ 956 \\ 789 \\ \hline 2618. \end{array}$$

Summa primae seriei verticalis ad dextram est 18. In hac igitur serie scribitur 8, sed unitas additur secundae seriei, ita ut hujus summa fiat 21. Unitas scribitur in secunda serie, sed 2 adduntur tertiae seriei, et ita deinceps.

Si in subtractione Subtrahendus alicujus seriei verticalis major est, quam Minuendus, Minuendo adjiciuntur decem, sed eaedem decem unitates etiam addendae sunt Subtrahendo (§. 18.) quod fit, unitatem adjiciendo numero sequentis ordinis, veluti:

$$\begin{array}{r} 8134 \\ 6789 \\ \hline \end{array}$$

Residuum = 1345.

Quatuor unitatibus, quas habet Minuendus, adduntur decem, sed decem etiam adduntur Subtrahendo, id est 8 mutatur in 9. Similiter tribus Minuendi unitatibus secundi ordinis adduntur decem, sed numerus 7 Subtrahendi fit 8, id est unitas tertii ordinis ipsi additur. Hic mo-

modus subtrahendi nititur hac enunciatione: *si Minuendus et Subtrahendus eodem numero augentur, Residuum idem permanet* (§. 18.). Ita, cum sit:

$$8134 = 8000 + 100 + 30 + 4$$
$$6789 = 6000 + 700 + 80 + 9$$

utrique numero adduntur $1000 + 100 + 10$, quo facto fit:

$$\text{Minuendus} = 8000 + 1100 + 130 + 14$$
$$\text{Subtrahendus} = 7000 + 800 + 90 + 9$$

Ergo Residuum est $= 1000 + 300 + 40 + 5 = 1345$.

Pro unitate addita Subtrahendo, unitas a Minuendo subtrahi potest.

$$\text{Etenim } 8134 = 8000 + 100 + 30 + 4$$
$$= 7000 + 1000 + 120 + 14$$
$$6789 = 6000 + 700 + 80 + 9$$

$$\text{Residuum } 1345 = 1000 + 300 + 40 + 5.$$

Prior autem methodus, qua unitas sequentis ordinis additur Subtrahendo, facilior est atque majorem habet convenientiam cum Additione.

§. 43. *Coroll.*

Si in Subtractione numerorum a et b, x est verum Residuum, ita ut sit $a - b = x$, erit:

1, $x + b = a$
2, $a - x = b$,

quo utroque modo uti possumus ad investigandum, an Subtractio rite fuerit peracta.

Si-

Similiter, si in Additione x vera est Summa, adeo ut sit $a+b=x$, erit:

$$1,\ x-a=b$$
$$2,\ x-b=a,$$

quo etiam utroque modo uti possumus, ad inquirendum, an x vera sit Summa (§. 18.) Si plures numeri sunt additi, possumus in iisdem lineis verticalibus numerando adscendere et descendere. Utraque numerandi ratio, ut per se patet, eandem debet dare Summam. Possumus etiam uti utroque modo Additionis, de quo diximus §. 38., id est in numerando progredi ad sinistram, atque regredi ad dextram.

Subtractio etiam cum Additione in unum conjungi potest, si Summa numerorum a, b, c . . . subtrahenda est numero p, veluti:

Minuendus p	135678
Subtrahendi a	4698
. . . b	3575
. . . c	12567
$p-(a+b+c)=$	114938.

§. 44. *Animadversio.*

Ex his jam perspicitur, quod magis etiam postea patebit, quantum usum et commodum in calculo praestet Systema Decadicum; qui usus ad omnes Arithmeticae partes, ubi de determinatis numeris agitur, pertinet. Insigniter autem ejus

ejus usus auctus fuit cum *calculo fractorum decimalium* instituto, tum *novo*, quod dicunt, *Systemate mensurarum et ponderum*, quod nostris temporibus inventum et apud nos receptum est. De utroque in posterum dicemus.

Mirabile est, quod Graeci, qui ad Philosophiam et Mathesin tanquam nati esse videbantur, non eam notationem, quae fit secundum systema Decadicum, invenerint et usurpaverint, cum continuo sequatur ex numeratione decimali. Ratio, cur non majores in Arithmetica vulgari atque in Mathesi universali fecerint progressus, ex eo etiam repetenda esse videtur, quod hoc Systemate in computando non usi fuerint.

§. 45. *De aliis Systematibus notationis numerorum, ejusdem generis atque Decadicum.*

Systematis Decadici numerus fundamentalis est 10. At vero, cum omnis alius numerus possit esse fundamentalis, Systemata hujus generis infinite multa fingi possunt. In his duo sunt memoranda, quorum numerus fundamentalis est *duo* et *duodecim*. Prius igitur *Dyadicum sive Binarium*, posterius *Dodecadicum* dicitur.

Systema Dyadicum omnium simplicissimum est, cum solo signo unitatis et nullius 1 et 0 utatur, atque ad Multiplicationem et Divisionem nul-

nullam omnino tabulam, qualis est Pythagorica, requirit.

Unitas in diversis ordinibus hos habet valores Decadicis notis indicatos.

Ordo	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Val. unitat. huj. ord.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.

Ordo	12.	13.	14.	15.	16.	17.
Val. unitat. huj. ord.	2048.	4096.	8192.	16384.	32768.	65536.

Ordo	18.	19.	20.
Val. unitat. huj. ord.	131072.	262144.	524288.

Systema *Dodecadicum* usui esse potest in *Mensura duodecimali*, quae in nonnullis regionibus adhuc viget, ubi, ad longitudines metiendas, usurpant unitatem 12 pedum, atque pedem dividunt in 12 pollices, pollicem in 12 lineas. Cum autem fundamentalis numerus sit 12, isque duabus unitatibus major sit quam Systematis Decadici, nostris decem notis, si iis utimur, duae adjiciendae sunt ad numeros decem et undecim designandos. Prior nota sit ω, posterior τ.

Unitas in diversis ordinibus hos habet valores.

Ordo	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Val. unitat. huj. ord.	1.	12.	144.	1728.	20 736.	248 832.	2 985 984.

Ordo	8.	9.	10.
Val. unitat. huj. ord.	35 831 808.	429 981 696.	5 159 780 352.

Ordo	11.	12.
Val. unitat. huj. ord.	61 917 364 224.	743 008 370 688.

Ordo	13.
Val. unitat. huj. ord.	8 916 100 448 256.

Sequens tabula comparationi horum Systematum inserviat.

Nu-

Numeri designati juxta Systema Decadicum, Dodecadicum atque Dyadicum.

Numerus.					
Decadicus.	Dodecadicus.	Dyadicus.	Decadicus.	Dodecadecus.	Dyadicus.
1	1	1	34	2ω	100 010
2	2	10	35	2T	100 011
3	3	11	36	30	100 100
4	4	100	37	31	100 101
5	5	101	38	32	100 110
6	6	110	39	33	100 111
7	7	111	40	34	101 000
8	8	1000	41	35	101 001
9	9	1001	42	36	101 010
10	ω	1010	43	37	101 011
11	T	1011	44	38	101 100
12	10	1100	45	39	101 101
13	11	1101	46	3ω	101 110
14	12	1110	47	3T	101 111
15	13	1111	48	40	110 000
16	14	10000	49	41	110 001
17	15	10001	50	42	110 010
18	16	10010	51	43	110 011
19	17	10011	52	44	110 100
20	18	10100	53	45	110 101
21	19	10101	54	46	110 110
22	1ω	10110	55	47	110 111
23	1T	10111	56	48	111 000
24	20	11000	57	49	111 001
25	21	11001	58	4ω	111 010
26	22	11010	59	4T	111 011
27	23	11011	60	50	111 100
28	24	11100	61	51	111 101
29	25	11101	62	52	111 110
30	26	11110	63	53	111 111
31	27	11111	64	54	1000 000
32	28	100000	65	55	1000 001
33	29	100001	66	56	1000 010

Numeri designati juxta Systema Decadicum, Dodecadicum atque Dyadicum.

…adicus.	Dodecadicus.	Numerus.		Dodecadicus.	Dyadicus.
		Dyadicus.	Decadicus.		
	57	1000 011	100	84	1 100 100
	58	1000 100	144	100	10 010 000
	59	1000 101	200	148	11 001 000
	5ω	1000 110	288	200	100 100 000
	5T	1000 111	300	210	100 101 100
	60	1001 000	400	294	110 010 000
	61	1001 001	432	300	110 110 000
	62	1001 010	500	358	111 110 100
	63	1001 011	576	400	1 001 000 000
	64	1001 100	600	420	1 001 011 000
	65	1001 101	700	4ω4	1 010 111 100
	66	1001 110	720	500	1 011 010 000
	67	1001 111	800	568	1 100 100 000
	68	1010 000	864	600	1 101 100 000
	69	1010 001	900	630	1 110 000 100
	6ω	1010 010	1000	6T4	1 111 101 000
	6T	1010 011	1008	700	1 111 110 000
	70	1010 100	1100	778	10 001 001 100
	71	1010 101	1152	800	10 010 000 000
	72	1010 110	1200	840	10 010 110 000
	73	1010 111	1296	900	10 100 010 000
	74	1011 000	1300	904	10 100 010 100
	75	1011 001	1400	988	10 101 111 000
	76	1011 010	1440	ω00	10 110 100 000
	77	1011 011	1500	ω50	10 111 011 000
	78	1011 100	1584	T00	11 000 110 000
	79	1011 101	1600	T14	11 001 000 000
	7ω	1011 110	1700	T98	11 010 100 100
	7T	1011 111	1728	1000	11 011 000 000
	80	1100 000	2000	11ω8	11 111 010 000
	81	1100 001	3000	18ω0	101 110 111 000
	82	1100 010	4000	2394	111 110 100 000
	83	1100 011	5000	2ω88	1001 110 001 000
	84	1100 100	6000	3580	1011 101 110 000
			7000	4074	1101 101 011 000
			8000	4768	1111 101 000 000
			9000	5260	10001 100 101 000
			10000	5954	10011 100 010 000

Additio et Subtractio numerorum, juxta Systema Dyadicum et Dodecadicum designatorum, sunt hujusmodi.

	Decad.		Dyad.
	95	=	1011111
	88	=	1011000
	17	=	10001
Summa	200	=	11001000

	Decad.		Dyad.
	100	=	1100100
	89	=	1011001
Residuum	11	=	1011.

	Decad.		Dodec.
	600	=	420
	700	=	4ω4
	800	=	568
	500	=	358
	400	=	294
Summa	3000	=	18ω0.

	Decad.		Dodec.
	10000	=	5954
	7000	=	4074
Residuum	3000	=	18ω0.

Quamvis autem Systema Dyadicum maxima commoditate et simplicitate se commendet, id tamen habet incommodum, quod multae notae in calculo, multaeque requiruntur voces, ad numerorum ordines indicandos.

Contrarium obtinet in Systemate Dodecadico omnibusque, quibus fundamentalis numerus major est quam decem. Minus sunt commoda, sed paucioribus in calculo notis, atque ad designandos ordines paucioribus vocibus opus est. Sed omnia haec Systemata multum postponenda sunt Systemati Decadico, quod solum convenit linguae usui.

CA-

CAPUT IV.

DE PRIMIS NOTIONIBUS RATIONIS ET PROPORTIONIS GEOMETRICAE, MULTIPLICATIONIS ET DIVISIONIS.

§. 46. *De Comparatione Quantorum.*

Cum omnis Matheseis tum Arithmetica versatur in comparandis Quantis homogeneis, praecipue numeris, sive puris, sive denominatis (1), idque maxime eum in finem, ut alterum Quantum per alterum definiatur et cognoscatur; quod jam perspici potest ex iis, quae de Aequatione, de numerorum Additione et Subtractione diximus. Ita primum quaeritur, utrum Quanta inter se sint aequalia, an inaequalia. Aequalitas indicatur aequatione $A = B$, et $A - B = 0$, ubi A et B sunt Quanta cujuslibet formae, compositionis et qualitatis. Ejusdem etiam Quanti diversi compositionis modi inter se comparari possunt, adeo ut aequatio sit formae $A = A$, ut $6 + 3 = 4 + 5$ (2).

Quantorum autem inaequalium comparatio eadem

(1) Proleg. p. 10.
(2) Proleg. p. 99.

eadem est, atque Totius et partium ejus. Veluti in Additione, si proposita est aequatio $a+b+c\ldots\ldots=x$, partes cum Toto, quae est ipsa Summa x, comparantur, ut perspiciatur, quantum sit. In Subtractione autem, si proposita est aequatio $a-b=d$, partes b et d ita cum Toto a comparantur, ut quaeratur, quid addi debeat ad b, ut id efficiatur. Hanc relationem inter Totum aliquod (a) atque alterutram ejus partem (b) nonnulli dicunt *Rationem Arithmeticam*, ipsumque d, quam nos *Differentiam* dicimus (x), *Exponentem hujus Rationis* appellant.

§ 47. *De comparatione Totius, ejusque partium aequalium.*

Alia autem fit comparatio, eaque maximi momenti et usus, si Totum ex aequalibus partibus constat, veluti: $P+P+P+P=4P=T$, ubi *Totum* T est *multiplum* partis P, atque P est *pars aliquota*, sive *submultiplum Totius* (1). Hinc voces, *duplum*, *triplum* ...; *duplo*, *triplo* ... *majus* vel *minus*; *subduplum subtriplum* ...; *dimidia pars*, sive *pars secunda*, *pars tertia*

(1) Vide Proleg. p. 6.

tia ... Veluti in Systemate Decadico, Dyadico, Dodecadico, quaelibet unitas alicujus ordinis est *pars decima*, *dimidium*, atque *pars duodecima* unitatis proximi majoris ordinis. Haec relatio indicatur aequatione $T = mP$, ubi *Coefficiens* partis P (§. 16.) indicat, quot sint partes. Cum autem in hac aequatione tria sint Quanta, triplex oritur quaestio, prima: *quota pars Totius est Quantum P*; secunda: *quodnam Tantum oritur, si mties sumitur pars P*; tertia: *quaenam est mtima pars Totius T*. Ex hac triplici quaestione proficiscuntur notiones *Rationis et Proportionis Geometricae*, *Mensurae*, *Fractionis*, *Multiplicationis* et *Divisionis*, atque aliae cum his cognatae, quae omnes arctissimo nexu sunt inter se conjunctae. De his deinceps nunc agemus.

§. 48. *Coroll.* 1.

Totum T eo majus est, quo plures atque majores habet partes aequales. Ergo si proponuntur Tota homogenea T et T', ita ut sit $T = mP$, atque $T' = m'P'$ concludimus, *si Coefficientes m et m' aequales sunt, Totum T esse majus aut minus quam T', aut ipsi aequale, si pars P est major aut minor quam P' aut ipsi aequalis*

lis. Notemus ejusmodi enunciationes signo $\gtrless$, ita ut hypothetica haec enunciatio hoc modo designetur:

1. Si $m = m'$, erit $T \gtrless T'$, si $P \gtrless P'$.

Similiter concludimus:

2. Si $P = P'$, erit $T \gtrless T'$, si $m \gtrless m'$.
3. Si $T \gtrless T'$, erit $mP \gtrless m'P'$,

in quibus Hypothesin in Thesin, Thesin in Hypothesin mutare possumus, ita ut sit:

4. Si $m = m'$, erit $P \gtrless P'$, si $T \gtrless T'$.
5. Si $P = P'$, erit $m \gtrless m'$, si $T \gtrless T'$.
6. Si $mP \gtrless m'P'$, erit $T \gtrless T'$.
7. $m = m'$ si quotiescunque est $T \gtrless T'$, etiam est $P \gtrless P'$, vel si quotiescunque est $P \gtrless P'$, etiam est $T \gtrless T'$.
8. $P = P'$, si quotiescunque est, $T \gtrless T'$, etiam est $m \gtrless m'$, vel si quotiescunque est $m \gtrless m'$, etiam est $T \gtrless T'$.

§. 49. *Definitio.*

Si $m = m'$, id est, si numerus partium Totorum T et T' aequalis est, haec Tota dicuntur esse *aequimultipla* partium P et P', atque partes ipsae esse aequisubmultiplae horum Totorum. Ita numeri 12, 16, 20, 24 sunt aequimultipli numerorum 3, 4, 5, 6.

Si P non est pars aliquota Totius, dicitur

esse

esse ejus *pars aliquanta.* Quare tres librae est *pars aliquanta* octo librarum. Similiter linea lineae, circulus circuli, angulus anguli, figura figurae est *pars* aut *aliquota* aut *aliquanta.*

§. 50. *De ratione Geometrica atque de ejus Exponente. Definitio.*

Si in comparandis duobus Quantis *A* et *B* inquiritur, quoties posterius, aut ejus pars aliquota contineatur in priore, inquiritur illa relatio, quam *Rationem Geometricam*, sive simpliciter *Rationem horum Quantorum* dicunt. Prius Quantum *antecedens*, posterius *consequens terminus Rationis* dicitur. Numerum, qui hanc Rationem indicat, *Exponentem Rationis* appellant, eumque repraesentet litera *e*. Ratio ipsa designari solet signo *colon:* interposito inter Quanta, ut *A*:*B*. Quare $A:B=e$.

§. 51. *Coroll.* 1.

B metitur Quantum *A*, si est *pars aliquota* ejus, atque tum Exponens *e* est *numerus integer.* Si autem *B* est pars *aliquanta* ipsius *A*, non *B* sed ejus *pars aliquota* est mensura hujus *A*, atque *e* est *numerus fractus*, cujus Denominator indicat, *in quot partes B divisum sit.*

Nu-

Numerator autem, *quot ejusmodi partes contineat A*, veluti:

8 metra : 4 metra $= 2$.

8 metra : 3 metra $= \frac{8}{3} = 8 . \frac{1}{3}$.

8 metra : 6 metra $= \frac{4}{3} = 4 . \frac{1}{3}$.

Quare si A *nties* continet *mtimam* partem ipsius B, Exponens e est $= \frac{n}{m}$, atque $A : B = \frac{n}{m}$ atque $A = n . \frac{1}{m} B$ (1).

§. 52. *Coroll.* 2.

Quoniam $m . \frac{1}{m}$ est unitas ipsa, Exponens $\frac{n}{m} = n . \frac{1}{m}$ *aequalis est unitati*, si $n = m$. Si $n < m$, Exponens minor est unitate, id est *fractus verus*. Si $n > m$, major est unitate, atque *fractus spurius*. Si n est multiplum ipsius m, est *numerus integer*. Quare, qualiscumque sit Exponens e, in ejus locum ponere possumus fractum $\frac{n}{m}$.

§. 53. *Coroll.* 3.

Ergo proposita Ratione $A : B = \frac{n}{m}$

$A \gtrless B$, si $n \gtrless m$,

$n \gtrless m$, si $A \gtrless B$.

(1) Conf. Proleg. p. 7. 8.

§. 54.

§. 54. *Coroll.* 4.

Exponens Rationis cujuslibet numeri atque unitatis est numerus ipse, id est: $\frac{n}{m}:1=\frac{n}{m}$. Quare si $A:B=\frac{n}{m}$, erit $A:B=\frac{n}{m}:1$, atque $A \gtrless B$, si $\frac{n}{m} \gtrless 1$.

§. 55. *Coroll.* 5.

Si inter duo Quanta intercedit aliqua ratio, haec Quanta sunt *homogenea.* Rursus, si duo Quanta homogenea sunt, Ratio aliqua inter ea intercedat necesse est.

§. 56. *Quantum rationale, et irrationale. Definitio.*

Quantum, quod unitatis finitae, sive integrae sive fractae, est multiplum aliquod, *rationale* dicitur; quod autem solius unitatis fractae infinite parvae est multiplum, appellatur *irrationale* seu *surdum*, *immensurabile* (1). Quare Exponens ipse Rationis potest esse rationalis, et irrationalis. Duo Quanta sive rationalia, sive irrationalia, quorum Exponens Rationis est *rationalis*, dicuntur *commensurabilia*; sed, si *irratio-*

(1) Conf. Proleg., p. 9.

tionalis est, *incommensurabilia.* Omnes numeri rationales *puri commensurabiles* sunt.

§. 57. *Proportio. Definitio.*

Si Exponens $\frac{n}{m}$ Rationis duorum Quantorum A et B idem est, atque Quantorum C et D, haec quatuor Quanta dicuntur esse *proportionalia, sive esse in Proportione* (Geometrica). Itaque Proportio constituitur *aequalitate duorum Exponentium Rationis.*

§. 58. *Coroll.* 1.

Si Exponens Rationis Quantorum A et B idem est atque Quantorum C et D, erit $A:B=C:D$. Etenim $A:B=\frac{n}{m}$, atque $C:D=\frac{n}{m}$, ergo $A:B=C:D$ (§. 5.), atque haec aequatio est Proportio, quae ita verbis exprimitur: *A est ad B, uti C est ad D.*

§. 59. *Coroll.* 2.

Si $A \gtrless B$, C est $\gtrless D$. Nam si $A \gtrless B$, erit $n \gtrless m$, atque si $n \gtrless m$, erit $C \gtrless D$ (§. 53.), ergo si $A \gtrless B$, erit $C \gtrless D$ (1).

§. 60. *Coroll.* 3.

Si $A=B$, atque $C=D$, erit $A:B=C:D$, Exponens enim Rationis est unitas.

(1) Proleg. p. 188.

§. 61.

Numeri designati juxta Systema Decadicum, Dodecadicum atque Dyadicum.

Numerus.					
Decadicus.	Dodecadicus.	Dyadicus.	Decadicus.	Dodecadicus.	Dyadicus.
67	57	1000 011	100	84	1 100 100
68	58	1000 100	144	100	10 010 000
69	59	1000 101	200	148	11 001 000
70	5ω	1000 110	288	200	100 100 000
71	5T	1000 111	300	210	100 101 100
72	60	1001 000	400	294	110 010 000
73	61	1001 001	432	300	110 110 000
74	62	1001 010	500	358	111 110 100
75	63	1001 011	576	400	1 001 000 000
76	64	1001 100	600	420	1 001 011 000
77	65	1001 101	700	4ω4	1 010 111 100
78	66	1001 110	720	600	1 011 010 000
79	67	1001 111	800	568	1 100 100 000
80	68	1010 000	864	600	1 101 100 000
81	69	1010 001	900	630	1 110 000 100
82	6ω	1010 010	1000	6T4	1 111 101 000
83	6T	1010 011	1008	700	1 111 110 000
84	70	1010 100	1100	778	10 001 001 100
85	71	1010 101	1152	800	10 010 000 000
86	72	1010 110	1200	840	10 010 110 000
87	73	1010 111	1296	900	10 100 010 000
88	74	1011 000	1300	904	10 100 010 100
89	75	1011 001	1400	988	10 101 111 000
90	76	1011 010	1440	ω00	10 110 100 000
91	77	1011 011	1500	ω50	10 111 011 000
92	78	1011 100	1584	T00	11 000 110 000
93	79	1011 101	1600	T14	11 001 000 000
94	7ω	1011 110	1700	T98	11 010 100 100
95	7T	1011 111	1728	1000	11 011 000 000
96	80	1100 000	2000	11ω8	11 111 010 000
97	81	1100 001	3000	18ω0	101 110 111 000
98	82	1100 010	4000	2394	111 110 100 000
99	83	1100 011	5000	2ω88	1001 110 001 000
100	84	1100 100	6000	3580	1011 101 110 000
			7000	4074	1101 101 011 000
			8000	4768	1111 101 000 000
			9000	5260	10001 100 101 000
			10000	5954	10011 100 010 000

Quantum, quod sit ad hoc Quantum, ut numerus $\frac{n}{m}$ *est ad unitatem.* Quantum *B* dicitur *Multiplicandus*, numerus $\frac{n}{m}$ *Multiplicator*, atque Quantum *A*, quod quaeritur, *Productum* aut *Factum* (id est ex Multiplicando et Multiplicatore). Uterque et Multiplicandus et Multiplicator communi nomine dicuntur *Factores*, quoniam efficiunt Productum; unde etiam nomen *Coefficiens*, quod datur Multiplicatori, quoniam simul cum Multiplicando *efficit* Productum. *Problema* ipsum: *reperire A ex B et* $\frac{n}{m}$, indicatur aequatione $A = \frac{n}{m} B$ quae ita verbis exprimitur: *si B multiplicatur per* $\frac{n}{m}$, *Productum est A.*

§. 64. *Coroll.* 1.

A et *B* possunt esse numeri *puri*, qui si sunt, problema solvendum multiplicatione hoc est. *Ex datis duobus numeris invenire tertium numerum, qui sit ad alterutrum eorum, ut alter numerus est ad unitatem.* Si Exponens est *integer*, problema hujus est argumenti: *Multiplicare Quantum per numerum integrum, est reperire aliud Quantum, quod toties contineat il-*

illud *Quantum*, *quoties iste numerus continet unitatem*. Caeterum Multiplicandus atque Productum possunt esse *numeri denominati*, sed Multiplicator semper est *numerus purus*.

§. 65. *De Divisione. Definitio.*

Ut Proportionis $A:B=\frac{n}{m}:1$ terminus antecedens A *multiplicatione* reperitur ex termino consequente B, atque Exponente $\frac{n}{m}$, ita etiam B reperiri potest ex A et $\frac{n}{m}$, atque $\frac{n}{m}$ ex A et B. Actio mentis, qua ita aut B aut $\frac{n}{m}$ reperitur, dicitur *Divisio*. Terminus A *Dividendus*; is, qui quaeritur, *Quotus*, atque reliquus terminus *Divisor* appellantur.

Quare *Divisione* duplex solvitur problema:

1. *Quaeritur reperire Exponentem Rationis* $A:B$. In hoc problemate B est *divisor*, $\frac{n}{m}$ est *Quotus*, atque *numerus est inveniendus*, *qui sit ad unitatem*, *uti Dividendus est ad Divisorem*.

Si in hoc problemate B est pars aliquota ejus A, Quotus $\frac{n}{m}$ est numerus integer, atque indicat, *quot sint partes*; Divisor autem, *quanta sit quaelibet pars*, atque *quaeritur numerus*, *qui toties continet unitatem*,

quo-

quoties Dividendus continet Divisorem. Ita proposita Ratione: 36 *floreni:* 3 *floreni*, quaeritur, *in quot partes aequales divisi sint* 36 *floreni, si quaelibet pars est* 3 *floreni;* ubi respondetur: in 12 partes: vel quaeritur *quoties* 36 *floreni contineant* 3 *florenos*, atque respondetur: *duodecies.* Haec igitur est *actio metiendi*, ubi *Dividendus* est *Quantum metiendum*, Divisor autem *mensura.*

At vero, si Divisor non est pars aliquota Dividendi, *Quotus est numerus fractus*, atque mensura Quanti A non est B, sed pars aliquota ipsius B; quae qualis sit, definitur Denominatore Exponentis, veluti 8 metra: 6 metra $= \frac{4}{3}$; ubi mensura est duplum metrum, aut tertia pars 6 metrorum.

2. Secundum problema hujus est argumenti: *Ex dato Exponente* $\frac{n}{m}$, *atque termino antecedente A Rationis, reperire terminum consequentem B;* ubi $\frac{n}{m}$ est Divisor, B est Quotus. Hac igitur divisione invenitur *Quantum B, ad quod sit quantum A, ut exponens est ad unitatem.* Si Divisor est numerus integer, Quotus significat, *quanta sit pars* Dividendi; Divisor autem, *quot sint partes aequales:* veluti 36 floreni : 12 = 3 floreni; ubi proponitur problema: *si*

si 36 floreni in 12 partes aequales dividuntur, quanta est quaelibet pars, atque universe: *dividere Quantum aliquod per numerum integrum, est invenire eam partem hujus Quanti, quae toties continetur in ipso, quoties unitas continetur in dato numero.* Sed si Divisor non est numerus integer, improprie ille dicitur indicare numerum partium aequalium.

§. 66. *Coroll.* 1.

In primo problemate Quotus, atque in secundo problemate Divisor semper est *numerus purus.*

§. 67. *Coroll.* 2.

Duplex hoc problema tum solum usu venit, quando A et B non sunt numeri puri. Sed si sunt numeri puri, nihil interest, utrum B an $\frac{n}{m}$ sit Quotus.

§. 68. *Theorema.*

Si Dividendus A, atque Divisor B sunt numeri puri, Quotus aequalis est Fracto puro, cujus Numerator est Dividendus, Denominator autem Divisor.

De-

Demonstratio.

Sit $A:B=\frac{n}{m}$, Ergo $A=\frac{n}{m}.B.$ (§. 51. 63.)

Sed Fractus $\frac{A}{B}=A.\frac{1}{B}=\frac{n}{m}.B.\frac{1}{B}=\frac{n}{m}$, quoniam ex natura Fracti $=B.\frac{1}{B}=1$. Ergo $A:B=\frac{A}{B}$.

§. 69. *Coroll.* 1.

Ergo si A et B numeri sunt puri, atque B est Divisor numeri A, *Dividendus A pro Numeratore, Divisor B pro Denominatore alicujus Fracti haberi potest.* Rursus Fracti $\frac{A}{B}$ Numerator pro Dividendo, atque Denominator pro Divisore haberi potest.

Quare etiam ratio $A:B$, sive divisio numeri A per B, eodem modo notatur, quo numerus fractus, atque igitur $\frac{A}{B}$ etiam indicat, A per B esse dividendum.

§. 70. *Coroll.* 2.

Proportio $A:B=C:D$, si A, B, C, D sunt numeri puri, non aliud est, nisi aequalitas duorum Fractorum $\frac{A}{B}$ atque $\frac{C}{D}$, eamque ita designare possumus: $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$.

§. 71.

§. 71. *Animadv.*

Haec de notione generali Multiplicationis et Divisionis, quae quoniam ad omnia Quanta referri debet, numerosque sive denominatos sive puros, eam ex notionibus Rationis et Proportionis hausimus. In sequentibus agimus de multiplicandis et dividendis numeris puris; ubi eas dare possumus definitiones, quae huic *speciei* Multiplicationis et Divisionis conveniunt.

CAPUT V.

DE MULTIPLICATIONE NUMERORUM INTEGRORUM, PRIMISQUE NOTIONIBUS POTESTATUM EORUM ET RADICUM.

§. 72. *Multiplicatio numerorum integrorum. Definitio.*

Diximus (§. 16.), quomodo compendii causa in Additione usurpentur Coefficientes, qui indicant, quoties idem numerus sit repetendus, itaque aequatione $ma = x$ designari, a, si $m$ties repetatur, efficere Summam x. Hac repetitione ejusdem numeri consistit *Multiplicatio per numerum integrum.* Multiplicatur enim a per numerum integrum m, *si toties repeti-*

tur, quoties unitas est in numero m, aut si invenitur Totum aliquod x, quod toties continet a, quoties m continet unitatem (§. 64.)

Haec definitio valet, qualiacunque sint *a* et *x*, sive sint numeri *puri*, sive *denominati*, dummodo *m* sit numerus integer. At vero *a* et *x* semper sunt ejusdem generis.

§. 73. *De designatione Multiplicationis.*

Multiplicatio designatur sive signo × sive puncto . interposito inter factores, ut $4 \times 5 = 30$; $3 . 16 = 48$. Si autem numeri universales inter se aut per numeros determinatos multiplicandi sunt, plerumque sine ullo signo conjunguntur, ut, *ma*, *ab*; ad similitudinem ejus, quod fit in Coefficientibus, atque in numeris denominatis; veluti $4a$, 3 *floreni*, ubi nullum interponitur signum. Si Factores sunt Polynomia, uncinis includuntur, eodem modo, quo in Additione et Subtractione; veluti: $(a+b+c)\ (c-d-a)$, atque $d\ (a-b+c)$.

Quodsi autem numeri *determinati* inter se multiplicandi sunt, signum × aut punctum . ipsis interponendum est. Etenim si apponuntur alter alteri, nullo interposito signo, diversum acquirunt valorem ex loco, quem occupant (§. 41.). Si in Arithmetica vulgari numerus fractus apponitur nu-

numero integro sine ullo signo, non Multiplicatio sed Additio designatur, ut $2\frac{3}{4}$; id est $2+\frac{3}{4}$.

§. 74. *Theorema.*

Productum ab *idem est, sive* b *multiplicat numerum* a, *sive* a *multiplicat numerum* b; id est: $ab = ba$.

Demonstratio.

. . . . . *Quinque* multiplicet numerum *qua-*
. . . . . *tuor*, id est quaeratur numerus
. . . . . *quinquies* continens quatuor, quod
. . . . . fit numerando *quinquies quatuor*
. . . . . unitates, quae hoc schemate repraesententur; ubi in quaque linea horizontali collocatae sunt quatuor unitates, specie punctorum. Ergo quinque lineae horizontales continent Productum, quod quaeritur, id est $4+4+4+4+4=20$. Quoniam autem nihil interest, quo ordine hae colligantur unitates (§. 15.) eas etiam hoc modo in unam Summam colligere possumus, ut comprehendantur, quae sunt in eadem linea verticali, quarum quaelibet continet quinque unitates.

Quatuor igitur lineae verticales continent idem Productum, aut $5+5+5+5=20$, atque *quinquies quatuor* idem est, atque *quater quinque*.

Cum

Cum autem idem valeat de quibuslibet Factoribus integris, universe est $ab = ba$.

Animadv. Haec demonstratio refertur tantummodo ad Factores, qui sunt numeri integri, sed facile etiam referri potest ad numeros fractos, ut in posterum explicabitur. Lagrange (1) hujus Theorematis hanc dedit demonstrationem, quae est generalis atque ad omnes Factores pertinet, in qua tamen pro concesso ponit: si $a = b + c$, esse $ba = bb + bc$, atque $ab = bb + cb$, qualescunque sint numeri. *Demonstratio* fere hujusmodi est.

Theorema $ab = ba$.

Etenim si $a = b$, res per se patet.

Si a et b non sunt aequales, sit $a = b + c$.

Ergo $ba = bb + bc$.

atque $ab = bb + cb$.

Ergo $ba = ab$, si $bc = cb$. Sed Producta bc et cb minora sunt, quam ab, ba. Quamobrem, eodem modo progrediendo, pervenimus tandem ad duo Producta, quae sunt aut formae gg, gg, aut formae $g \cdot 1 = 1 \cdot g$, quorum aequalitas per se est perspicua.

Sit v. c. $a = 2 = \frac{8}{4}$, $b = \frac{3}{4}$; demonstrandumque sit, esse $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2$, quod ita fit

$a - b = c = \frac{5}{4}$, atque $2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$.

Ergo $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\frac{3}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}$, atque si $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}$, erit $2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 2$.

Sed

(1) *Essai sur la théorie des nombres*, Ed. II. P. I.

Sed $\frac{5}{4}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$, ergo $\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}$, atque si $\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}$, erit $\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}$.

Sed $\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$. Ergo $\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}$. atque si $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}$, erit $\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}$.

Sed $\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, ergo $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$, atque $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$. Ergo $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}$, $\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}$, ergo $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot 2$. (1)

§. 75. *Coroll.* 1.

Multiplicandus in Multiplicatorem, atque Multiplicator in Multiplicandum ad libitum mutari potest. Haec ratio est, cur communi nomine appellentur *Factores* (§. 63.)

Hoc autem tantummodo valet de numeris puris. Numerus enim *denominatus*, quae est ejus natura, Multiplicatoris munere fungi numquam potest. Si Multiplicandus est numerus denominatus, Productum est etiam denominatum, ejusdemque generis atque Multiplicandus: veluti 8 $\times$ 4 floreni sunt 32 floreni (§. 63 et 64.)

§. 76. *Coroll.* 2.

Ut Summa ex pluribus terminis (§. 6.), ***ita Productum ex pluribus Factoribus constare potest***, ut $abc=x$. Primum quaeritur Productum

(1) De hoc Sorite vide Prol. p. 337 seqq. α est enunciatio $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}$; δ est enunciatio $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot 2$.

tum ab, quod deinceps multiplicat numerus c, unde novum Productum $abc = x$. Ita etiam reperitur Productum ex Factoribus Polynomiis, veluti $y = (a+b-c)(d-e+f)(g-h)$.

§. 77. *Coroll.* 3.

Si Productum ex pluribus constat Factoribus, perinde est, quo sibi succedant ordine, seque multiplicent Factores. Quare $abc = bca = cba = acb = bac = cab$.

Sit enim $ab = m$, ergo $abc = mc$; sed $mc = cm$ (§. 74.) ergo $abc = cab$. Sit $bc = m$, ergo $abc = am = ma = bca$, atque ita aliae ordinis mutationes. Quare si $g = mh$, erit $ag = amh = hma = mha = ahm = ham = amh$. Quod igitur de addendis numeris valet (§. 15.), idem valet de multiplicandis.

§. 78. *Coroll.* 4.

Si x est a, b, c ..., Productum ex xy *aequale est Productis ex Factoribus* $a y b, c, \ldots y$, veluti $5 \cdot 24 = 5 \cdot 4 \cdot 6$.

§. 79. *Coroll.* 5.

Quicumque numerus Factorem alicujus Producti multiplicat, idem etiam Productum multiplicat, veluti $3 \cdot 6b = 18b$.

Animadv. Mathematici numerum Factorum alicu-

cujus Producti *gradum* appellare solent; ita ut dicant: *Productum est secundi*, *tertii* ... *gradus*, si ex duobus, tribus aut pluribus constat Factoribus, ubi tamen excluduntur numeri determinati. Ita Productum $6abcd$ dicitur esse *quarti gradus*.

§. 80. *Theorema*.

Productum ex Polynomio et Monomio integro, est Summa Productorum ex Monomio, atque ex singulis terminis Polynomii.

Demonstratio.

Quoniam enim Multiplicatio per numerum integrum est repetita Additio (§. 72.), multiplicare Polynomium per Monomium integrum, est repetere toties totum Polynomium, id est omnes terminos ejus, quoties unitas est in Monomio:

$$\begin{array}{l} \text{Ita } 3.\ (a+b) \text{ est} \\ \quad a+b \\ \quad a+b \\ \quad a+b \\ \hline \text{id est } 3a+3b = 3(a+b) \end{array}$$

Idem valet de aliis quibuslibet numeris; ex quo concludimus: si omnes terminos Polynomii, sive sit integrum, sive fractum, sive mixtum, multiplicat Monomium integrum, Summam horum singulorum Productorum, quae *partialia* dicuntur, esse Productum ex illo Monomio et Polynomio. Quare

$$7\left(a+\frac{b}{c}+de-\frac{f}{g}\right) = 7a+7.\frac{b}{c}+7de-7.\frac{f}{g}.$$

§. 81.

§. 81. *Coroll.* 1.

Productum ex Polynomio (P) et Monomio (M) majus vel minus est Monomio, si Polynomium majus est vel minus unitate.

Etenim si $P = 1 + a$, erit $MP = M + Ma$, (§. 80.) ergo $MP > M$.
Sed si $P = 1 - a$, erit $MP = M - Ma$, ergo $MP < M$.
Quod de Polynomio valet, idem valet de Monomio. Ergo $ma \gtrless a$, si $m \gtrless 1$.

§. 82. *Coroll.* 2.

Quoniam Multiplicatio, si Multiplicator est numerus integer, est repetita Additio, ex §. 7. sequitur: *si aequales numeros cujuslibet generis multiplicant aequales numeri integri, Producta aequalia sunt*, id est:

Si $a = b$, erit $ma = mb.$, ubi m est numerus quilibet integer.

$$\begin{array}{rl} \text{Sit v. c.} & a = b \\ \text{addatur} & \underline{a = b} \\ \text{Ergo} & 2a = 2b \\ \text{addatur} & \underline{a = \ b} \\ \text{Ergo} & 3a = 3b \end{array}$$

et ita deinceps, ex quo universe sequitur $ma = mb$; ubi a et b possunt esse Quanta cujuslibet generis.

§. 83.

§. 83. *Coroll.* 3.

Si inaequales numeri aequales, vel aequales numeri inaequales multiplicant, Producta sunt inaequalia, idque Productum majus est, cui major est Factor.

Sit enim $a > b$, ergo $a = b + c$ (§. 10.)
Ergo $am = bm + mc$ (§. 80.), ergo $am > bm$.

§. 84. *Coroll.* 4.

Si $am > bm$, erit $a > b$.

Nam si $a = b$, erit $am = bm$ (§. 82.). Si $a < b$, erit $am < bm$ (§. 83.). Utrumque autem repugnat Hypothesi. Ergo $a > b$. (1).

Quare *si aequales numeros multiplicant inaequales numeri, is numerus major est, qui majus efficit Productum.*

§. 85. *Coroll.* 5.

Si $bx = by$, erit $x = y$.

Nam si $x > y$, erit $bx > by$, atque si $x < y$, erit $bx < by$ (§. 83.). Utrumque autem repugnat Hypothesi. Ergo $x = y$.

Quare *duo numeri, qui aequales multiplicant numeros, aequales sunt, si Producta sunt aequalia.*

Ex

(1) De ejusmodi demonstratione Apagogica diximus Proleg. p. 254.

Ex hoc Coroll.. atque ex Cor. 4. sequitur, $a \gtrless b$, si $am \gtrless bm$. Eadem ratione patet, $am \gtrless bm$, si $a \gtrless b$.

§. 86. *Coroll. 6.*

Si $bx = dy$, *atque* $b < d$, *erit* $x > y$.

Nam cum sit $b < d$, ponatur $d = b + m$ (§. 10.), ergo $dy = bx = by + my$, (§. 80.) ergo $bx > by$ (§. 10.), ergo $x > y$ (§. 84.)

Ergo *si duo Producta ex duobus Factoribus inaequalibus aequalia sunt, major Factor* ($x > y$) *cum minore* ($b < d$) *efficit Productum* (bx).

§. 87. *Coroll. 7.*

Si inaequales numeri inaequales numeros multiplicant, nihil de aequalitate vel inaequalitate Productorum colligitur. Possunt enim esse aequalia et inaequalia, veluti:

$$3 \cdot 8 = 2 \cdot 12., \quad 3 \cdot 8 > 2 \cdot 11, \quad 3 \cdot 8 < 2 \cdot 13.$$

§. 88. *De Potestatibus, atque de Exponentibus positivis et integris. Definitio.*

Si Productum ex pluribus constat Factoribus aequalibus, compendii atque facilioris intelligentiae causa, semel tantum scribitur Factor, atque ad dextrum latus superne numerus indicans, quot ejusmodi Factores insint Producto. Ita pro

aa,

aa, aaa, $aaaa$ scribitur a^2, a^3, a^4. Hic numerus dicitur *Exponens Potestatis*, sive simpliciter *Exponens*. Productum ipsum ex aequalibus constans Factoribus vocatur *numerus exponentialis*, sive *Potestas* (*Dignitas*, *Potentia*) hujus Factoris; ut a^4 est *quarta*, a^m est *mtima* Potestas numeri a; ubi a est *Factor* sive *numerus fundamentalis* Potestatis a^m. Quare $2^3 = 2.2.2 = 8$, $2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$. Factor potest esse *Polynomium*, ut $(a+b+c-d)^4$. Ut autem Polynomium, ita etiam Productum ex Factoribus Monomiis, si ad aliquam Potestatem est evehendum, uncinis includitur, ut $(abcd)^m$.

§. 89. *De Radicibus Potestatum, atque de Exponentibus fractis et negativis.*

Definitio.

Ipse numerus fundamentalis a, id est Factor Potestatis a^m, vocatur *numerus radicalis* sive *Radix* hujus mtimae Potestatis. Ergo ut a^4 est quarta Potestas Factoris a, ita ipse Factor a est Radix quarta numeri a^4. Quare *Radix* alicujus numeri est Factor Producti aequalium Factorum, atque est *secunda*, *tertia*, *quarta* .... *Radix*, si hoc Productum ex duobus, tribus, quatuor .... Factoribus constat. Radix ita signo $\sqrt{}$ notari solet, ut huic signo inscrip-

scriptus sit numerus indicans, cujusnam ordinis sit Radix, sive ex quot Factoribus constet Productum, veluti:

$\sqrt[3]{8} = 2$, quoniam $2 . 2 . 2 = 8 = 2^3$; $\sqrt[4]{16} = 2$, quoniam $2 . 2 . 2 . 2 = 16 = 2^4$.

$\sqrt[5]{243} = 3$, quoniam $3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 243 = 3^5$.

Ipse numerus radicalis potest esse *exponentialis* sive Exponentem habere, ut $\sqrt[m]{a^n}$, veluti:

$\sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2$, quoniam $2 . 2 . 2 . 2 = 16 = 4 . 4$.
$\sqrt[6]{27^2} = \sqrt[6]{729} = 3$, quoniam $3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 729 = 27 . 27$.

Commodius autem, atque ad Arithmeticam universalem aptius, Radix notatur numero fracto, cujus Denominator indicat, cujusnam ordinis sit Radix; Numerator autem, ad quamnam Potestatem sit evecta: veluti $4^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{4^2}$, $27^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{27^2}$. Ergo pro $\sqrt[m]{a}$, scribitur $a^{\frac{1}{m}}$, atque $a^{\frac{n}{m}}$ pro $\sqrt[m]{a^n}$, $(a+b-c)^{\frac{1}{m}}$ pro $\sqrt[m]{(a+b-c)}$, $(a+b-c)^{\frac{n}{m}}$, pro $\sqrt[m]{(a+b-c)^n}$.

Similiter numerum fractum formae $\frac{1}{a^m}$, cujus Numerator est unitas, atque Denominator est numerus exponentialis, Exponente negativo designant Mathematici, ita ut scribatur: a^{-m} pro $\frac{1}{a^m}$, $a^{-\frac{m}{n}}$ pro $\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$; 8^{-3} pro $\frac{1}{8^3}$; $8^{\frac{1}{3}}$ pro $\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}$.

Ratio hujus Notationis postea explicabitur.

§. 90.

§. 90. *Animadv.*

a^2 dicitur etiam *Quadratum*, atque a^3 *Cubus* numeri a. Causam hujus Denominationis Geometria docet. Similiter *radix secunda* et *tertia* etiam vocatur *Radix quadrata* et *cubica*. Usus voluit, ut *Radix secunda* indicaretur signo $\sqrt{}$ sine numero inscripto, ut $\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$.

§. 91. *Theorema.*

Productum ex numeris exponentialibus, quibus idem est Factor, ea est Potestas hujus Factoris, cujus Exponens est summa Exponentium horum numerorum, id est: $a^m a^n = a^{m+n}$; $a^m a^n a^p a^q = a^{m+n+p+q}$, ubi m, n, p, q sunt numeri integri positivi.

Demonstratio

a^4 per a^3 multiplicetur.

$a^4 a^3 = aaaa.\,aaa = a^7 = a^{4+3}$, atque universe $a^m a^n = aaaa \ldots\ldots aaaa \ldots\ldots$; ubi prior Potestas continet m Factores, posterior n Factores, atque adeo Factorum numerus est $m + n$. Ergo $a^m a^n = a^{m+n}$.

Animadv. Numeri exponentiales, quibus idem est Factor, dicuntur *homonymi*; *heteronymi* autem, si diversos habent Factores. Ita a^m et a^n sunt *homonymi*, sed a^m et b^m sunt *heteronymi*.

§. 92. *Coroll.* 1.

Numeri, quibus non est adscriptus Exponens, habendi sunt esse primae Potestatis, id est, quorum Exponens sit *unitas*, ita ut $a = a^1$.

Etenim $a^m a = a^{m+1}$.

§. 93. *Coroll.* 2.

$a^n a^n = (a^n)^2 = a^{n+n} = a^{2n}$. Ergo a^{2n} est secunda Potestas sive Quadratum numeri a^n. Similiter $a^n a^n a^n = (a^n)^3 = a^{n+n+n} = a^{3n}$. Quare a^{3n} est tertia Potestas numeri a^n, atque universe, cum sit $(a^n)^p = a^{np}$, a^{np} est *p*tima Potestas numeri a^n, veluti:

$(2^4)^3 = 2^{12} = (2^6)^2 = 64 . 64 = 4096$.

Quare, *ut reperiatur secunda, tertia, quarta .... Potestas alicujus numeri exponentialis, Exponens hujus numeri per* 2. 3. 4 ... *est multiplicandus.*

Rursus, cum sit $a^{np} = (a^n)^p = (a^p)^n$, *p*tima *Potestas numeri* a^n *est ntima Potestas numeri* a^p. Similiter a^n est *p*tima Radix numeri a^{pn}, atque a^p est *n*tima Radix ejusdem numeri a^{pn}; a^n est radix secunda numeri a^{2n}, sed radix tertia numeri a^{3n}, etc.

§. 94. *Coroll.* 3.

Si $x = abcd$, erit $x^m = a^m b^m c^m d^m = (abcd)^m$.

Ete-

Etenim $x^2 = abcd\ abcd = a^2 b^2 c^2 d^2$, $x^3 = abcd\ abcd\ abcd = a^3 b^3 c^3 d^3$, atque universe $x^m = abcd \ldots abcd \ldots abcd \ldots = a^m b^m c^m d^m \ldots$

Nam consistit ex m Productis, quorum singula sunt $abcd \ldots$, indefinito numero Factorum.

Ergo Potestas alicujus Producti ex diversis Factoribus est Productum ex iisdem horum Factorum Potestatibus.

§. 95. *Coroll.* 4.

Ergo unitates diversorum ordinum in Systemate Dyadico, Decadico et Dodecadico, aliisque hujus generis, numeris exponentialibus repraesentantur; veluti:

Ordo	1.	2.	3.	4.	5.	6	... n
Unitas Syst. Dyad.	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	... 2^{n-1}
. . . Decadici	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	... 10^{n-1}
. . Dodecadici	1	12	12^2	12^3	12^4	12^5	... 12^{n-1}

Ergo numerus quilibet determinatus N Systematis Decadici potest repraesentari hac serie:

$$N = a + b.\ 10 + c.\ 10^2 + d.\ 10^3 + e.\ 10^4 + f\ 10^5 + \ldots$$

ubi $a, b, c, d, e, f \ldots$ possunt esse 1, 2, 3, 4, 5, 6...9 aut etiam 0; veluti: $N = 340678 = 8 + 7.\ 10 + 6.\ 10^2 + 4.\ 10^4 + 3.\ 10^5$. Ergo numeri 10^6, 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, 10^{30}, 10^{36}, repraesentant Milliones, Billiones, Trilliones, Quadrilliones, Quinquilliones, Sextilliones (§. 41.).

Numerus N, secundum Systema Dyadicum designatus, hac serie repraesentatur.

$N = a + b.2 + c.2^2 + d.2^3 + e.2^4 + f.2^5 + \ldots$ ubi a, b, c, d ... designant aut 1 aut 0; veluti: $1101110 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7$.

Numerum autem Dodecadicum haec series repraesentat:

$N = a + b.12 + c.12^2 + d.12^3 + e.12^4 + f.12^5 + \ldots$ ubi $a, b, c, d, e, f \ldots$ possunt esse 1. 2. 3 ... 9. 10. 11 et 0.

Series $1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^m$, quae definit Systema numerorum, ubi in locum ipsius x ponuntur 10, 2, 12 ... dicitur *scala Arithmetica*.

Hisce adjungimus Potestates numerorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 11, quae illustrare possunt ea, quae de numeris exponentialibus dicta sunt, atque etiam usui sunt in nonnullis partibus Arithmeticae universalis.

1. Po-

2	= 2	= $4^{\frac{1}{2}}$	= $8^{\frac{1}{3}}$	= $16^{\frac{1}{4}}$	= $32^{\frac{1}{5}}$	= $64^{\frac{1}{6}}$	= $128^{\frac{1}{7}}$	= $256^{\frac{1}{8}}$	= $512^{\frac{1}{9}}$	= $1024^{\frac{1}{10}}$	= $2048^{\frac{1}{11}}$
4	= 2^2			= $16^{\frac{1}{2}}$		= $64^{\frac{1}{3}}$		= $256^{\frac{1}{4}}$		= $1024^{\frac{1}{5}}$	= $4096^{\frac{1}{6}}$
8	= 2^3					= $64^{\frac{1}{2}}$			= $512^{\frac{1}{3}}$		= $32768^{\frac{1}{5}}$
16	= 2^4	= 4^2									= $4096^{\frac{1}{3}}$
32	= 2^5							= $256^{\frac{1}{2}}$		= $1024^{\frac{1}{2}}$	= $32768^{\frac{1}{3}}$
64	= 2^6	= 4^3	= 8^2								= $4096^{\frac{1}{2}}$
128	= 2^7										= $16384^{\frac{1}{2}}$
256	= 2^8	= 4^4		= 16^2							
512	= 2^9		= 8^3								
1 024	= 2^{10}	= 4^5			= 32^2						
2 048	= 2^{11}										
4 096	= 2^{12}	= 4^6	= 8^4	= 61^3		= 64^2					
8 192	= 2^{13}										
16 384	= 2^{14}	= 4^7					= 128^2				
32 768	= 2^{15}		= 8^5		= 32^3						
65 536	= 2^{16}	= 4^8		= 61^4				= 256^2			
131 072	= 2^{17}										
262 144	= 2^{18}	= 4^9	= 8^6			= 64^3			= 512^2		
524 288	= 2^{19}										
1 048 576	= 2^{20}	= 4^{10}		= 61^5	= 32^4					= 1024^2	
2 097 152	= 2^{21}		= 8^7				= 128^3				
4 194 304	= 2^{22}	= 4^{11}									= 2048^2
8 388 608	= 2^{23}										
16 777 216	= 2^{24}	= 4^{12}	= 8^8	= 61^6		= 64^4		= 256^3			= 4096^2
33 554 432	= 2^{25}				= 32^5						
67 108 864	= 2^{26}	= 4^{13}									= 8192^2
134 217 728	= 2^{27}		= 8^9						= 512^3		
268 435 456	= 2^{28}	= 4^{14}		= 61^7			= 128^4				= 16384^2
536 870 912	= 2^{29}										
1 073 741 824	= 2^{30}	= 4^{15}	= 8^{10}		= 32^6	= 64^5				= 1024^3	= 32768^2

L

3	$=3$	$=9^{\frac{1}{2}}$	$=27^{\frac{1}{3}}$	$=81^{\frac{1}{4}}$	$=243^{\frac{1}{5}}$	$=729^{\frac{1}{6}}$	$=2187^{\frac{1}{7}}$	$=6561^{\frac{1}{8}}$	$=19683^{\frac{1}{9}}$	$=59049^{\frac{1}{10}}$	$=177147^{\frac{1}{11}}$
9	$=3^2$			$=81^{\frac{1}{2}}$		$=729^{\frac{1}{3}}$		$=6561^{\frac{1}{4}}$		$=59049^{\frac{1}{5}}$	$=531441^{\frac{1}{6}}$
27	$=3^3$					$=729^{\frac{1}{2}}$			$=19683^{\frac{1}{3}}$		$=14348907^{\frac{1}{5}}$
81	$=3^4$	$=9^2$									$=531441^{\frac{1}{3}}$
243	$=3^5$							$=6561^{\frac{1}{2}}$		$=59049^{\frac{1}{2}}$	$=14348907^{\frac{1}{3}}$
729	$=3^6$	$=9^3$	$=27^2$								$=531441^{\frac{1}{2}}$
2 187	$=3^7$										$=4782969^{\frac{1}{2}}$
6 561	$=3^8$	$=9^4$		$=81^2$							
19 683	$=3^9$		$=27^3$								
59 049	$=3^{10}$	$=9^5$			$=243^2$						
177 147	$=3^{11}$										
531 441	$=3^{12}$	$=9^6$	$=27^4$	$=81^3$		$=729^2$					
1 594 323	$=3^{13}$						$=2187$				
4 782 969	$=3^{14}$	$=9^7$									
14 348 907	$=3^{15}$		$=27^5$		$=243^3$						
43 046 721	$=3^{16}$	$=9^8$		$=81^4$				$=6561^2$			
129 140 163	$=3^{17}$										
387 420 489	$=3^{18}$	$=9^9$	$=27^6$			$=729^3$			$=19683^2$		
1 162 261 467	$=3^{19}$										
3 486 784 401	$=3^{20}$	$=9^{10}$		$=81^5$	$=243^4$					$=59049^2$	
10 460 353 203	$=3^{21}$		$=27^7$				$=2187^3$				
31 381 059 609	$=3^{22}$	$=9^{11}$									$=177147^2$
94 143 178 827	$=3^{23}$										
282 429 536 481	$=3^{24}$	$=9^{12}$	$=27^8$	$=81^6$		$=729^4$		$=6561^3$			$=531441^2$
847 288 609 443	$=3^{25}$				$=243^5$						
2 541 865 828 329	$=3^{26}$	$=9^{13}$									$=1594323^2$
7 625 597 484 987	$=3^{27}$		$=27^9$						$=19683^3$		
22 876 792 454 961	$=3^{28}$	$=9^{14}$		$=81^7$			$=2187^4$				$=4782969^2$
68 630 377 364 883	$=3^{29}$										
205 891 132 094 649	$=3^{30}$	$=9^{15}$	$=27^{10}$		$=243^6$	$=729^5$				$=59049^3$	$=14348907^2$

5	$=5$	$=25^{\frac{1}{2}}$	$=125^{\frac{1}{3}}$	$=625^{\frac{1}{4}}$	$=3125^{\frac{1}{5}}$	$=15625^{\frac{1}{6}}$	$=78125^{\frac{1}{7}}$	$=390625^{\frac{1}{8}}$	$=1953125^{\frac{1}{9}}$	$=9765625^{\frac{1}{10}}$
25	$=5^2$			$=625^{\frac{1}{2}}$		$=15625^{\frac{1}{3}}$		$=390625^{\frac{1}{4}}$		$=9765625^{\frac{1}{5}}$
125	$=5^3$					$=15625^{\frac{1}{2}}$			$=1953125^{\frac{1}{3}}$	$=244140625^{\frac{1}{4}}$
625	$=5^4$	$=25^2$						$=390625^{\frac{1}{2}}$		$=244140625^{\frac{1}{3}}$
3 125	$=5^5$									$=9765625^{\frac{1}{2}}$
15 625	$=5^6$	$=25^3$	$=125^2$							$=244140625^{\frac{1}{2}}$
78 125	$=5^7$									$=6103515625^{\frac{1}{2}}$
390 625	$=5^8$	$=25^4$		$=625^2$						
1 953 125	$=5^9$		$=125^3$							
9 765 625	$=5^{10}$	$=25^5$			$=3125^2$					
48 828 125	$=5^{11}$									
244 140 625	$=5^{12}$	$=25^6$	$=125^4$	$=625^3$		$=15625^2$				
1 220 703 125	$=5^{13}$									
6 103 515 625	$=5^{14}$	$=25^7$					$=78125^2$			
30 517 578 125	$=5^{15}$		$=125^5$		$=3125^3$					
152 587 890 625	$=5^{16}$	$=25^8$		$=625^4$				$=390625^2$		
762 939 453 125	$=5^{17}$									
3 814 697 265 625	$=5^{18}$	$=25^9$	$=125^6$			$=15625^3$			$=1953125^2$	
19 073 486 328 125	$=5^{19}$									
95 367 431 640 625	$=5^{20}$	$=25^{10}$		$=625^5$	$=3125^4$					$=9765625^2$
476 837 158 203 125	$=5^{21}$		$=125^7$				$=78125^3$			
2 384 185 791 015 625	$=5^{22}$	$=25^{11}$								$=48828125^2$
11 920 928 955 078 125	$=5^{23}$									
59 604 644 775 390 625	$=5^{24}$	$=25^{12}$	$=25^8$	$=625^6$		$=15625^4$		$=390625^3$		$=244140625^2$
298 023 223 876 953 125	$=5^{25}$				$=3125^5$					
1 490 116 119 384 765 625	$=5^{26}$	$=25^{13}$								$=1220703125^2$
7 450 580 596 923 828 125	$=5^{27}$		$=125^9$						$=1953125^3$	
37 252 902 984 619 140 625	$=5^{28}$	$=25^{14}$		$=625^7$			$=78125^4$			$=6103515625^2$
186 264 514 923 095 703 125	$=5^{29}$									

216	$=6^3$	$=2^3\,3^3$		$=8.\,27$			$=64^{\frac{1}{2}}\,729^{\frac{1}{2}}$
1 296	$=6^4$	$=2^4\,3^4$	$=4^2\,9^2$		$=16.\,81$		
7 776	$=6^5$	$=2^5\,3^5$				$=32.\,243$	
46 656	$=6^6$	$=2^6\,3^6$	$=4^3\,9^3$	$=8^2\,27^2$			$=64.\,729$
279 936	$=6^7$	$=2^7\,3^7$					
1 679 616	$=6^8$	$=2^8\,3^8$	$=4^4\,9^4$		$=16^2\,81^2$		
10 077 696	$=6^9$	$=2^9\,3^9$		$=8^3\,27^3$			
60 466 176	$=6^{10}$	$=2^{10}\,3^{10}$	$=4^5\,9^5$			$=32^2.\,243^2.$	
362 797 056	$=6^{11}$	$=2^{11}\,3^{11}$					
2 176 782 336	$=6^{12}$	$=2^{12}\,3^{12}$	$=4^6\,9^6$	$=3^4.\,27^4$	$=16^3\,81^3$		$=64^2.\,729^2$

V. Potestates Numerorum 7, 49, 343, 2401....

7	$=7$	$=49^{\frac{1}{2}}$	$=343^{\frac{1}{3}}$	$=2401^{\frac{1}{4}}$	
49	$=7^2$			$=2401^{\frac{1}{2}}$	
343	$=7^3$				
2 401	$=7^4$	$=49^2$			
16 807	$=7^5$				
117 649	$=7^6$	$=49^3$	$=343^2$	$=2401^{\frac{3}{2}}$	
823 543	$=7^7$				
5 764 801	$=7^8$	$=49^4$			
40 353 607	$=7^9$		$=343^3$		
282 475 249	$=7^{10}$	$=49^5$			$=16807^2$
1 977 326 743	$=7^{11}$				
13 841 287 201	$=7^{12}$	$=49^6$	$=343^4$	$=2401^3$	$=117649^2$

VI. Potestates Numerorum 11, 121....

11	$=11$	$=121^{\frac{1}{2}}$		$=1331^{\frac{1}{3}}$
121	$=11^2$			$=14641^{\frac{1}{2}}$
1 331	$=11^3$			$=1771561^{\frac{1}{2}}$
14 641	$=11^4$	$=121^2$		
161 051	$=11^5$			
1 771 561	$=11^6$	$=121^3$	$=1331^2$	
19 487 171	$=11^7$			
214 358 881	$=11^8$	$=121^4$		$=14641^2$
2 357 947 691	$=11^9$		$=1331^3$	
25 937 424 601	$=11^{10}$	$=121^5$		$=191051^2$
285 311 670 611	$=11^{11}$			
3 138 428 376 721	$=11^{12}$	$=121^6$	$=1331^4$	$=14641^3 = 1771561^2$

§. 96. *Coroll.* 5.

Ut Multiplicatio per numerum integrum est repetita Additio aequalium nnmerorum (§. 72.), ita evectio alicujus numeri ad aliquam Potestatem est repetita Multiplicatio per eundem numerum, atque numerus exponentialis a^m, cujus Exponens m est numerus integer, est Productum ortum ex repetitis m Factoribus aequalibus. Ex quo sequitur.

Si aequales numeri ad eandem evehuntur Potestatem, Producta, sive numeri exponentiales inde orti, aequalia sunt; id est, si $a = b$, erit $a^m = b^m$.

Nam si $a = b$
Multiplicatur per $a = b$

Productum est $a^2 = b^2$.

Ita repetita Multiplicatione fit $a^3 = b^3$, $a^4 = b^4$, atque universe $a^m = b^m$, ubi m est numerus integer positivus.

§. 97. *Problema.*

Multiplicare numeros determinatos diversorum Ordinum, secundum Systema Decadicum notatos, per numerum unius ordinis.

Solutio.

Numerus multiplicandus est *Polynomium*, Multiplicator autem *Monomium*. Ergo singuli Polynomii termini per Monomium sunt multiplicandi, atque haec Producta partialia in unam Summam

colligenda. Multiplicationi inservit Tabula, cuivis cognita, continens omnia Producta, quae ex Factoribus 1. 2. 3. 4 . . 10 effici possunt; quam *Tabulam Pythagoricam* dicere solent, quoniam *Pythagoras* eam invenisse dicitur.

Quod si igitur quaeritur 7. 245, seu septies numerus 245, qui ex tribus constat terminis, calculus hic est: $7\ (200+40+5) = 1400+280+35 = 1715$; qui hoc modo, aut a postrema aut a prima nota incipiendo, potest institui:

245		245
7	aut	7
35		1400
280		280
1400		35
1715		1715

Sed cum nota o nihil faciat ad Summam, omitti potest:

245	245
7	7
35	14
28	28
14	35
1715	1715

Possunt etiam numeri sequentis ordinis in Productis partialibus scribi in secunda linea horizontali, ut

245	793654392
7	9
485	317456718
123	682543281
1715	7142889528

Ple-

Plerumque tamen numeri, qui in Productis partialibus ad sequentem ordinem pertinent, non scribuntur, sed cogitatione adduntur numeris hujus sequentis ordinis. Tum autem Multiplicatio a postrema nota est incipienda, ut:

$$\begin{array}{r} 793654392 \\ 9 \\ \hline 7142889528 \end{array}$$

Exempla Multiplicationis suppeditant Potestates numerorum I. II ... VI. §. 95. ut: 7. (117649) = 823543.

§. 98. *Coroll.* 1.

Si numerum multiplicat 10, *quivis ordo unitate major fit; quod indicatur addita nota* 0 *ad finem*, veluti: 10. 245 = 2450.

Ergo si numerum multiplicant 10, 10^2, 10^3, 10^4 ... 10^n, una, duae, tres quatuor ... *n* notae *o* ad finem adscribuntur numero, ut 10^3. 245 = 1000. 245 = 245000. Ergo etiam 245. 70 = 2450. 7 = 17150. Omnino, si quis numerus multiplicandus est per $a. 10^n$, primum multiplicatur per *a*, atque deinde huic Producto ad finem adscribuntur *n* notae *o*.

§. 99. *Theorema.*

Productum ex duobus Polynomiis P et p aequale est summae Productorum ex alterutro Polynomio p, atque ex singulis terminis alterius Polynomii P. Id Productum etiam aequa-

le

le est Producto ex singulis terminis alterutrius atque singulis terminis alterius Polynomii.

Demonstratio.

Sit $P = a + b + c + d + e \ldots$

$p = \quad p$

---

ergo $Pp = ap + bp + cp + dp + ep \ldots$ §. 80. 82

Quare si $p = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots$

erit $Pp = a\alpha + a\beta + a\gamma + a\delta \ldots$

$+ b\alpha + b\beta + b\gamma + b\delta \ldots$

$+ c\alpha + c\beta + c\gamma + c\delta \ldots$

$+ d\alpha + d\beta + d\gamma + d\delta \ldots$

et ita deinceps.

§. 100. *Coroll.* 1.

Ergo si Binomia $(a+b)$ et $(c+d)$ atque $(a-b)$ et $(c-d)$ inter se multiplicantur, exsistunt haec Producta:

1. $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$ (§. 99.)

2. $(a-b)(c-d) = a(c-d) - b(c-d) = ac - ad - (bc - bd) = ac - ad - bc + bd$. §. 32.

ex quo sequitur:

a. *Si numerus positivus per numerum negativum, vel numerus negativus per numerum positivum multiplicatur, Productum est negativum.*

b. *Productum ex duobus numeris negativis est positivum.*

Quo-

Quoniam autem per se patet, Productum ex duobus numeris positivis esse positivum, has enunciationes in unam contrahere possumus hujus argumenti:

c. *Si signa duorum Factorum aequalia sunt, Productum est positivum, sed si inaequalia sunt, Productum est negativum.*

Animadv. Quo magis perspicue pateat veritas hujus praecepti, proponatur numerus 8 multiplicandus per 7—4. Productum 7.8 = 56 justo majus est. Neque enim totus numerus 7 multiplicat 8, sed diminutus numero 4. Ergo Productum 56 diminui debet quantitate 4.8 = 32, id est, a Producto 56 subtrahendus est 32. Quare $(7-4)8 = 56-32 = 24$, id est, $(-4)8 = -32$.

Si $12-4$ multiplicandus est per $7-4$, primum invenitur $7(12-4) = 84-28 = 56$. Hoc autem Productum justo majus est. Neque enim totus numerus 7 multiplicat numerum $12-4$, sed diminutus numero 4. Ergo a Producto $84-28$, subtrahendum est $4(12-4) = 48-16$, aut ipsi addendum est $16-48 = -32$ (§. 32.). Quare $(7-4)(12-4) = 84-28+16-48 = 100-76 = 24$; ergo $(-4)(-4) = 16$.

§. 101. *Coroll.* 2.

Productum ex pluribus Factoribus, qui aut omnes, aut ex parte sunt negativi, negativum est, si numerus negativorum Factorum impar

est,

est, sed positivum, si hic numerus par est, veluti:

$(-a)(-b)\,c = abc.$

$(-a)(-b)(-c)\,d = -abcd$, caet.

Quare etiam Potestas numeri negativi est positiva, si Exponens est numerus integer par, sed si impar est, Potestas negativa est, veluti: $(-a)^3 = -a^3$; $(-a)^4 = a^4$.

Ex quo sequitur, Radicem quadratam numeri a^{2m} non solum esse $+a^m$, sed etiam $-a^m$, quoniam non solum $(+a^m)(+a^m) = a^{2m}$, sed etiam $(-a^m)(-a^m) = a^{2m}$. Sed Radix quadrata alicujus numeri negativi, ut $\sqrt{-a}$, non est, quoniam non fieri potest, ut $-a$ sit Productum ex duobus Factoribus aequalibus. Quare $\sqrt{-a}$ atque universe $\sqrt[2m]{-a}$, id est, *Radix ordinis paris ex numero negativo, non esse potest, atque dicitur impossibilis.* Sed $\sqrt[3]{-a}$, atque universe $\sqrt[2m+1]{-a}$, id est *Radix ordinis imparis ex numero negativo, est negativa. Omnis denique Radix ordinis paris ex numero positivo est positiva et negativa*, id est $\sqrt[2m]{a} = \pm b$ si $a = b^{2m}$.

Animadv. Per se patet, $2m$ indicare numerum quemlibet *parem*, sed $2m+1$, atque $2m-1$ *imparem.*

§. 102. *Coroll.* 5.

Ex hoc Theoremate explicatur methodus numeros determinatos, compositos ex diversis ordinibus, inter se multiplicandi, quam docet Arithmetica vulgaris.

Quae

Quaeratur $24 \times 36 = x$, atque $246 \times 483 = y$, ergo $x = 24\ (6 + 30) = 144 + 720 = 864$ atque $y = 246\ (3 + 80 + 400) = 738 + 19680 + 98400 = 118818.$

Eodem modo procedit calculus Arithmeticae vulgaris

```
  246          246             246    483          2005
  483          483             483    246          6003
  ---  aut     ---   aut ita   ---    ---          ----
  738          984             628   2898          6015
 1968         1968              11   1932     12030
 984            738            628   966      ---------
------       ------           134   ------    12036015
118818       118818           864   118818
                              12
                            ------
                            118818
```

quae eadem est Methodus, praeterquam quod notae o compendii causa omittuntur. Nihil interest a quanam nota Multiplicationem incipiamus, dummodo curemus, ut notae ejusdem ordinis in eadem linea verticali scribantur. In schemate primo initium fit ab ultima nota, in schemate secundo a prima nota. Possunt etiam in singulis Productis partialibus notae majoris ordinis in sequenti linea horizontali scribi, uti factum est in schemate tertio.

Quoniam (§. 74.) idem oritur Productum, sive *a* per *b*, sive *b* per *a* multiplicatur, Multiplicatio ipsius *b* per *a* potest esse indicio, an Multiplicatio ipsius *a* per *b* rite peracta fuerit; quod indicatur schemate quarto.

Schema quintum docet, quomodo agendum sit, si notae o sunt in Multiplicatore. Etenim

2005

$2005 \times 6003 = 2005\,(3+6000) = 6015+12030000.$
$= 12036015$

Exempla Multiplicationis suppeditant Potestates numerorum I...VI. §. 95, veluti: $(1594323)^2 = 1594323 \cdot 1594323 = 2541865828329.$

Animadv. Exempla Multiplicationis numerorum, secundum Systema Dodecadicum designatorum, haec sunt:

```
    41T38
     TT70
  -------
  2517180
  399444
 399444
---------
 4196ω3580
```

atque secundum Systema Dyadicum

```
      11111
      10111
     ------
      11111
     11111
    11111
   111110
 ----------
 1011001001.
```

§. 103. *Coroll.* 4.

Multis saepe modis Multiplicationis calculus brevior reddi potest; ex quibus duo hoc loco notentur.

Quoniam, ut numerus multiplicetur per 10^m, nihil aliud faciendum est, nisi ut numero adjiciantur m notae o, exsistit brevior calculus, si Multipli-

tiplicator est 9, 99, 999, 9999 ... et universe $10^m - 1$. In Multiplicatione per hos numeros commode adhibetur Subtractio, quia $a\,(10^m - 1) = a.\,10^m - a$.

Sit $m = 1$, ergo $(10^m - 1)\,a = 9a$, veluti $3856.\,9 = 38560 - 3856 = 34704$

$m = 2$, ... $= 99a$ . . $3856.\,99 = 385600 - 3856 = 381744$

$m = 3$, ... $= 999a$ . . $3856.\,999 = 3856000 - 3856 = 3852144$

$m = 4$, ... $= 9999a$ . . $3856.\,9999 = 38560000 - 3856 = 38556144$

$m = 5$, ... $= 99999a$ . . $3856.\,99999 = 385600000 - 3856 = 385596144$

Ita etiam, si Multiplicator est 98, 998, 9998 et universe $10^m - 2$, quoniam $a\,(10^m - 2) = a.\,10^m - 2a$.

Sit $m = 2$, ergo $(10^m - 2)\,a = 98a$, veluti $3856.\,98 = 385600 - 7712 = 377888$

$m = 3$, ... $= 998a$ . . $3856.\,998 = 3856000 - 7712 = 3848288$

$m = 4$, ... $= 9998a$ . . $3856.\,9998 = 38560000 - 7712 = 38552288$

 Hoc

Hoc modo progredi possumus, secundum formulam generalem $a\ (10^m - b) = a.\ 10^m - ab$.
Nam si $b=3$, Multiplicatores fiunt 97, 997, 9997...

Sit $m=2$, ergo $(10^m-3)\ a=97a$, veluti $3856.\ 97 = 385600 - 11568 = 374032$

$m=3$, ... $=997a$ .. $3856.\ 997 = 3856000 - 11568 = 3844432$

$m=4$, ... $=9997a$ .. $3856.\ 9997 = 38560000 - 11568 = 38548432$

et ita de aliis Multiplicatoribus, qui non multum differunt ab 10^m.

Saepe etiam commodior redditur calculus partiendo Multiplicatorem in suos Factores, veluti $48a=6.\ 8.\ a$. Quare primum a multiplicatur per 6, deinde per 8. Sed hoc latius patet. Nam cum Multiplicator B sit universe hujus formae:
$B=a+10b+100c+1000d\ ..\ 10^m p$, si nonnulli ex his terminis, aut Summae nonnullorum terminorum communem habent Factorem, saepe facilior reddi potest calculus, veluti

Sit $B=a+10b+100c$, atque $b+10c=ar$,
unde (§. 82.) $10b+100c=10ar$,
ergo $B=a+10ar=a\ (1+10r)$, (§. 80.);
veluti $328=8\ (1+40)$
$648=8\ (1+80)$
$497=7\ (1+70)$
$819=9\ (1+90)$.

Sit

Sit Multiplicandus 435, ergo

$$435 \cdot 328 = 8 \cdot 435(1+40) = \begin{array}{r} 3480 = 8 \cdot 435 \\ +\ 139200 = 3480 \cdot 40 \\ \hline \end{array}$$

Productum 142680

$$435 \cdot 648 = 8 \cdot 435(1+80) = \begin{array}{r} 3480 = 8 \cdot 435 \\ +\ 278400 = 3480 \cdot 80 \\ \hline \end{array}$$

Productum 281880.

Ita etiam si complures sunt numeri, qui communem habent Factorem.

Sit $B = 6432168$, atque $A = 435678$,
ergo $A \times B = 8\,A(800000 + 4000 + 20 + 1)$
Sit $C = 8\,A$.
$D = 20\,C = 160\,A$.
$E = 200\,D = 32000\,A$.
$F = 200\,E = 6400000\,A$.
Ergo $A.B = C + D + E + F$. Est autem

C	3 485 424
$D = 20\,C$	69 708 480
$E = 200\,D$ . . .	13 941 696 000
$F = 200\,E$ . .	2788 339 200 000
ergo $A.B =$	2802 354 089 904

De aliis methodis in posterum dicetur.

§. 104. *Problema.*

Numeros universales, Polynomia et Monomia, inter se multiplicare.

Solutio.

Numerorum universalium Multiplicatio fit secundum regulas expositas. Praeterea observandum est.

I. Ordo requirit:

1. *Ut literas, quas designant Polynomia et Mono-*

nomia, quantum id fieri potest, ordinem servent alphabeticum. Quare Monomia *ba*, *bac*, *cbda*, *cbxday*, ita scribantur *ab*, *abc*, *abcd*, *abcdxy*, atque Polynomium $ca + db + a - dc - b + cba$, scribatur $a + ac + abc - b + bd - cd$.

2. Si in Polynomio sunt numeri exponentiales, qui eundem habent Factorem, hi ita collocentur, ut in serie quadam progrediantur Exponentes. Secundum hanc regulam v. c. collocati sunt termini hujus Polynomii $a^6 - a^5 b + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 - ab^5 + b^6$ ubi Exponentes Factoris *a* diminuuntur, sed Factoris *b* Exponentes crescunt.

Hic ordo, qui maximi est momenti, etiam tum tenendus est, quando, eo servato, Coëfficientes non possunt sequi ordinem alphabeticum, ut $cx^4 + dx^3 + ax^2 + ex + b$. *Hoc Polynomium dicitur esse scriptum juxta ordinem Exponentium Factoris x.*

3. Numeri determinati ponuntur ante numeros universales, si eorum sunt Multiplicatores seu Coëfficientes. Scribatur igitur $3a$, non vero $a. 3$. Universe quilibet Coëfficiens anteponitur numero, cujus est Coëfficiens, ut ax, $3abx$.

4. Quo facilius fiat reductio Producti ad simplicissimam formam, Producta partialia, quae aequalia sunt, aut solis Coëfficientibus differunt, alterum sub altero collocentur.

II. Brevitas atque simplicitas expressionis haec praescribunt:

1. Si Productum habet duos aut plures Factores, qui sunt numeri determinati, in eorum locum scri-

ba-

batur Productum ex ipsis, veluti $15ax$, pro $3 . 5ax$. Nonnunquam tamen adesse potest ratio, cur separati maneant factores, v. c. si ita melius perspicitur ordo atque regula quaedam generalis.

2. Termini aequales ejusdem Polynomii ad unicum reducantur terminum aut addendo aut subtrahendo, si signa habent aequalia aut inaequalia, ita ut prorsus deleantur, si Summa positivorum terminorum aequalis est Summae negativorum.

Ergo pro $a+a+a$, $ab+ab-ab-ab+ab+ab+abc-abc$ scribatur $3a+2ab$.

Idem fit, si termini solummodo differunt Coëfficientibus, ubi ad unum terminum reducuntur, aut addendo aut subtrahendo Coëfficientes. Ergo pro $5ab-2ab$ scribatur $3ab$, atque prorsus omittatur Polynomium $3ab+2ab-4ab-ab$ (§. 29.)

3. Si terminus est Productum, in quo sunt plures Factores aequales, unus numerus exponentialis pro iis ponatur, veluti pro $5aaabb$ scribatur $5a^3 b^2$. Eodem modo, si in Producto sunt plures ejusmodi numeri exponentiales, hi ad unum numerum exponentialem reducantur, addendis Exponentibus, veluti pro $5a^3 a^4 b^5 b^3 b$ scribatur $5a^7 b^9$ (§. 91.)

4. Factores Producti non scribantur cum ipsorum signis, sed signum $+$ et $-$ ponatur ante Productum; signum $+$ si numerus negativorum Factorum aut nullus est, aut par est, sed signum $-$ si iste numerus est impar. Quare pro $(-a)(-b)(-c)(+d)$ scribatur $-abcd$. (§. 101.)

Unum exemplum has regulas explicet.

Mul-

Multiplicetur *Polynomium*
$ba - b^2 b^3 + baaba + ababb\, 4.\, 5 - ax + a^4 b - ab$
$+ ax - b^3 ab$, per Polynomium $4aaba + abab$
$- bbab.\, 3.$

Hae expressiones, in ordinem redactae, et simpliciores redditae, fiunt;

Multiplicandus $a^4 b + a^3 b^2 + 20a^2 b^3 - ab^4 - b^5$.
Multiplicator autem $4a^3 b + a^2 b^2 - 3ab^3$.

Subscribatur vel adscribatur posterior priori, atque singuli Multiplicandi termini multiplicentur per singulos terminos Multiplicatoris, atque haec Producta partialia in unam colligantur Summam.

$$\begin{array}{l}
a^4b + a^3b^2 + 20a^2b^3 - ab^4 - b^5 \\
\quad 4a^3b + a^2b^2 - 3ab^3 \\
\hline
4a^7b^2 + 4a^6b^3 + 80a^5b^4 - 4a^4b^5 - 4a^3b^6 \\
\quad + a^6b^3 + a^5b^4 + 20a^4b^5 - a^3b^6 - a^2b^7 \\
\qquad - 3a^5b^4 - 3a^4b^5 - 60a^3b^6 + 3a^2b^7 - 3a \\
\hline
\end{array}$$

Prod. est $4a^7b^2 + 5a^6b^3 + 78a^5b^4 + 13a^4b^5 - 65a^3b^6 + 2a^2b^7 - 3ab$

Ejusmodi autem imprimis eligenda sunt exempla Multiplicationis, quae regulam aliquam generalem docent, aut saltem suspicionem ejus movent. Si perspicimus, eam regulam convenire Productis inventis, ejus quaerenda est demonstratio, vel investigandae sunt rationes, cur hoc ita sit. Hujus generis sunt exempla, quae sequuntur.

§. 105. *Exemplum Multiplicationis numemerorum universalium.*

Multiplicandis inter se Binomiis $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ .... invenimus:

1. $(x+a)(x+b)$ . . . . . $= x^2+(a+b)x+ab.$
2. $(x+a)(x+b)(x+c)$ . . . $= x^3+(a+b+c)x^2$
$+(ab+ac+bc)x+abc.$
3. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$. $= x^4+(a+b+c+d)x^3$
$+(ab+ac+bc+ad+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$
4. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) = x^5(a+b+c+d+e)x^4$
$+(ab+ac+bc+ad+bd+cd+ae+be+ce+de)x^3$
$+(abc+abd+acd+bcd+abe+ace+bce+ade+bde+cde)x^2$
$+(abcd+abce+abde+acde+bcde)x+abcde.$

atque ita deinceps, pluribus propositis Factoribus.

Hoc exemplum nostra attentione est dignissimum, cum propter varios ejus usus, tum quod nos ducit ad alias Arithmeticae universalis partes gravissimas, atque ad enunciationes generales, quae ex eo aut certae esse cognoscuntur, aut propter analogiam et inductionem maximam prae se ferunt probabilitatem. Quare operae pretium est inquirere, quid ex ipso aut continuo sequatur, aut, analogia et inductione ducibus, probabiliter concludi possit.

§. 106. *Coroll.* 1.

Primum natura ipsa hujus Multiplicationis perspicue docet, Productum m Factorum $(x+a)$ $(x+b)$ $(x+c)$ ..... constare ex $m+1$ terminis, ita quidem, ut primus terminus sit x^m, secundus, tertius, quartus ..... habeat Potestatem x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3} ...; ultimus terminus simplicem x, atque postremus sit Productum ex m Coëfficientibus a, b, c, d ...

Coëfficientes autem harum Potestatum producuntur

tur numeris a, b, c, d ..., quos Coëfficientes si indicaverimus literis A, B, C, D .. L, M, N, universe erit:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots(x+m)$$
$$= x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4}$$
$$\ldots + Lx^2 + Mx + N.$$

§. 107. *Coroll.* 2.

Id etiam, si ad naturam hujus Multiplicationis attendimus, perspicuum fit, Coëfficientem A indicare Summam m numerorum a, b, c, d...; B, C, D, E ... L, M, N Summam omnium Productorum ex duobus, tribus, quatuor, quinque ... m Factoribus, quae ex his m numeris effici possunt. Ultimus igitur terminus N est Productum ex omnibus his m Factoribus.

Ita in postremo exemplo primus Coëfficiens est Summa quinque numerorum a, b, c, d, e; secundus, tertius, quartus est Summa omnium Productorum ex duobus, tribus, quatuor Factoribus, quae ex his quinque numeris effici possunt; postremus autem terminus est Productum ex his quinque numeris.

§. 108. *Coroll.* 3.

Hanc legem esse universalem, etiam hoc modo perspicitur. *Vera est, si sunt* 2, 3, 4 *Factores*, ut patet ex exemplis propositis (§. 105.). Si igitur demonstrata fuerit haec propositio: *Si haec lex vera est, propositis* m *Factoribus, etiam vera est,* *pro-*

propositis m+1 *Factoribus*, demonstratum erit, eam esse veram, quotcunque sint Factores. Tum enim ita concludimus: *Vera est propositis quatuor Factoribus*, *ergo etiam propositis quinque*, *ergo etiam propositis sex* etc. (1).

Illam autem Propositionem esse veram patet ex hac argumentatione:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+m) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Lx^2 + Mx + N. \text{ pro } m \text{ Factoribus (§. 106.)}$$

Ex hac aequatione, multiplicata per $x+n$ prodit aequatio pro $m+1$ Factoribus, quae igitur est:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+m)(x+n) = x^{m+1} + (A+n)x^m + (B+nA)x^{m-1} + (C+nB)x^{m-2} + (D+nC)x^{m-3} \ldots + (L+nK)x^3 + (M+nL)x^2 + (N+nM)x + nN.$$

Si ejus Coefficientes literis A', B', C' designantur, prodit:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+m)(x+n) = x^{m+1} + A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} \ldots + L'x^3 + M'x^2 + N'x + O.$$

Ergo
$$\begin{aligned} A' &= A+n & L' &= L+nK \\ B' &= B+nA & M' &= M+nL \\ C' &= C+nB & N' &= N+nM. \\ D' &= D+nC & O' &= nN. \end{aligned}$$

Patet igitur hanc legem etiam veram esse, si numerus Factorum est $m+1$. *Tot enim nova et talia accedunt Producta, quot et qualia huic legi satisfaciunt.* Quod magis in lucem ponitur, si, hac aequatione duce, ex Producto 5 Factorum conficimus Productum 6 Factorum:

$(x+a)$

(1) Ad hoc demonstrationis genus attendendum est, quoniam id saepe usurpant Mathematici, praecipue in Arithmetica universali.

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)(x+f)=x^6+(a+b+c+d+e+$
$+[ab+ac+bc+ad+bd+cd+ae+be+ce+de+f(a+b+c+d+e$
$+[abc+abd+acd+bcd+abe+ace+bce+ade+bde+cde$
$+f(ab+ac+bc+ad+bd+cd+ae+be+ce+de)]x^3$
$+[abcd+abce+abde+acde+bcde$
$+f(abc+abd+acd+bcd+abe+ace+bce+ade+bde+cde)]x$
$+[abcde+f(abcd+abce+abde+acde+bcde)]x+abcdef.$

Ubi, quae nova accedunt Producta, distincte ab aliis sunt designata. Id quod Multiplicatione ipsa horum Factorum prodit, prorsus cum hoc Producto convenit.

§. 109. *Coroll.* 4.

Numeri, a, b, c, d ... possunt etiam aut omnes, aut ex parte esse *negativi*. Si omnes sunt negativi ex §. 101. patet, *A esse negativum*, *B positivum*, *C negativum*, caet. *atque ita per vices hos Coefficientes esse positivos et negativos.* Nam illi, qui constant ex Productis, quorum numerus Factorum *par* est, sunt positivi, sed negativi sunt, si iste numerus est *impar*, veluti

1. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$
2. $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-$
4. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4-(a...+d)x^3+(ab...+ca$
$-(abc...+bcd)x+$
$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=x^5-(a...+e)x^4+a$
$+de)x^3-(abc...+cde)x^2+(abcd...+bcde)x-ab$

§. 110. *Coroll.* 5.

Haec autem Producta evanescunt, si aliquis ipsorum Factor est $= o$, veluti
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = o$, si aut $x+a = o$ aut $x+b = o$, aut uterque Factor est $= o$.
Sed si $x+a = o$, erit $x = -a$
atque si $x+b = o$, erit $x = -b$.

Ergo si x est aut $= -a$ aut $= -b$ tota Aequatio ad nihilum reducitur (§. 20.). In tali Aequatione, in qua incognitus numerus x cum cognitis a, b ... est conjunctus, valores hujus x, ut $-a$ et $-b$, quibus positis Productum $x^2 + (a+b)x + ab$) fit $= o$, dicuntur *Radices Aequationis.*

Eadem ratione patet Aequationis:
$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = o$, Radices esse a et b quoniam $x - a = o$, ergo $x = a$,
aut $x - b = o$, ergo $x = b$.

Ergo Aequationes, in quibus summus Exponens incogniti numeri est 2, habent duas Radices. Universe, in quibus Aequationibus summus Exponens incogniti numeri est 2, 3, 4, 5 ... m, hae Aequationes habent 2, 3, 4, 5 ... m Radices. Habent enim 2, 3, 4, 5 ... m Factores, qui singuli praebent unam Radicem.

Ergo *summus Exponens incogniti numeri* x, *atque numerus Radicum, idem est.* Quaeri igitur possit, an illa lex constans sit et vera: *Si est aliqua Aequatio, ad nihilum reducta, in qua unus solus est numerus incognitus exponentialis* x, *cu-*

cujus Exponentes sunt numeri integri positivi, summus Exponens hujus numeri semper est aequalis numero Radicum Aequationis. Hanc legem, quae deinceps alia argumentatione confirmabitur, patet esse generalem et constantem, dummodo Radix possit esse quilibet numerus, etiam is, qui impossibilis sit.

Si proponitur aequatio:

$x.(x+a)(x+b)=x^3+(a+b)x^2+abx=o$, tertius accedit Factor ad $x+a$ et $x+b$, qui est x, qui si ponitur $=o$, Radices sunt $-a$, $-b$, o. *Radix igitur potest etiam esse* o, *quod fit, si omnes termini sunt Multiplicati per* x, ejusque Potestates.

Si proponitur $(x+a)(x+a)=x^2+2ax+a^2=o$ duae sunt radices $-a$ et $-a$. Ergo *Radices aut omnes, aut nonnullae possunt esse inter se aequales.*

§. 111. *Coroll.* 6.

Ex his perspicitur, nihil esse facilius, quam invenire Radices harum Aequationum, si Factores sunt cogniti, atque Factores invenire, si Radices sunt cognitae. Nam si Factores sunt $(x+a)(x-b)x$ Radices sunt $-a$, $+b$, o; si Radices sunt a, $-b$, o, Factores sunt $(x-a)(x+b)x$.

Omnino Aequationi:

$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}\ldots+Lx^2+Mx+N=o$ ut sunt m Factores, ita sunt m Radices a, b, c, ..., *quae omnes sunt negativae, si omnes Coëfficientes* A, B, C ... *sunt positivi, sed positivae, si illi Coëfficientes per vices sunt negativi et positivi* (§. 108. 110.).

Si

Si neutrum est, Radices partim sunt positivae, partim negativae.

Si Radices omnes sunt numeri integri, Coëfficientes etiam omnes integri sunt.

Ea, quae dicta sunt, magis illustrabuntur, si pro a, b, c ... determinatis utimur numeris, quod fit in sequenti §.

§. 112. *Coroll. 7.*

In locum horum numerorum a, b, c ... possunt substitui quilibet numeri integri, fracti, rationales et irrationales, possibiles et impossibiles, de quibus deinceps dicetur. Simplicissimi hujus generis sunt numeri 1, 2, 3, 4, veluti in his exemplis:

1. $(x+1)(x+2)=x^2+3x+2=0$ Radices sunt $-1, -2$.
2. $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2=0$ . . . . . $+1, +2$.
3. $(x+1)(x-2)=x^2-x-2=0$ . . . . . $-1, +2$.
4. $(x-1)(x+2)=x^2+x-2=0$ . . . . . $+1, -2$.

$(x-1)(x+2)x=x^3+x^2-2x=0$ . . . . . $+1, -2, 0$.

Similiter in sequentibus ubi Factores omisimus, cum tam facile reperiantur ex Radicibus.

5. $x^3+6x^2+11x+6=0$. Radices sunt $-1, -2, -3$.
6. $x^3-6x^2+11x-6=0$ . . . . . $+1, +2, +3$.
7. $x^3 \quad -7x-6=0$ . . . . . $-1, -2, +3$.
8. $x^3 \quad -7x+6=0$ . . . . . $+1, +2, -3$.
9. $x^3+2x^2-5x-6=0$ . . . . . $-1, +2, -3$.
10. $x^3-2x^2-5x+6=0$ . . . . . $+1, -2, +3$.
11. $x^3-4x^2+x+6=0$ . . . . . $-1, +2, +3$.
12. $x^3+4x^2+x-6=0$ . . . . . $+1, -2, -3$.

13. $x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0$. Radices $-1, -2, -3,$

14. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ . . $+1, +2, +3,$

15. $x^4+2x^3-13x^2-38x-24=0$ . . $-1, -2, -3,$

16. $x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$ . . $+1, +2, +3,$

17. $x^4+4x^3-7x^2-34x-24=0$ . . $-1, -2, +3,$

18. $x^4-4x^3-7x^2+34x-24=0$ . . $+1, +2, -3,$

19. $x^4+4x^3-7x^2-22x+24=0$ . . $+1, +2, -3,$

20. $x^4-4x^3-7x^2+22x+24=0$ . . $-1, -2, +3,$

21. $x^4+6x^3+3x^2-26x-24=0$ . . $-1, +2, -3,$

22. $x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0$ . . $+1, -2, +3,$

23. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$ . . $+1, -2, +3,$

24. $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$ . . $-1, +2, -3,$

25. x^4 . . $-15x^2+10x+24=0$ . . $-1, +2, +3,$

26. x^4 . . $-15x^2-10x+24=0$ . . $+1, -2, -3, +$

27. $x^4+8x^3+17x^2-2x-24=0$ . . $+1, -2, -3,$

28. $x^4-8x^3+17x^2+2x-24=0$ . . $-1, +2, +3,$

Ex quibus videmus, ut etiam res ipsa indicat, duas Aequationes, quae easdem habent Radices, sed omnes contrariis signis affectas, habere eosdem Coëfficientes, ita tamen ut primus, tertius, quintus .... terminus signis differant. Quare etiam Aequationes in unam contrahere possumus, ita ut, ubi signa sunt diversa, superiora ad alterutram, inferiora signa ad alteram referantur, veluti:

29. $x^3 \pm 13x^2 + 52x \pm 60 = 0$ . . $\mp 2, \mp 5, \mp 6.$

30. $x^3 \pm x^2 - 32x \mp 60 = 0$ . . $\mp 2, \mp 5, \pm 6.$

31. $x^3 \pm 3x^2 - 28x \mp 60 = 0$ . . $\mp 2, \pm 5, \mp 6.$

32. $x^3 \mp 9x^2 + 8x \pm 60 = 0$ . . $\mp 2, \pm 5, \pm 6.$

33. $x^4 \pm 29x^3 + 287x^2 \pm 1147x + 1560$. Radices $\mp 3, \mp 5, \mp 8, \mp$

Si in Productis est Factor $(x \pm a)^2$, $(x \pm a)^3$, $(x \pm a)^4$ ... id indicat, duas, tres, quatuor ... esse Radices $= \mp a$, veluti

34. $(x-2)(x-4)(x-3)^4 = x^6 - 18x^5 + 134x^4 - 528x^3 + 1161x^2 - 1350x + 648 = 0$, ubi Radices sunt 2, 4, 3, 3, 3, 3.

35. $(x+1)^2(x-2) = x^3 - 3x^2 - 2 = 0$; ubi Radic. sunt $-1, -1, +2$.

Si quis Coëfficiens evanescit, totus evanescit ejus terminus. Sed evanescit A, *si Summa Radicum positivarum aequalis est Summae Radicum negativarum*, ut fit in Aequationibus 7, 8, 25, 26. B autem evanescit, *si sumtis omnibus Productis ex binis Radicibus, Summa Productorum positivorum aequalis est Summae Productorum negativorum*, veluti

36. $(x+2)(x-3)(x-6) = x^3 - 7x^2 + 36 = 0$, ubi Radices sunt $-2, +3, +6$. Summa enim Productorum est $(-2)3 + 6(-2) + 3.6 = -6 - 12 + 18 = 0$. Ita etiam

37. $(x+4)^2(x-2) = x^3 + 6x^2 - 32$, ubi Radic. sunt $-4, -4, +2$.

§. 113. *Coroll.* 8.

Si hae Aequationes non reducuntur ad nihilum, ipsi x quemlibet valorem determinatum dare possumus.

Ita Aequatio $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$, si ipsi x damus valores 1, 2, 3, 4, fit $2.3 = 1 + 3 + 2$; $3.4 = 4 + 6 + 2$; $4.5 = 9 + 9 + 2$. Quare tum x dicitur esse *variabilis*, atque $(x+1)(x+2)$ vocatur ejus *Functio*.

Hoc modo ex his Aequationibus saepe Producta

ta inveniuntur simplici Additione, si x ponitur esse $1, 10, 100 \ldots$, veluti:

$2.\ 3.\ 4 = 1+6+11+6 = 24$, si $x=1$
$11.12.13 = 1000+600+110+6 = 1716$, si $x=10$ } ex Aeq

$3.\ 6.\ 7 = 1+13+52+60 = 126$, si $x=1$
$12.15.16 = 1000+1300+520+60 = 2880$, si $x=10$ } ex Ae

$2.\ 3.\ 4.\ 5 = 1+10+35+50+24 = 120$, si $x=1$
$11.12.13.14 = 10000+10000+3500+500+24 = 24024$, si $x=10$ } ex Ae

$4.\ 6.\ 9.14 = 1+29+287+1147+1560 = 3024$, si $x=1$
$13.15.18.23 = 10000+29000+28700+11470+1560 = 80730$, si $x=10$ } ex Ae

§. 114. *Coroll.* 9.

Si numeros $a, b, c, d \ldots$ ponimus $= \mp a$, prodeunt diversae Potestates Binomiorum $(x+a)$ atque $(x-a)$, quas etiam simplice Multiplicatione invenimus. Utriusque Binomii Potestates in unam contrahere possumus formulam, designando signis superioribus Potestates Binomii $(x+a)$, inferioribus autem Potestates Binomii $(x-a)$, ut fecimus §. 112. Ubi unum est signum $+$, id utrique Binomio est commune:

Si in hisce ponimus $a=1$, prodeunt Potestates Binomiorum $(x+1)$ et $(x-1)$.

1. $(x \pm a) = x \pm a$
2. $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$
3. $(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3$
4. $(x \pm a)^4 = x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4$
5. $(x \pm a)^5 = x^4 \pm 5ax^4 + 10a^2x^3 \pm 10a^3x^2 + 5a^4x \pm a^5$
6. $(x \pm a)^6 = x^6 \pm 6ax^5 + 15a^2x^4 \pm 20a^3x^3 + 15a^4x^2 \pm 6a^5x + a^6$
7. $(x \pm a)^7 = x^7 \pm 7ax^6 + 21a^2x^5 \pm 35a^3x^4 + 35a^4x^3 \pm 21a^5x^2 + 7a^6x \pm a^7$
8. $(x \pm a)^8 = x^8 \pm 8ax^7 + 28a^2x^6 \pm 56a^3x^5 + 70a^4x^4 \pm 56a^5x^3 + 28a^6x^2 \pm 8a^7x + a^8$
9. $(x \pm a)^9 = x^9 \pm 9ax^8 + 36a^2x^7 \pm 84a^3x^6 + 126a^4x^5 \pm 126a^5x^4 + 84a^6x^3 \pm 36a^7x^2 + 9a^8x \pm a^9$
10. $(x \pm a)^{10} = x^{10} \pm 10ax^9 + 45a^2x^8 \pm 120a^3x^7 + 210a^4x^6 \pm 252a^5x^5 + 210a^6x^4 \pm 120a^7x^3 + 45a^8x^2 \pm 10a^9x + a^{10}$.

1. $(x \pm 1) = x \pm 1$
2. $(x \pm 1)^2 = x^2 \pm 2x + 1$
3. $(x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$
4. $(x \pm 1)^4 = x^4 \pm 4x^3 + 6x^2 \pm 4x + 1$
5. $(x \pm 1)^5 = x^5 \pm 5x^4 + 10x^3 \pm 10x^2 + 5x \pm 1$
6. $(x \pm 1)^6 = x^6 \pm 6x^5 + 15x^4 \pm 20x^3 + 15x^2 \pm 6x + 1$
7. $(x \pm 1)^7 = x^7 \pm 7x^6 + 21x^5 \pm 35x^4 + 35x^3 \pm 21x^2 + 7x \pm 1$
8. $(x \pm 1)^8 = x^8 \pm 8x^7 + 28x^6 \pm 56x^5 + 70x^4 \pm 56x^3 + 28x^2 \pm 8x + 1$
9. $(x \pm 1)^9 = x^9 \pm 6x^8 + 36x^7 \pm 84x^6 + 126x^5 \pm 126x^4 + 84x^3 \pm 36x^2 + 9x \pm 1$
10. $(x \pm 1)^{10} = x^{10} \pm 10x^9 + 45x^8 \pm 120x^7 + 210x^6 + 252x^5 + 210x^4 \pm 120 + x^3 45x^2 \pm 10x + 1$.

§. 115. *Coroll.* 10.

Coëfficientes, id est numeri determinati, qui multiplicant Potestates numerorum x et a in Binomiis $(x+a)^m$ dicuntur *Coëfficientes binomiales*, vel *Unciae binomiales*, atque memorabilibus gaudent proprietatibus. Primum enim *Summa eorum in Potestate* $(x+a)^m$ *est* $+2^m$. Quod per se patet, si in locum ipsius x et a ponimus unitatem. Tum enim est $(1+1)^m = 2^m$, veluti, in his exemplis

$$2^1 = 1+1$$
$$2^2 = 1+2+1 = 4$$
$$2^3 = 1+3+3+1 = 8$$
$$2^4 = 1+4+6+4+1 = 16$$
$$2^5 = 1+5+10+10+5+1 = 32.$$

$$2^{10} = 1+10+45+120+210+252+210+120+45+10+1 = 10$$

ubi recordandum est, Coëfficientem Potestatis x^m esse *unitatem* (§. 16.).

Si autem ponimus $x=1$ in Potestate $(x-1)^m$, erit $(1-1)^m = 0$, id est Summa Coëfficientium, qui habent signum $+$, aequalis est Summae Coëfficientium, qui habent signum $-$; ut $(1-1)^4 = 1-4+6-4+1 = 0$.

Si autem ponimus $x=10$, erit $(x+1)^m = 11^m$, atque igitur facili Additione invenimus diversas Potestates hujus numeri 11, veluti

$121 = 11^2$	15	16
$1331 = 11^3$	10	15
$14641 = 11^4$	1051	20
		1561
	$161051 = 11^5$	
		$1771561 = 11^6$

17

17	18
21	28
35	56
35	70
2171	56
———	2881
$19487171 = 11^7$	———
	$214358881 = 11^8$, caet.

§. 116. *Coroll.* 11.

Alia autem horum Coëfficientium binomialium proprietas multo majoris momenti atque usus in eo consistit, quod *indicant*, *quot Producta duorum*, *trium*, *quatuor*, *quinque* ... m *Factorum ex* m *numeris effici possint.* Id ita esse nos docent ea, quae dicta sunt §. 107 et 108. Veluti Coëfficientes Potestatis $(x+1)^5$ designant, esse 5 numeros, atque ex his *quinque* numeris posse effici 10 Producta *duorum*, 10 Producta *trium*, 5 Producta *quatuor*, atque unum Productum *quinque* numerorum. Quod quidem nos ducit ad *Combinationes* et *Permutationes* numerorum, eamque partem Arithmetices, quam *artem combinatoriam* dicunt, qua maxime nititur *calculus probabilitatis.*

§. 117. *Coroll.* 12.

Memorabilis imprimis etiam est *nexus inter hos Coëfficientes binomiales*, quem docet §. 108. *Quilibet enim Coëfficiens* p*timi termini Potestatis* m+1 *aequalis est Summae duorum Coëfficientium Potestatis antecedentis* m, quorum alter est terminus p, alter est terminus antecedens $p-1$.

Nam

Nam secundum §. 108, si $a=1$ erit $n=1$, atque

$$A'=A+1$$
$$B'=B+A$$
$$C'=C+B.$$
$$\vdots$$
$$Q'=Q+P.$$

Ita quartus Coëfficiens in Potestate septima (35) est Summa tertii et quarti Coëfficientis in Potestate sexta (15+20).

Quare *Coefficientes binomiales* numeri $(x\pm a)^{m+1}$ *Additione reperiuntur ex Coëfficientibus numeri* $(x\pm a)^m$. Id nos ducit ad *doctrinam Serierum* quae dicitur. Numeri enim, qui se subsequuntur, juxta certam quandam legem communem facti, dicuntur *formare Seriem quandam*, cujus sint *termini*. Simplicissima hujus generis Series numerorum est, quae *naturalis* vocatur, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 ...; ubi quilibet terminus consequens ex antecendente oritur, addita unitate. Hi termini etiam possunt esse *partes alicujus Quanti*, idque Quantum tum dicitur esse *resolutum* sive *evolutum in Seriem*.

§. 118. *Coroll.* 13.

Ex hac proprietate Coëfficientium alia sequitur. Nam *qui sunt in eadem linea verticali*, *oriuntur ex Additione eorum*, *qui sunt in ea*, *quae proxime antecedit*. Ita Coëfficientes in his lineis verticalibus sunt

In

In *prima*	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
secunda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
tertia	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
quarta	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
quinta	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
sexta	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
septima	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376
octava	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824
nona	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582
decima	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960
undec.	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184759	352716
duodec.	1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432.

Ut haec Additio etiam appareat in prima Serie, quae est unitatum, cogitandum est, quamlibet Seriem incipere a nota *o*.

Nu-

Numeri in ptima linea verticali iidem sunt, atque in ptima linea horizontali. Ita in tertia linea verticali atque horizontali idem sunt numeri 1, 3, 6, 10 .... Si lineae obliquae ducuntur ab unitate in aliqua linea verticali ad unitatem in linea horizontali ejusdem ordinis, hae transeunt Coëfficientes binomiales, ut 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; caet.

§. 119. *Coroll.* 14.

Sit proposita universe Potestas $(x \pm a)^m$, ubi m est quilibet numerus integer positivus, primum perspicuum est, eam constare ex $m+1$ terminis (§. 106). Coëfficientes deinde incipiunt ab unitate atque desinunt in unitatem. Si m est numerus impar, atque igitur numerus terminorum $m+1$ par est, in duas partes numero aequales dividitur, quarum prior pars terminorum eosdem habet Coëfficientes, atque posterior. Si m est numerus par, idem fit; sed cum numerus terminorum $m+1$ impar sit, in duas partes numero aequales dividi nequit, sed relinquitur *terminus quidam medius*, cujus Coëfficiens semel tantum in Serie reperitur. Ita termini medii Potestatum $(a+x)^2$, $(a+x)^4$, $(a+x)^6$, $(a+x)^8$, $(a+x)^{10}$, sunt $2ax$, $6a^2x$, $20a^3x^3$, $70a^4x^4$, $252a^5x^5$, in quibus a et x habent Exponentes aequales.

§. 120. *Coroll.* 15.

x et a prorsus eodem modo insunt Seriei (§. 114.) quod per se patet, quoniam $(x+a)^m = (a+x)^m$, at-

atque igitur a Potestate x^m atque a Potestate a^m ex lubitu incipere possumus. Primus terminus habet x^m, secundus x^{m-1}, atque ita Exponens m unitate continuo diminuitur, ita ut penultimus terminus habeat simplicem x (ultimus est $x^0 = 1$. Possumus enim pro unitate scribere x^0, quoniam $x^0\,x^m = x^{m+0} = x^m$). Idem fit in Potestate a^m, sed ordine inverso. Ultimus terminus habet a^m, penultimus a^{m-1}; antepenultimus a^{m-2}, atque ita Exponens m in hoc regressu continuo unitate diminuitur, ita ut secundus terminus habeat simplicem a, (atque primus $a^0 = 1$). Quare etiam in quolibet termino Summa Exponentium ipsorum x atque a, est $= m$.

Omnes termini Potestatis $(x+a)^m$ sunt positivi, sed terminus Potestatis $(x-a)^m$ est positivus, si a, quem continet, habet Exponentem parem; negativus vero, si habet Exponentem imparem, cujus ratio patet ex §. 101. Ex quo fit, ut termini Potestatis $(x-a)^m$ per vices sint positivi et negativi.

§. 121. *Coroll.* 16.

In locum ipsius x et a, etiam possunt poni Potestates, veluti:

1. $(x^m \pm 1)^2 = x^{2m} \pm 2x^m + 1$
2. $(x^m \pm 1)^3 = x^{3m} \pm 3x^{2m} + 3x^m \pm 1$.

Ve-

Veluti si $m=2$, atque $x=10$, erit

$(101)^2=10000+201=10201$

$99^2=10001-200=9801$

$(101)^3=1000000+30000+301=1030301.$

3. $(x^m \pm x^n)^2 = x^{2m} \pm 2x^{m+n} + x_{2n}.$

4. $(x^m \pm a^m)^2 = x^{2m} \pm 2x_m a^m + a_{2m}.$

5. $(x^m \pm a^m)^3 = x^{3m} \pm 3x^{2m}a^m + 3x^m a^{2m} \pm a^{3m}.$

6. $(2x^m \pm 3x^n)^3 = 8x^{3m} \pm 36x^{2m+n} + 54x^{m+2n} \pm 27x^{3n}.$

7. $(3-2x^2)^6 = 729 - 2916x^2 + 4860x^4 - 4320x^6 + 2160x^8 - 576x^{10} + 64x^{12}$

8. $(5a^2c^2d - 4ab^2d^2)^4 = 625a^8c^8d^4 - 2000a^7b^2c^6d^5 + 2400a^6b^4c - 1280a^5b^6c^2d^7 + 256a^4b^8$

9. $(5-4x^4)^4 = 625 - 2000x^4 + 2400x^8 - 1280x^{12} + 256x^{16}.$

10. $\left(\overset{3}{(x+y)} + \overset{2}{(x+2y)}\right)^2 = \overset{6}{(x+y)} + 2\overset{3}{(x+y)}\overset{2}{(x+2y)} + \overset{4}{(x+2y)}.$ ubi singuli termini in suas Series resolvi possunt, eo modo, ut explicatum est §. 114. Series Potestatum $(x+y)^3$ et $(x+2y)^2$ inter se multiplicantur, ut praescriptum est §. 104.

§. 122. *Coroll.* 17.

Ex §. 114. etiam facile reperiuntur Differentiae et Summae diversarum Potestatum Binomiorum $(x+a)^m$ et $(x-a)^m$, veluti

1. $(x+a)^2 + (x-a)^2 = 2(x^2+a^2).$
2. $(x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax.$
3. $(x+a)^3 + (x-a)^3 = 2x^3 + 6a^2x.$
4. $(x+a)^3 - (x-a)^3 = 2a(a^2+3x^2).$
5. $(x+a)^4 + (x-a)^4 = 2(x^4+6a^2x^2+a^4).$
6. $(x+a)^4 - (x-a)^4 = 8ax(x^2+a^2).$

Si in hisce posuerimus $x=10$, atque $a=1$, erit

$11^2+9^2 = 2.101 = 202$ $\quad$ $11^2-9^2=40$

$11^3+9^3 = 2060$ $\quad$ $11^3-9^3 = 2(301) = 602$

$11^4+9^4 = 2.(10601) = 21202.$ $\quad$ $11^4-9^4 = 80.101 = 8080.$

§. 123. *Coroll.* 18.

Imprimis commemorandae sunt *Differentiae Potestatum numerorum*, qui in Serie (§. 117.) aliqua progrediuntur, quoniam earum natura ex Coëfficientibus Potestatum Binomii $(x+a)^m$ cognoscitur. Quo melius res ipsa intelligatur, ponamus numeros A, B, C, D, E, F ... atque quaeramus eorum Differentias.

Sit $B-A=p'$ $\quad$ $E-D=s'$

$C-B=q'$ $\quad$ $F-E=t'$

$D-C=r'$ $\quad$ caet.

Designentur Differentiae Differentiarum p', q', r', s', t ... literis p'', q'', r'', s'' ... atque harum Differentiae literis p''', q''', r''', s''', et ita deinceps. Ergo

$q'-p'=p''=C-2B+A$

$r'-q'=q''=D-2C+B$

$s'-r'=r''=E-2D+C$

$t'-s'=s''=F-2E+D$ caet. Deinde

$q''-p''=p'''=D-3C+3B-A$

$r''-q''=q'''=E-3D+3C-B$

$s''-r''=r'''=F-3E+3D-C$ caet.

tum $q'''-p'''=p^{IV}=E-4D+6C-4B+A$,

$r'''-q'''=q^{IV}=F-4E+6D-4C+B$. caet.

atque $q^{IV}-p^{IV}=p^{V}=F-5E+10D-10C+5B-A.$ caet.

$p', q, r', s' \ldots$ dicuntur *primae* Differentiae $p'', q'', r'', s'' \ldots$ *secundae*, quae igitur sunt Differentiae Differentiarum; $p''', q''', r''' \ldots$ Differentiae *tertiae*; $p^{VI}, q^{VI} \ldots$ Differentiae *quartae* atque ita deinceps.

Ex his statim perspicitur, *in his Differentiis Coëfficientes numerorum* $A, B, C, D \ldots$ *esse ipsos Coëfficientes binomiales*, ita ut v. c. *sexta* Differentia sit:

$$p^{VI} = H - 7G + 21F - 35E + 35D - 21C + 7B - A.$$

adeo ut *hae Differentiae per Coëfficientes binomiales definiantur.*

Rursus ex Differentiis, atque ex primo numero A innotescunt numeri ipsi. Etenim

$A = A$

$B = p' + A$

$C = p'' + 2B - A = p'' + 2p' + A$

$D = p''' + 3C - 3B + A = p''' + 3p'' + 3p' + A$

$E = p^{IV} + 4D - 6C + 4B - A = p^{IV} + 4p''' + 6p'' + 4p' + A.$

In quibus Seriebus etiam sunt Coëfficientes binomiales, ut etiam in his:

$p' = p'$

$q' = C - B = p'' + p'$

$r' = D - C = p''' + 2p'' + p'$

$s' = E - D = p^{IV} + 3p''' + 3p'' + p'$

$t' = F - E = p^{V} + 4p^{IV} + 6p''' + 4p'' + p'$, caet.

Possumus etiam consequentem terminum indicare per Summam proxime antecedentis termini, atque Differentiarum:

$=p'+A$
$=q'+B=p''+p'+B.$
$=r'+C=q''+q'+C=p'''+p''+q'+C.$
$=s'+D=r''+r'+D=q'''+q''+r'+D=p^{IV}+p'''+q''+r'+D.$
$=t'+E=s''+s'+E=r'''+r''+s'+E=q^{IV}+q'''+r''+s'+E$
$=p^{V}+p^{IV}+q'''+r''+s'+E.$
$=p^{VI}+p^{V}+q^{IV}+r'''+s''+t'+F.$

Si primae Differentiae sunt aequales, id est, si
$p'=q'$ ... ergo $p''=q''$ ... $=o$, erit
$B=p'+A$
$C=p'+B=2B-A.$
$D=p'+C$; caet.

Si secundae Differentiae sunt aequales, id est, si
$p''=q''=r''$ ... ergo $p'''=q'''$ ... $=o$, erit
$D=p''+q'+C$
$E=p''+r'+D$, caet.

Si tertiae Differentiae aequales sunt, erit
$E=p'''+q''+r'+D$
$F=p'''+r''+s'+E$, caet.

Si quartae Differentiae aequales sunt, erit
$F=p^{IV}+q'''+r''+s'+E$
$G=p^{IV}+r'''+s''+t'+F.$

Quare singuli termini reperiuntur ex Summa antecedentis termini, atque Differentiarum, ita quidem, ut, ad reliquos cognoscendos, requiratur cognitio duorum priorum terminorum A, B, si primae Differentiae sunt aequales; cognitio trium priorum A, B, C, si secundae; quatuor priorum A, B, C, D, si tertiae Differentiae sunt aequales, et ita deinceps.

Ejusmodi numerorum Series, quorum aut primae aut secundae aut tertiae ... *mtimae* Differen-

rentiae inter se aequales sunt, dicuntur *Series Arithmeticae*. Series Arithmeticae *simplices* sunt, ubi primae Differentiae inter se aequales sunt, ut Series numerorum naturalis 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... ubi prima Differentia est unitas. In Seriebus autem

1. 3. 5. 7. 9. 11.

1. 4. 7. 10. 13. 16.

prima Differentia est 2, 3.

Reliquae Series Arithmeticae dicuntur esse *majoris ordinis*, ita quidem, ut series sit *secundi*, *tertii*, *quarti* ... *mtimi* ordinis, si Differentiae *secundae*, *tertiae*, *quartae* ... sunt aequales. In his referendae sunt, quae oriuntur ex Coëfficientibus binominalibus, indicatae §. 118., ubi Series in secunda linea verticali est *numerorum naturalis*, quorum primae Differentiae aequales sunt unitati. Qui sunt in *tertia* linea verticali *secundam*, qui in *quarta*, *tertiam*, qui in *quinta*, *quartam* ... Differentiam habent aequalem. In his omnibus ultima Differentia est unitas.

Exemplo sit *quinta* linea verticalis, in qua *quintae* Differentiae aequales sunt unitati. Requiruntur igitur 5 numeri priores, ut reliqui reperiantur

1 (A), 5 (B), 15 (C), 35 (D), 70 (E),
4 (p'), 10 (q'), 20 (r'), 35 (s'),
6 (p''), 10 (q''), 15 (r''),
4 (p'''), 5 (q'''),
1 (p^{IV}),

ergo $F = 1 + 5 + 15 + 35 + 70 = 126$.

Er-

Ergo quemlibet numerum terminorum reperire possumus, continuando Seriem unitatum atque Summam duorum numerorum, qui sunt in eadem linea verticali, ponendo in linea superiore horizontali, velut:

1 . 5 . 15 . 35 . 70 . 126 . 210 . 330 . 495.
4 . 10 . 20 . 35 . 56 . 84 . 120 . 165.
6 . 10 . 15 . 21 . 28 . 36 . 45.
4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9.
1 . 1 . 1 . 1 . 1.

§. 124. *Coroll.* 19.

Ejusmodi Series suppeditant Potestates numerorum, veluti

Nu-

Numeri in Serie naturali		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.
Secunda Potestas eorum	$A, B, C \ldots$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100.
Primae Differentiae	$p', q', r' \ldots$	3	5	7	9	11	13	15	17	19.	
Secundae . . .	$p'' = q'' = r'' \ldots$	2	2	2	2	2	2	2	2.		
Tertia Potestas eorum	$A, B, C \ldots$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.
Primae Differentiae	$p', q', r' \ldots$	7	19	37	61	91	127	169	217	271.	
Secundae . . .	$p'', q'', r'' \ldots$	12	18	24	30	36	42	48	54.		
Tertiae . .	$p''' = q''' = r''' \ldots$	6	6	6	6	6	6	6.			
Quarta Potestas eorum	$A, B, C \ldots$	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000
Primae Differentiae	$p', q', r' \ldots$	15	65	175	369	671	1105	1695	2465	3439.	
Secundae . . .	$p'', q'', r'' \ldots$	50	110	194	302	434	590	770	974.		
Tertiae . . .	$p''', q''', r''' \ldots$	60	84	108	132	156	180	204.			
Quartae . . .	$p^{IV} = q^{IV} = r^{IV} \ldots$	24	24	24	24	24	24.				

Hoc

Hoc exemplum memorabilem horum numerorum nos docet proprietatem. Nam sumta eorum, secunda, tertia, quarta ... Potestate, secundae, tertiae, quartae ... Differentiae erunt inter se aequales, atque 2, 6, 24. Si ita pergimus, inveniemus quintas, sextas ... Differentias quintae, sextae ... Potestatis esse inter se aequales, atque 120. 720 ... Cum autem $6=2.3$; $24=2.3.4$; $120=2.3.4.5$; $720=2.3.4.5.6$. Analogia duce concludimus *mtimas Differentias mtimae Potestatis* esse $2.3.4.5.6.7 \ldots m$.

Ea, quae didicimus de Potestate Binomii $(a+x)$, non solum haec confirmant, sed etiam legem generaliorem docent, quae ad omnium numerorum, quorum Differentiae aequales sunt, referatur Potestes.

Sit enim proposita Series numerorum:
$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ a+5b,\ a+6b \ldots$
cujus quilibet terminus consequens est b unitatibus major, quam antecedens; A, B, C, D ... sint ipsorum secundae Potestates.

$$
\begin{array}{ll}
A=a^2 & \text{ergo } p'=2ab+b^2 \\
B=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 & q'=2ab+3b^2 \\
C=(a+2b)^2=a^2+4ab+4b^2 & r'=2ab+5b^2 \\
D=(a+3b)^2=a^2+6ab+9b^2 & s'=2ab+7b^2 \\
E=(a+4b)^2=a^2+8ab+16b^2 \text{ caet.} & \text{caet.}
\end{array}
$$

$$\text{ergo } p''=q''=r'' \ldots =2b^2.$$

Ergo quicunque sit numerus a, a quo incipiat Series, atque quaecunque sit Differentia b, secundae Differentiae omnes sunt $2b^2$.

Si

Si $A, B, C, D \ldots$ designant tertias Potestates, erit

$A = a^3$

$B = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$C = (a+2b)^3 = a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

$D = (a+3b)^3 = a^3 + 9a^2b + 27ab^2 + 27b^3$

$E = (a+4b)^3 = a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$ caet.

Ergo $p' = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad p'' = 6ab^2 + 6b^3$

$q' = 3a^2b + 9ab^2 + 7b^3$ $\qquad q'' = 6ab^2 + 12b^3$

$r' = 3a^2b + 15ab^2 + 19b^3$ $\qquad r'' = 6ab^2 + 18b^3$ caet.

$s' = 3a^2b + 21ab^2 + 37b^3$ caet. $\qquad p''' = q''' \ldots = 6b^3$.

Ergo tertiae Differentiae omnes sunt $2 . 3 . b^3$.

Si $A, B, C, D \ldots$ indicant quartas Potestates, erit

$A = a^4$

$B = (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$C = (a+2b)^4 = a^4 + 8a^3b + 24a^2b^2 + 32ab^3 + 16b^4$

$D = (a+3b)^4 = a^4 + 12a^3b + 54a^2b^2 + 108ab^3 + 81b^4$

$E = (a+4b)^4 = a^4 + 16a^3b + 96a^2b^2 + 256ab^3 + 256b^4$

$F = (a+5b)^4 = a^4 + 20a^3b + 150a^2b^2 + 500ab^3 + 625b^4$

Quare

$p' = 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$q' = 4a^3b + 18a^2b^2 + 28ab^3 + 15b^4$

$r' = 4a^3b + 30a^2b^2 + 76ab^3 + 65b^4$

$s' = 4a_3b + 42a^2b^2 + 148ab^3 + 175b^4$

$t' = 4a^3b + 54a^2b^2 + 244ab^3 + 369b^4$.

Atque $p'' = 12a^2b^2 + 24ab^3 + 14b^4$ $\qquad p''' = 24ab^3 + 36$

$q'' = 12a^2b^2 + 48ab^3 + 50b^4$ $\qquad q''' = 24ab^3 + 60$

$r'' = 12a^2b^2 + 72ab^3 + 110b^4$ $\qquad r''' = 24ab^3 + 90$

$s'' = 12a^2b^2 + 96ab^3 + 194b^4$ $\qquad$ ergo $p^{IV} = q^{IV} = 24$

Ergo Analogia duce concludimus, omnes Diffe-

ren-

rentias mtimas mtimarum Potestatum esse $2 . 3 \ldots m . b^m$, ubi b indicat Differentiam Seriei primitivae, id est numerorum primae Potestatis. In numeris Seriei naturalis est $b = 1$, ergo $b^m = 1$.

Quoniam igitur pro a et b quoslibet numeros eligere possumus, ponamus $a = 10$, atque $b = 10$, ergo $2b^2 = 200$, $6b^3 = 6000$, $24b^4 = 240000$.

Numeri sint		11	21	31	41	51	61	71
Secunda Potestas eorum	$A, B, C \ldots$	121	441	961	1681	2601	3721	5041
Primae Differentiae	$p', q', r' \ldots$	320	520	720	920	1120	1320	
Secundae	$p'' = q'' = r'' \ldots$	200	200	200	200	200		
Tertia Potestas eorum	$A, B, C \ldots$	1331	9261	29791	68921	132651	226981	357911
Primae Differentiae	$p', q', r' \ldots$	7930	20530	39030	63730	94330	130930	
Secundae	$p'', q'', r'' \ldots$	12600	18600	24600	30600	36600		
Tertiae	$p''' = q''' = r''' \ldots$	6000	6000	6000	6000			
Quarta Potestas eorum	$A, B, C \ldots$	14641	194481	923521	2825761	6765201	13845841	25411681
Primae Differentiae	$p', q', r', \ldots$	179840	729040	1902240	3939440	7080640	11565840	
Secundae	$p'', q'', r'', \ldots$	549200	1173200	2037200	3141200	4485200		
Tertiae	$p''', q''', r''', \ldots$	624000	864000	1104000	1344000			
Quartae	$p^{IV} = q^{IV} = r^{IV}, \ldots$	240000	240000	240000				

R

§. 125.

§. 125. *Coroll.* 20.

Potestates Binomii viam nobis sternunt, ad reperiundas Potestates Polynomiorum, quae plures quam duos habent terminos.

I. Sint reperiundae *Potestates Trinomii* $a+b+c$. Ponatur $b+c=p$; ergo

$$(a+b+c)^2=(a+p)^2=a^2+2ap+p^2=a^2+2a(b+c)$$
$$+(b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2.$$

atque $(a+b+c)^3=(a+p)^3=a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

atque eodem modo aliae reperiuntur Potestates.

II. Ex his colliguntur eadem ratione *Potestates Quadrinomii* $a+b+c+d$. Ponatur $b+c+d=p$; ergo $(a+b+c+d)^2=(a+p)^2=a^2+2ap+p^2=a^2+2a(b+c+d)+(b+c+d)^2=a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+c^2+d^2+2bc+2bd+2cd$; atque eodem modo aliae Potestates. Ita quidem ope Substitutionum Potestates Polynomiorum $m+1$ terminorum reperiuntur ex Potestatibus Polynomiorum, quibus sunt m termini.

Hoc modo computari possunt Potestates expositae in hisce tabulis, quae sunt:

1. Septem priores *Trinomii* $a+bx+cx^2$.

2. Quinque priores *Quadrinomii* $a+bx+cx^2+dx^3$.

3. Novem priores duorum *Polynomiorum indefiniti numeri terminorum*; ubi Series oritur infinita, cujus octo tantum termini sunt designati, ne nimium spatii Totum occuparet.

Per

Per se intelligitur, aliquem Coëfficientem Seriei esse Summam terminorum in linea verticali conscriptorum, veluti in Serie:

$y^4 = (a+bx+cx^2+dx^3)^4 = A+Bx+Cx^2+Dx^3 \ldots,$
Coëfficiens D est
$4ab^3+4a^3d+12a^2bc.$

Caeterum, quatuor haec Serierum genera sunt formulae generales, quoniam in locum numerorum $a, b, c, d \ldots$ quilibet possunt poni numeri, integri et fracti, Potestates et Radices. Ita si quaeritur $y^5 = (a^4 + b^3x + c^2 x^2 + dx^3)^5$ pro a ponitur a^4; pro b, b^3; pro c, c^2.

Si autem proponitur:

$$y^5 = (ax + bx^2 + cx^2 + dx^2)^5$$

omnes termini cum contineant x, aequatio fit:

$$y^5 = x^5 (a + bx + cx^2 + dx^3)^5$$

atque omnes termini Potestatis:
$y^5 = (a + bx + cx^2 + dx^3)^5$ per x^5 multiplicandi sunt. Ita quidem omnes Potestates hujus generis ad eas, quas exposuimus, Series facile accommodari possunt.

Ex Potestatibus Serierum infinitarum facile reperiuntur Potestates Serierum finitarum. Nam si reperiunda est Series.
$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4)^5$, f, g, h et reliquae, quae has sequuntur, literae, ponuntur $= o$.

TA-

		x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	
y^2	a^2	$2ab$	b^2 $2ac$	$2bc$	c^2								
y^3	a^3	$3a^2b$	$3ab^2$ $3a^2c$	b^3 $6abc$	$3b^2c$ $3ac^2$	$3bc^2$	c^3						
y^4	a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$ $4a^3c$	$4ab^3$ $12a^2bc$	b^4 $6a^2c^2$ $12ab^2c$	$4b^3c$ $12abc^2$	$6b^2c^2$ $4ac^3$	$4bc^3$	c^4				
y^5	a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$ $5a^4c$	$10a^2b^3$ $20a^3bc$	$5ab^4$ $30a^2b^2c$ $10a^3c^2$	b^5 $30a^2bc^2$ $20ab^3c$	$5b^4c$ $10a^2c^3$ $30ab^2c^2$	$10b^3c^2$ $20abc^3$	$10b^2c^3$ $5ac^4$	$5bc^4$	c^5		
y^6	a^6	$6a^5b$	$15a^4b^2$ $6a^5c$	$20a^3b^3$ $30a^4bc$	$15a^2b^4$ $15a^4c^2$ $60a^3b^2c$	$6ab^5$ $60a^3bc^2$ $60a^2b^3c$	b^6 $20a^3c^3$ $90a^2b^2c^2$ $30ab^4c$	$6b^5c$ $60a^2bc^3$ $60ab^3c^2$	$15b^4c^2$ $60ab^2c^3$ $15a^2c^4$	$20b^3c^3$ $30abc^4$	$15b^2c^4$ $6ac^5$	$6bc^5$	c^6
y^7	a^7	$7a^6b$	$21a^5b^2$ $7a^6c$	$35a^4b^3$ $42a^5bc$	$35a^3b^4$ $21a^5c^2$ $105a^4b^2c$	$21a^2b^5$ $105a^4bc^2$ $140a^3b^3c$	$7ab^6$ $35a^4c^3$ $210a^3b^2c^2$ $105a^2b^4c$	b^7 $140a^3bc^3$ $210a^2b^3c^2$ $42ab^5c$	$7b^6c$ $35a^3c^4$ $210a^2b^2c^3$ $105ac^4c^2$	$21b^5c^2$ $105a^2bc^4$ $140ab^3c^3$	$35b^4c^3$ $21a^2c^5$ $105ab^2c^4$	$35b^3c^4$ $42abc^5$	$21b^2c^5$ $7ac^6$ $7bc^6$ x^{13} c^7 x^{14}

TABULA. II. $y = a + bx + cx^2 + dx^3$
Si ponitur $y^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ .... Coëfficientes sunt.

	A	B x	C x^2	D x^3	E x^4	F x^5	G x^6	H x^7	I x^8	K x^9	L x^{10}	M x^{11}	N x^{12}
y^2	a^2	$2ab$	b^2 $2ac$	$2bc$ $2ad$	c^2 $2bd$	$2cd$	d^2						
y^3	a^3	$3a^2b$	$3ab^2$ $3a^2c$	b^3 $3a^2d$ $6abc$	$3b^2c$ $3ac^2$ $6abd$	$3bc^2$ $6acd$ $3b^2d$	c^3 $3ad^2$ $6bcd$	$3c^2d$ $3bd^2$	$3cd^2$	d^3			
y^4	a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$ $4a^3c$	$4ab^3$ $4a^3d$ $12a^2bc$	b^4 $6a^2c^2$ $12a^2bd$ $12ab^2c$	$4b^3c$ $12a^2cd$ $12ab^2d$ $12abc^2$	$6b^2c^2$ $6a^2b^2$ $24abcd$ $4ac^3$ $4b^3d$	$4bc^3$ $12ac^2d$ $12abd^2$ $12b^2cd$	c^4 $12acd^2$ $6b^2d^2$ $12bc^2d$	$4c^3d$ $4ad^3$ $12bcd^2$	$6c^2d^2$ $4bd^3$	$4cd^3$	d^4
y^5	a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$ $5a^4c$	$10a^2b^3$ $20a^3bc$ $5a^4d$	$5ab^4$ $20a^3bd$ $10a^3c^2$ $30a^2b^2c$	b^5 $20a^3cd$ $30a^2bc^2$ $30a^2b^2d$ $20ab^3c$	$5b^4c$ $10a^3d^2$ $60a^2bcd$ $10a^2c^3$ $20ab^3d$ $30ab^2c^2$	$10b^3c^2$ $30a^2bd^2$ $30a^2c^2d$ $20abc^3$ $60ab^2cd$ $5b^4d$	$10b^2c^3$ $30a^2cd^2$ $60abc^2d$ $30ab^2d^2$ $5ac^4$ $20b^3cd$	$5bc^4$ $10a^2d^3$ $60abcd^2$ $10b^3d^2$ $20ac^3d$ $30b^2c^2d$	c^5 $20abd^3$ $30ac^2d^2$ $30b$[illegible]cd^2 $20bc^3d$	$5c^4d$ $20acd^3$ $30bc^2d^2$ $10b^2d^3$	$10c^3d^2$ $5ad^4$ $20bcd^3$ $+10c^2d^3x^{13}$ $+5bd^4x^{13}$ $+5cd^4x^{14}$ $+d^5x^{15}$

TAB. III. Pylonomium $y=1+ax+bx^2+cx^3+dx^4$
Si ponitur $y^n=1+Ax+Bx^2+Cx^3+D$

	A x	B x^2	C x^3	D x^4	E x^5	F x^6	
$y^2=1+$	$2a$	$2b$ a^2	$2c$ $2ab$	$2d$ $2ac$ b^2	$2e$ $2ad$ $2bc$	$2f$ $2ae$ $2bd$, c^2	$2g$ $2a$ $2b$
$y^3=1+$	$3a$	$3b$ $3a^2$	$3c$ $6ab$ a^3	$3d$ $6ac$ $3a^2b$ $3b^2$	$3e$ $6ad$ $3a^2c$ $6bc$ $3ab^2$	$3f$ $6ae$ $3a^2d$ $6bd$, $3c^2$ $6abc$, b^3	$3g$ $6a$ $3a$ $6b$ $6a$
$y^4=1+$	$4a$	$4b$ $6a^2$	$4c$ $12ab$ $4a^3$	$4d$ $12ac$ $12a^2b$ $6b^2$ a^4	$4e$ $12ad$ $12a^2c$ $12bc$ $4a^3b$ $12ab^2$	$4f$ $12ae$ $12a^2d$ $12bd$, bc^2 $4a^3c$, $6a^2b^2$ $24abc$, $4b^3$	$4g$ $12a$ $12a^2$ $12bc$ $4a^3$ $24ab$
$y^5=1+$	$5a$	$5b$ $10a^2$	$5c$ $20ab$ $10a^3$	$5d$ $20ac$ $30a^2b$ $10b^2$ $5a^4$	$5e$ $20ad$ $30a^2c$ $20bc$ $20a^3b$ $30ab^2$ a^5	$5f$ $20ae$ $30a^2d$ $20bd$ $20a^3c$, $10c^2$ $60abc$, $30a^2b^2$ $5a^4b$, $10b^3$	$5g$ $20af$ $30a^2$ $20be$ $20a^3$ $60ab$ $5a^4$
$y^6=1+$	$6a$	$6b$ $15a^2$	$6c$ $30ab$ $20a^3$	$6d$ $30ac$ $60a^2b$ $15b^2$ $15a^4$	$6e$ $30ad$ $60a^2c$ $30bc$ $60a^3b$ $60ab^2$ $6a^5$	$6f$ $30ae$ $60a^2d$ $30bd$ $60a^3c$ $120abc$ $30a^4b$ $15c^2$ $20b^3$ $90a^2b^2$ a^6	$6g$ $30a$ $60a$ $30b$ $60a$ $120a$ $30a$ $30c$ $60b$ $180a$ $6a$

$+fx^6+gx^7+hx^8$ ... ex terminis numero indefinitis constans.
$+Fx^6+Ex^7+Hx^8$ ..., hi Coëfficientes sunt.

	A x	*B* x^2	*C* x^3	*D* x^4	*E* x^5	*F* x^6	*G* x^7
$y^7 = 1 +$	$7a$	$7b$	$7c$	$7d$	$7e$	$7f$	$7g$, $210a^3b^2$
		$21a^2$	$42ab$	$42ac$	$42ad$	$42ae$	$42af$, $140ab^3$
			$35a^3$	$105a^2b$	$105a^2c$	$105a_2d$	$105a^2e$, $105ac^2$
				$21b^2$	$42bc$	$42bd$	$42be$, a^7
				$35a^4$	$105ab^2$	$140a^3c$	$140a^3d$
					$140a^3b$	$210abc$	$210abd$
					$21a^5$	$105a^4b$	$105a^4c$
						$7a^6$	$42a^5b$
						$210a^2b$	$420a^2bc$
						$35b^3$	$105b^2c$
						$21c^2$	$42cd$
$y^8 = 1 +$	$8a$	$8b$	$8c$	$8d$	$8e$	$8f$	$8g$, $560a^3b^2$
		$28a^2$	$56ab$	$56ac$	$56ad$	$56ae$	$56af$, $280ab^3$
			$56a^3$	$168a^2b$	$168a^2c$	$168a^2d$	$168a^2e$, $168ac^2$
				$28b^2$	$56bc$	$56bd$	$56be$, $8a^7$
				$70a^4$	$280a^3b$	$280a^3c$	$280a^3d$
					$168ab^2$	$336abc$	$336abd$
					$56a^5$	$280a^4b$	$280a^4c$
						$28a^6$	$168a^5b$
						$420a^2b^2$	$840a^2bc$
						$56b^3$	$168b^2c$
						$28c^2$	$56cd$
$y^9 = 1 +$	$9a$	$9b$	$9c$	$9d$	$9e$	$9f$	$9g$, $1260a^3b^2$
		$36a^2$	$72ab$	$72ac$	$72ad$	$72ae$	$72af$, $504ab^3$
			$84a^3$	$252a^2b$	$252a^2c$	$252a^2d$	$252a^2e$, $252ac^2$
				$36b^2$	$72bc$	$72bd$	$72be$, $72a^7$
				$126a^4$	$504a^3b$	$504a^3c$	$504a^3d$
					$252ab^2$	$504abc$	$504abd$
					$126a^5$	$630a^4b$	$630a^4c$
						$84a^6$	$504a^5b$
						$756a^2b^2$	$1512a^2bc$
						$84b^3$	$252b^2c$
						$36c^2$	$72cd$

TAB. IV. Poiynomium $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$
Si ponitur $y^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$

A	B x	C x^2	D x^3	E x^4	F x^5	G x^6
$y^2 = a^2$	$2ab$	$2ac$ bb	$2ad$ $2bc$	$2ae$ $2bd$ cc	$2af$ $2be$ $2cd$	$2ag$ $2bf$ $2ce$, d^2
$y^3 = a^3$	$3a^2b$	$3a^2c$ $3ab^2$	$3a^2d$ $6abc$ b^3	$3a^2e$ $6abd$ $3b^2c$ $3ac^2$	$3a^2f$ $6abe$ $3b^2d$ $6acd$ $3bc^2$	$3a^2g$ $6abf$ $3b^2e$ $6ace$, $3ad^2$ $6bcd$, c^3
$y^4 = a^4$	$4a^3b$	$4a^3c$ $6a^2b^2$	$4a^3d$ $12a^2bc$ $4ab^3$	$4a^3e$ $12a^2bd$ $12ab^2c$ $6a^2c^2$ b^4	$4a^3f$ $12a^2be$ $12ab^2d$ $12a^2cd$ $4b^3c$ $12abc^2$	$4a^3g$ $12a^2bf$ $12a^2b^2e$ $12a^2ce$ $4b^3d$ $24abcd$ $6a^2d^2$ $6b^2c^2$ $4ac^3$
$y^5 = a^5$	$5a^4b$	$5a^4c$ $10a^3b^2$	$5a^4d$ $20a^3bc$ $10a^2b^3$	$5a^4e$ $20a^3bd$ $30a^2b^2c$ $10a^3c^2$ $5ab^4$	$5a^4f$ $20a^3be$ $30a^2b^2d$ $20a^3cd$ $20ab^3c$ $30a^2bc^2$ b^5	$5a^4g$ $20a^3bf$ $30a^2b^2e$ $20a^3ce$ $20ab^3d$ $60a^2bcd$ $5b^4c$ $10a^3d^2$ $30ab^2c^2$ $10a^2c^3$
$y^6 = a^6$	$6a^5b$	$6a^5c$ $15a^4b^2$	$6a^5d$ $30a^4bc$ $20a^3b^3$	$6a^5e$ $30a^4bd$ $60a^3b^2c$ $15a^4c^2$ $15a^2b^4$	$6a^5f$ $30a^4be$ $60a^3b^2d$ $30a^4cd$ $60a^2b^3c$ $60a^3bc^2$ $6ab^5$	$6a^5g$ $30a^4bf$ $60a^3b^2e$ $30a^4ce$ $60a^2b^3d$ $120a^3bcd$ $30ab^4c$ $15a^4d^2$ $20a^3c^3$ $90a^2b^2c^2$ b^6.

$+fx^5+gx^6+hx^7$ ... ex terminis numero indefinitis constans.
$+Fx^5+Gx^6+Hx^7+Ix^8+Kx^9$ ..., hi Coëfficientes sunt,

A	*B* x	*C* x^2	*D* x^3	*E* x^4	*F* x^5	*G* x^6
$y^7=a^7$	$7a^6b$	$7a^6c$ $21a^5b^2$	$7a^6d$ $42a^5bc$ $35a^4b^3$	$7a^6e$ $42a^5bd$ $105a^4b^2c$ $21a^5c^2$ $35a^3b^4$	$7a^6f$ $42a^5be$ $105a^4b^2d$ $42a^5cd$ $140a^3b^3c$ $105a^4bc^2$ $21a^2b^5$	$7a^6g$ $42a^5bf$ $105a^4b^2e$ $42a^5ce$ $140a^3b^3d$ $210a^4bcd$ $105a^2b^4c$ $7ab^6$ $21a^5d^2$ $35a^4c^3$ $210a^3b^2c^2$
$y^8=a^8$	$8a^7b$	$8a^7c$ $28a^6b^2$	$8a^7d$ $56a^6bc$ $56a^5b^3$	$8a^7e$ $56a^6bd$ $168a^5b^2c$ $28a^6c^2$ $70a^4b^4$	$8a^7f$ $56a^6be$ $168a^5b^2d$ $56a^6cd$ $280a^4b^3c$ $168a^5bc^2$ $56a^3b^5$	$8a^7g$ $56a^6bf$ $168a^5b^2e$ $56a^6ce$ $280a^4b^3d$ $336a^5bcd$ $280a^3b^4c$ $28a^2b^6$ $28a^6d^2$ $56a^5c^3$ $420a^4b^2c^2$
$y^9=a^9$	$9a^8b$	$9a^8c$ $36a^7b^2$	$9a^8d$ $72a^7bc$ $84a^6b^3$	$9a^8e$ $72a^7bd$ $252a^6b^2c$ $126a^5b^4$ $36a^7c^2$	$9a^8f$ $72a^7be$ $252a^6b^2d$ $504a^5b^3c$ $72a^7cd$ $252a^6bc^2$ $126a^4b^5$	$9a^8g$ $72a^7bf$ $252a^6b^2e$ $504a^5b^3d$ $72a^7ce$ $504a^6bcd$ $630a^4b^4c$ $84a^3b^6$ $36a^7d^2$ $84a^6c^3$ $756a^5b^2c^2$

§. 126. Coroll. 21.

Plura sunt memorabilia in his exemplis, quorum leges in posterum explicabuntur. Hoc jam primum in promtu est, *numeros determinatos pendere ex Exponentibus literarum* a, b, c, d ...

Veluti in Tab. IV., ubicunque forma Coefficientium est p^m, numerus determinatus est *unitas*, ubi autem forma est $p^m a$, $p^m qr$, $p^m qrs$, numerus determinatus est $m+1$, $(m+1)(m+2)$, $(m+1)(m+2)(m+3)$. Ita numerus anteponendus ipsi a^3bcd, est $4.5.6=120$; sed numeri a^3b, a^3bc, a^2b, a^2bc, habent Coëfficientes 4, 20, 3, 12.

2. Si Tab. IV. pro a, b, c, d .. ponimus unitatem, oritur Series $y=1+x+x^2+x^3+x^4\ldots$, quae dici solet Series *Geometrica*, ubi quilibet terminus consequens ex antecedente oritur, multiplicato per numerum x. Potestates hujus Seriei Geometricae facile reperiuntur ex Tab. IV. veluti:

$$y^2=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+$$
$$y^3=1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+$$
$$y^4=1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+84x^6+120x^7+$$
$$y^5=1+5x+15x^2+35x^3+70x^4+126x^5+210x^6+330x^7+$$

Sed non necesse est, ulterius progrediamur. Nam iidem prodeunt numeri, qui sunt indicati p. 113. Quare ope horum numerorum, qui *numeri* dicuntur *figurati*, facile reperiuntur Potestates ejusmodi Seriei Geometricae.

3. Alii prodeunt numeri, si Series Geometrica est

est *finita*, id est, si ex definito numero terminorum constat. Ita si in Tab. II. ponimus $a=b=c=d=1$, Series est $y=1+x+x^2+x^3$, cujus Potestates sunt:

$y^2=1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$

$y^3=1+3x+6x^2+10x^3+12x^4+12x^5+10x^6+6x^7+3x^8+x^9$

$y^4=1+4x+10x^2+20x^3+31x^4+40x^5+54x^6+40x^7+31x^8$
$+20x^9+10x^{10}+4x^{11}+x^{12}$

$y^5=1+5x+15x^2+35x^3+65x^4+101x^5+135x^6+155x^7+155x^8$
$+135x^9+101x^{10}+65x^{11}+35x^{12}+15x^{13}+5x^{14}+x^{15}$.

De his Coëfficientibus idem valet, quod notatum est de Coëfficientibus binomialibus §. 119.

Summa omnium Coëfficientium Potestatis m *est* $=4^m$. Nam si x ponimus $=1$, erit $y=1+1+1+1=4$, quare

$2(1+2+3)+4=16=4^2$

$2(1+3+6+10+12)=64=4^3$

$2(1+4+10+20+31+40)+54=256=4^4$

$2(1+5+15+35+65+101+135+155)=1024=4^5$.

Idem fit, si in Tabula I. ponimus $a=b=c=1$. Tum oriuntur Potestates Seriei Geometricae $1+x+x^2$; veluti

$(1+x+x^2)^2=1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

$(1+x+x^2)^3=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$

$(1+x+x^2)^4=1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$

$(1+x+x\ )^5=1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7$
$+15x^8+5x^9+x^{10}$

$(1+x+x^2)^6=1+6x+21x^2+50x^3+90x^4+126x^5+141x^6+126x^7$
$90x^8+50x^9+21x^{10}+6x^{11}+x^{12}$

$(1+x+x^2)^7=1+7x+28x^2+77x^3+161x^4+266x^5+357x^6$
$+393x^7+357x^8+266x^9+161x^{10}+77x^{11}+28x^{12}+7x^{13}+x^{14}$.

Sum-

Summa omnium Coëfficientium Potestatis m *est* 3^m, eadem ratione, qua antea, veluti:

$3^2 = 9 = 1+2+3+2+1$

$3^3 = 27 = 2(1+3+6)+7$

$3^4 = 81 = 2(1+4+10+16)+19$, caet.

Si ponimus $a = b = 1$, sed $c = -1$, Summa omnium Coëfficientium cujuslibet Potestatis est unitas, quoniam $(1+1-1)^m = 1$.

Si ponimus $x = 10$ prodeunt Potestates numerorum 1111 et 111. Ita $(1111)^2 = 1234321$; $(111)^2 = 12321$; $(111)^3 = 1367631$, caet.

Animadv.

Quae continentur §. 105—126. eum maxime in finem exposita sunt, ut dilucide appareret, *quomodo Arithmetica universalis ex repertis nova, ex universalibus particularia*, atque, Inductione et Analogia ducibus, *ex particularibus eliciat universalia*, quamque aptae sint saepe expressiones seu formulae Arithmeticae, simplicissimis mentis actionibus repertae, ad elicienda ea, quae disciplinae fines maxime extendant. Quare non veremur, ne contra viam et rationem disciplinae peccasse videamur, quod ea jam attigerimus, et quasi praeripuerimus loca, quae postea seorsim tractanda, atque tum demum plenam lucem et extensionem accipere possunt. Immo vero haec non sunt praerepta, sed ad ea strata est via, et munita. Caeterum in iis, quae exposuimus, nihil est, quod non plane, ex principiis positis, intelligi possit.

§. 127.

§. 127. *Exempla Productorum ex Factoribus Polynomiis cujuslibet generis.*

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
$(a^m+b^m)(a^m-b^m) = a^{2m} - b^{2m}$.
Unde enunciatum: *Productum ex Summa atque Differentia duorum numerorum aequale est Differentiae Quadratorum ipsorum.*

2. Hac regula duce Productum ex Factoribus, $a+b+c$ et $a+b-c$ facile reperimus. Sit $p=a+b$, ergo $(a+b+c)(a+b-c) = (p+c)(p-c) = p^2 - c^2 = a^2+2ab+b^2-c^2 = s.(s-2c)$, si $s = a+b+c$.
Ad reperiundum Productum $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)=P$, ponatur eodem modo $p = a^2+b^2$, ergo $P = (p-ab)(p+ab) = p^2-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4 = (s-2ab)s$, si $s = a^2+ab+b^2$.
Sit $P=(a+b-c)(a-b+c)$. Ponatur $p=b-c$, ergo $P=(a+p)(a-p)=a^2-p^2=a^2-(b-c)^2=a^2-b^2-c^2+2bc = (s-2c)(s-2b)$, si $s=a+b+c$.
Sit $P=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$; Ponatur $p=a^2+2b^2$, ergo $P=(p+2ab)(p-2ab)=p^2-4a^2b^2=a^4+4b^4$.

3. $(a^2-b^2)(a-b)=(a+b)(a-b)^2=a^3-a^2b-ab^2+b^3$, et ponendo b negativum:
$(a^2-b^2)(a+b)=(a-b)(a+b)^2=a^3+a^2b-ab^2-b^3$.

4. $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=a^6+a^4b^2-a^2b^4-b^6$.

5. $(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a+b+c)=a^3-3abc+b^3+c^3$.

6. $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^8+a^6b^2+a^4b^4+a^2b^6+b^8$.

7. Sit $P=(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$. Ponatur $p=b+c$, $q=b-c$, ergo $P=(p+a)(p-a)(a+q)(a-q) = (p^2-a^2)(a^2-q^2) = a^2(p^2+q^2)-p^2q^2-a^4=2a^2(b^2+c^2) -(b^2$

$-(b^2-c^2)^2-a^4=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b$
$=s.(s-2a(s-2c)(s-2b)$, si $s=a+b+c$.

8. $P=(a+b)^2(a-b)^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$.

9. $P=(a+b)^3(a-b)^3=(a^2-b^2)^3=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$.

§. 128. *Producta formae:*

$$(a\pm b)\left(a^{m-1}\mp a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\ \ldots\right)$$

1. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.
2. $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$.
3. $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$.
4. $(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)=a^6-b^6$.

Atque universe, si m est numerus integer positivus,

5. $(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+a^{m-4}b^3\ldots+ab^{m-2}+b^{m-}$
$=a^m-$

Si ponimus b negativum, erit

6. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.
7. $(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=a^4-b^4$.
8. $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^5+b^5$.
9. $(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)=a^6-b^6$.

Atque universe, si m est *numerus par integer positivus*, erit secundum §. 101.

10. $(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-a^{m-4}b^3\ldots+ab^{m-2}-b^{m-}$
$=a^m-$

Si vero est *impar*, erit

11. $(a+b)(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\ldots-ab^{m-2}+b^{m-1})=a^m+$

Posito $b=1$, erit

12. $(a^2+a+1)(a-1)=a^3-1$.
13. $(a^3+a^2+a+1)(a-1)=a^4-1$.

$(a^4+a^3+a^2+a+1)(a-1)=a^5-1.$

$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(a-1)=a^6-1.$

Et universe, si m est numerus integer positivus,

$(a-1)(a^{m-1}+a^{m-2}+a^{m-3}\dots+a+1)=a^m-1.$

$(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1.$

$(a+1)(a^3-a^2+a-1)=a^4-1.$

$(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)=a^5+1.$

$(a+1)(a^5-a^4+a^3-a^2+a-1)=a^6-1.$

Et universe, si m est numerus par,

$(a+1)(a^{m-1}-a^{m-2}+a^{m-3}\dots+a-1)=a^m-1.$

Si vero m est numerus impar,

$(a+1)(a^{m-1}-a^{m-2}+a^{m-3}\dots-a+1)=a^m+1.$

Posito a^m pro a, erit.

$(1+a^m+a^{2m})(a^m-1)=a^{3m}-1.$ (12)

$(1+a^2+a^4)(a^2-1)=a^6-1.$

$(1-a^2+a^4)(a^2+1)=a^6+1$ (17) caet.

Posito a^2 pro a, et $2z^2$ pro b; prodit

$(a^6+2a^4z^2+4a^2z^4+8z^6)(a^2-2z^2)=a^8-16z^8$ (8).

§. 129. *De usu Multiplicationis in vita sociali.*

Varius et multiplex est Multiplicationis usus in vita sociali, ex quibus duo solum notentur:

1. Si alicujus unitatis magnitudo, pretium, vel quantitas est cognita, Multiplicatione reperitur *magnitudo, quantitas et pretium ejus Totius, quod hanc unitatem aliquoties continet.* Ita si una libra alicujus mercis constat a florenis, Multiplicatione reperitur, quot florenis constent m librae. Quaeritur enim Productum ma.

2.

2. *Multiplicatione convertimus unitates in unitates minores, seu fractas, quae in prioribus aliquoties continentur.* Ita reperimus diem, id est spatium 24 horarum, constare ex 24 . 60=1440 minutis, atque ex 1440 . 60=86400 minutis secundis. Minutum enim primum sexagies continetur in hora, minutum secundum sexagies in minuto primo. Eodem modo Multiplicatione reperimus, quot minuta secunda contineat annus vulgaris, peripheria circuli, caet.

Praecipua genera unitatum sunt Geometrica (1), eaque sunt *longitudo*, ut pes, ulna, palma; figurae planae, praecipue *Quadrata*, ut palma quadrata; corpora, imprimis *Cubi*, ut palma cubica; eae, quae ad circulum et angulos referuntur, ut gradus, minutum primum et secundum arcus, angulus rectus. His addendae sunt unitates *temporis*, ut dies; *ponderis*, ut libra; *nummorum*, ut florenus, caet.

CAPUT VI.

DE DIVISIONE NUMERORUM INTEGRORUM.

§. 130. *Definitio Divisionis.*

Si proponitur aequatio $ab=p$, ope Multiplicationis ex Factoribus a et b, Productum p reperire

(1) Vid. Prolegomena, §. 6.

tiri potest, idque, quomodo fiat, si Factores sunt numeri integri, in praecedenti Capite V. expositum fuit. Eodem modo, proposita aequatione $abcde\ldots = p'$, qualiscunque sit Factorum numerus, reperiri potest Productum p' (§. 76.). Quare Multiplicatione solvitur Problema: *Ex cognitis Factoribus reperire Productum.* Quaeri autem possit solutio Problematis inversi: *Cogniti Producti p' reperire Factores a, b, c, d ...* Quod tamen Problema, nisi ipsi adjiciuntur conditiones quaedam, quibus satis restringatur, *indeterminatum est*, sive diversas habet solutiones; id est, *plures indicari possunt Factores, qui hoc idem efficiant Productum.* Veluti numerus 72 ex diversis efficitur Factoribus integris. Nam $72 = 2.36 = 3.24 = 4.18 = 6.12 = 8.9 = 2.2.18 = 2.3.12 = 2.4.9 = 2.6.6 = 3.3.8 = 3.4.6 = 2.2.2.9 = 2.2.3.6 = 2.3.3.4 = 2.2.2.3.3.$ Quare hic numerus quinque modis ex *duobus*, 6 modis ex *tribus*, 3 modis ex *quatuor*, uno modo ex *quinque* Factoribus integris efficitur, quibus, ut Factor, non adnumerata est ipsa unitas. Infinitus autem fit Factorum numerus, si ad eos etiam admittuntur numeri fracti.

At vero Problema hujus argumenti: *Dato Producto* p *duorum Factorum, atque alterutro ejus Factore* b, *reperire alterum Factorem* a, *est determinatum*, id est unum tantum Factorem quaerendum proponit et proponere potest.

Solutio hujus Problematis est *Divisio.* Produc-

 tum

tum (p), quod datum est, *Dividendus*; Factor (b), qui datus est, *Divisor*; isque (a), qui quaeritur, *Quotus* appellatur. Solet designari Divisio, aut eodem modo, quo *Fractio* (1), subscribendo Divisorem Dividendo per lineolam transversam, aut iis interponendo duo puncta, veluti

$$a = \frac{p}{b} = p : b\,;\ x = \frac{a+b-c}{d-e+f}\,;\ x = \frac{32}{4} = 32 : 4 = 8.$$

Itaque ultima aequatio his verbis exprimitur: *8 est aequalis numero 32, diviso per 4*; vel *8 est Quotus ex 32 et 4.*

Animadv. Quo commodius Divisionis praecepta ex Multiplicationis natura hauriantur, in hac Definitione ejus notionem ab hujus notione derivavimus. Haec autem Definitio prorsus convenit cum ea, quae data est §. 65. Etenim in Proportione $A : B = \frac{n}{m} . 1$, terminus A est Productum ex Factoribus B atque $\frac{n}{m}$, atque Divisio designat duplex Problema: *invenire B ex A et $\frac{n}{m}$, atque invenire $\frac{n}{m}$ ex A et B.* Quod utrumque indicatur uno Problemate: *Ex dato Producto A duorum Factorum, atque alterutro Factore, reperire alterum Factorem.* Nam si A et B sunt numeri puri, ut in his ponimus, nihil differt, utrum B, an $\frac{n}{m}$ sit Quotus (§. 67.).

(1) Prolegom. §. 11.

§. 131.

§. 131. *Coroll.* 1.

Quoniam p ipsum ex pluribus Factoribus constare potest, Problema Divisionis magis universale hoc est: *datis omnibus Factoribus alicujus Producti cogniti, praeter unum, reperire hunc Factorem*, veluti, *proposito* $3 . 4 . x = 60$, *reperire* x. Quod duplici modo solvitur: aut deinceps dividendo per 3 et 4, aut dividendo per totum Productum 12. Etenim $3 . 4 . x = 4 . 3 . x = 12x$. (§. 74, 75, 76.)

§. 132. *Coroll.* 2.

Si $a = \frac{p}{b}$, erit $ab = p$, et $b = \frac{p}{a}$, atque si $ab = p$, erit $a = \frac{p}{b}$ et $b = \frac{p}{a}$ (§. 130). Quare *si Divisorem Quotus, aut Quotum Divisor multiplicat, Productum aequale est Dividendo*, atque *si Productum per alterutrum Factorem dividitur, Quotus est alter Factor.* Ergo et Multiplicatione et Divisione perspicitur, an Divisio; Divisione autem, an Multiplicatio rite sit peracta.

§. 133. *Coroll.* 3.

Quoniam Divisio rite est peracta, si Dividendus est Productum ex Quoto et Divisore, concludimus:

1. Si $a = \frac{p}{b}$, erit $b = \frac{p}{a}$. Quare, ut in numeris puris Multiplicator in Multiplicandum, Multipli-

plicandus in Multiplicatorem (§. 75.), ita *Quotus in Divisorem*, *Divisor in Quotum transire potest.*

2. $\frac{acb}{a} = cb$, $\frac{acb}{ac} = b$, $\frac{(ma)b}{m} = ab$, id est: *si Productum ex pluribus constans Factoribus per aliquem aut per plures hos Factores dividitur, Quotus est Productum ex reliquis Factoribus*, atque si *Factor alicujus Producti per aliquem numerum dividitur, per eundem numerum Productum dividitur.* Veluti $\frac{168}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 4 \cdot 7 = 28$ atque $\frac{28}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 2 \cdot 7 = 14$.

3. $b = \frac{ab}{a} = \frac{abc}{ac} = \frac{abcd}{acd}$; $8 = \frac{3 \cdot 8}{3} = \frac{24}{3} = \frac{72}{9}$. Quare *Quotus* (ut $\frac{ab}{a}$ et $\frac{3 \cdot 8}{3}$) *non mutatur, si uterque et Divisor et Dividendus per eundem numerum multiplicatur, vel dividitur*, atque *cujuslibet numeri Quantitas* (ut b et 8) *eadem manet, si per eundem numerum multiplicatur et dividitur.* Inter Multiplicationem igitur et Divisionem eadem intercedit ratio, atque inter Additionem et Subtractionem; ita ut haec tollat, quod illa composuit. Nam ut $a + b - b = a$, ita $\frac{ma}{m} = a$. (§. 18.)

Ex hisce etiam perspicitur ratio, cur, quemadmodum Multiplicatio Additio contracta, ita Divisio *Subtractio contracta* appelletur. Nam, ut $8 \cdot 6 = 48$ significat, Summam numeri 8 sexies sumti esse 48, ita $\frac{48}{8} = 6$ significat, nihil restare, si numerus 8 sexies a numero 48 subtrahitur.

4. Quo-

4. Quoniam (§. 100.) $+ab = (+a)(+b) = (-a)$, $(-b)$; atque $-ab = (+a)(-b) = (-a)(+b)$ sequitur

$$\frac{+ab}{+a} = +b;\ \frac{+ab}{-a} = -b;\ \frac{-ab}{+a} = -b;\ \frac{-ab}{-a} = +b.$$

Ergo *Quotus est positivus, si Dividendus et Divisor idem habent signum, sed negativus, si ipsis diversa sunt signa.* Ex quo etiam sequitur, *Quoti signum non mutari, si signa Divisoris et Dividendi simul mutantur.*

§. 134. *Coroll.* 4.

Ex comparatione duorum Quotorum $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ innotescunt praecepta Divisionis similia iis, quae §. 82—87, sunt exposita de Multiplicatione. Etenim

$a = bx$, atque $c = dy$ (§. 132.)

ergo si $a = c$, erit $bx = dy$ (§. 5.)

Si praeterea $b = d$, erit $x = y$ (§. 85.).

Ex quo concludimus:

1. *Duo Quoti* $\left(x = \frac{a}{b} \text{ et } y = \frac{c}{d}\right)$ *aequales sunt, si habent aequales Dividendos* $(a = c)$ *et Divisores* $(b = d)$; id est:

Si aequales numeros dividunt aequales numeri, Quoti sunt aequales.

Positis $a = c$, atque $b < d$, erit $x > y$ atque positis $a = c$ et $x > y$, erit $b < d$ (§. 86.); id est:

2.

2. *Si duo Quoti habent aequales Dividendos sed inaequales Divisores, minor Divisor majorem Quotum, atque major Quotus minorem indicat Divisorem*, ex quo illud praeceptum:

Si aequales numeros dividunt inaequales numeri, Quoti sunt inaequales, isque Quotus major est, cujus Divisor minor est, isque Divisor minor est, qui majorem efficit Quotum.

Si $a > c$, erit $bx > dy$ (§. 11.), atque si praeterea $b = d$, erit $x > y$, atque si $x = y$, erit $b > d$ (§. 84), id est:

3. *Si duo Quoti aequales habent Divisores sed inaequales Dividendos, major Dividendus majorem Quotum, atque major Quotus majorem indicat Dividendum*, ex quo illud praeceptum:

Si inaequales numeros dividunt aequales numeri, Quoti sunt inaequales, isque Quotus major est, ubi Dividendus major est, isque Dividendus major est, cujus Quotus major est.

Si $x = y$, atque $b = d$, erit $bx = dy$ (§. 82.), ergo $a = c$ (§. 5.), id est:

4. *Si duo Quoti aequales habent aequales Divisores, habent etiam aequales Dividendos.*

Si $a = c$, erit $bx = dy$ (§. 5.) et si praeterea $x = y$, erit $b = d$ (§. 85.) id est:

5. *Si duo Quoti aequales habent aequales Dividendos, etiam Divisores habent aequales.*

Has-

Hasce enunciationes ita designare possumus (§. 48.)

1. $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, si $a = c$, atque $d \gtrless b$.

2. $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, si $d = b$, atque $a \gtrless c$.

3. $a \gtrless c$, si $d = b$, atque $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$.

4. $d \gtrless b$, si $a = c$, atque $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$.

§. 135. *Coroll.* 5.

Si $\frac{a}{b} = x$, erit $a = bx$, ergo $am = bmx$ (§. 82.) Si hanc aequationem per b dividimus, prodit:

1. $\frac{am}{b} = mx$ (§. 134. 1).

Si Dividendum (am) et Divisorem (b) per m dividimus, prodit:

2. $\frac{a}{b : m} = mx$ (§. 133. 3).

Si autem membra aequationis $a = bx$ dividuntur per mb, prodit:

3. $\frac{a}{mb} = \frac{x}{m}$ (§. 134. 1)

Ex hisce sequuntur praecepta:

a. *Numerus, qui multiplicat Dividendum, vel dividit Divisorem, Quotum multiplicat.*

b. *Numerus, qui dividit Dividendum, vel multiplicat Divisorem, Quotum dividit.*

Quod etiam per se patet. Quo enim major est Dividendus, quoque minor est Divisor, eo major est Quotus.

c. Ut

c. *Ut Quotus per aliquem numerum multiplicetur, aut Dividendus est multiplicandus, aut Divisor est dividendus per hunc numerum.*

d. *Ut Quotus dividatur per aliquem numerum, aut Dividendus est dividendus, aut Divisor est multiplicandus per hunc numerum.*

§. 136. *Coroll.* 6.

In omni aequatione Multiplicator alterutrius membri salva veritate in Divisorem alterius membri mutari potest. Rursus *Divisor alterutrius membri in Multiplicatorem alterius mutari potest*, ut $ax = b$, ergo $x = \frac{b}{a}$; $(a+b+c)\,x = de+f$, ergo $x = \frac{de+f}{a+b+c}$ (§. 134. 1).

§. 137. *Coroll.* 7.

Productum ex duobus Quotis aequale est Producto ex eorum Dividendis, diviso per Productum ex eorum Divisoribus.

Nam si Quoti sunt $x = \frac{a}{b}$, atque $y = \frac{c}{d}$, erit $a = bx$, atque $c = dy$, ergo $ac = bxdy$ (§. 82.) ergo $\frac{ac}{bd} = xy$ (§. 134. 1.).

§. 138. *Coroll.* 8.

Quotus ex duobus Quotis aequalis est Producto ipsorum, si inversus fuerit Quotus dividens, id est,

est, si ejus Dividendus in Divisorem, Divisor in Dividendum abierit; id est, si $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, erit $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Nam $a = bx$ et $c = dy$, ergo $\frac{a}{c} = \frac{bx}{dy}$ (§. 134. 1), ergo $\frac{ad}{bc} = \frac{x}{y}$ (§. 136.).

§. 139. *Theorema.*

Quotus ex numeris exponentialibus, quibus idem est Factor, ea est Potestas hujus Factoris, cujus Exponens est Differentia Exponentium Dividendi et Divisoris, veluti

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ ubi p et q sunt numeri integri positivi, ut: $\frac{3^{12}}{3^5} = 3^7 = 2187$.

Demonstratio.

$a^p = a^{p-q+q} = a^{p-q} a^q$, ergo $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (§. 131.).

Exempla suppeditant tabulae Potestatum numerorum p. 81—84.

§. 140. *Coroll.* 1.

$$\frac{a^m a^n a^p a^q \ldots}{a^r a^s a^u a^v \ldots} = \frac{a^{m+n+p+q \ldots}}{a^{r+s+u+v \ldots}} \quad \text{§. 91.}$$

$$= a^{m+n+p+q \ldots - (r+s+u+v \ldots)}$$

veluti: $\frac{2^3 . 2^5 . 2^{12}}{2 . 2^7 . 2^8} = \frac{8 . 32 . 4096}{2 . 128 . 256} = 2^{20-16} = 2^4 = 16$

§. 141. *Coroll.* 2.

$\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0 = 1$. Ergo *quilibet numerus, cujus Exponens est o, est unitas ipsa;* de qua re jam facta est mentio §. 120.

§. 142. *Coroll.* 3.

$\frac{1}{a^p} = \frac{a^0}{a^p} = a^{0-p} = a^{-p}$; id est:

Numerus exponentialis, qui habet Exponentem negativum, indicat Quotum, cujus Dividendus est unitas, et cujus Divisor est idem numerus exponentialis, sed cum Exponente positivo.

§. 143. *Coroll.* 4.

$\frac{b}{c . a^p} = \frac{b . a^{-p}}{c} = b . c^{-1} a^{-p}$

Rursus $\frac{1}{a^{-p}} = a^p$, atque $\frac{b}{c^{-1} . a^{-p}} = bca^p$

Etenim $\frac{1}{a^{-p}} = \frac{a^p}{a^p a^{-p}}$ §. 133. 3 $= \frac{a^p}{a^0} = a^p$ (§. 141.)

Divisor itaque in Dividendum, Dividendus in Divisorem abire potest, dummodo Exponentis eorum signum mutetur. Idem valet de omni Factore Divisoris et Dividendi.

Er-

Ergo omnis Factor Divisoris potest mutari in Factorem Dividendi, atque omnis Factor Dividendi in Factorem Divisoris, dummodo Exponentis signum mutetur. Itaque

$$\frac{a^{-p}}{a^m}=\frac{1}{a^m a^p}=\frac{1}{a^{m+p}}=a^{-(p+m)}$$

$$\frac{a^p}{a^{-m}}=a^{p+m};\ \frac{a^{-p}}{a^{-m}}=a^{m-p}=\frac{1}{a^{p-m}}$$

$$\frac{a^4b^{-5}}{c^3d^{-2}}=a^4b^{-5}c^{-3}d^2=\frac{1}{a^{-4}b^5c^3d^{-2}}=\frac{a^4d^2}{c^3b^5}$$

§. 144. *Coroll.* 5.

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$ (§. 137.); $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{a^3}{b^3}$

atque universe: $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}=a^m b^{-m}=\left(a\,.\,b^{-1}\right)^m$

2. $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^2=\frac{a^p}{b^q}\cdot\frac{a^p}{b^q}=\frac{a^{2p}}{b^{2q}}=\left(a^p b^{-q}\right)^2$

$\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^3=\frac{a^p}{b^q}\cdot\frac{a^p}{b^q}\cdot\frac{a^p}{b^q}=\frac{a^{3p}}{b^{3q}}=\left(a^p b^{-q}\right)^3=a^{3p}b^{-3q}$

atque universe: $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^m=\frac{a^{pm}}{b^{qm}}=a^{pm}\,b^{-qm}=\left(a^p b^{-q}\right)^m.$

Si ponimus $b=a$, erit

3. $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^m=\frac{a^{mp}}{a^{mq}}=a^{m\,(p-q)}=a^{mp-mq}=\left(a^{p-q}\right)^m$

Ponatur $p=o$, ergo $a^p=a^o=1$, atque

4.

4. $\left(\frac{1}{a^q}\right)^m = \frac{1}{a^{mq}} = a^{-mq} = \left(a^{-q}\right)^m = \left(a^{-m}\right)^q$

ergo a^{-mq} *indicat et* q*timam Potestatem Quoti* $\frac{1}{a^m}$, *et* m*timam Potestatem Quoti* $\frac{1}{a^q}$. Confer. §. 93.

veluti: $\left(\frac{1}{2^4}\right)^5 = 2^{-20} = \left(\frac{1}{2^5}\right)^4 = \frac{1}{2^{20}}$

id est $\left(\frac{1}{16}\right)^5 = \left(\frac{1}{32}\right)^4 = \frac{1}{1048576}$ (p. 81.)

Exempla.

1. $\left(a^4 b^3 c^5 d^6\right)^{-5} = \frac{1}{a^{20} b^{15} c^{25} d^{30}} = \left(a^{-4} b^{-3} c^{-5} d^{-6}\right)^5$

2. $a^6 \left(b^4 c^3 d^4\right)^{-5} = \frac{a^6}{b^{20} c^{15} d^{20}}$

3. $\left(\frac{a^m b^{n-4} c^{-q} d^{-p}}{e^{-r} f^s}\right)^{-t} = \frac{a^{-mt} b^{-nt+4t} c^{qt} d^{pt}}{e^{frt-st}}$

$= \frac{b^{4t} c^{qt} d^{pt} f^{st}}{a^{mt} b^{nt} e^{rt}}$

4. $\left(a^2 b^3 c^4 e^5\right)^{m-3} = \frac{a^{2m} b^{3m} c^{4m} e^{5m}}{a^6\ b^9\ c^{12} e^{15}} = \frac{\left(a^2 b^3 c^4 e^5\right)^m}{\left(a^2 b^3 c^4 e^5\right)^3}$

5. $\left(-a\right)^{-2m} = \frac{1}{a^{2m}}$ (§. 101.)

6. $\left(-a\right)^{-2m+1} = -\frac{1}{a^{2m-1}}$ (§. 101.)

7. Si ponimus Seriem Geometricam, cujus quilibet terminus consequens est Quotus ex termino antecedente et Divisore constanti, velut x, haec Series habere potest terminos cum Exponentibus negativis, veluti

$$x^3,\ x^2,\ x,\ x^0,\ x^{-1},\ x^{-2},\ x^{-3},\ x^{-4}\ \ldots$$

§. 145. *Coroll. 6.*

Ergo in multiplicandis, et dividendis numeris exponentialibus atque in iis evehendis ad aliquam Potestatem, *eadem est lex Exponentium negativorum, atque positivorum.* Confer. §. 91, 93, 94.

§. 146. *Coroll. 7.*

Ut numerus exponentialis ad aliquam Potestatem, ita haec Potestas ipsa deinceps ad novam evehi potest Potestatem, ut

1. $((a^m)^{-n})^p = a^{-mnp}$
2. $((a^{-m})^n)^{-p} = a^{mnp}$
3. $((a^{-m}b^nc^{-p})^{-q})^s = a^{mqs}b^{-nqs}c^{pqs}$
4. $((-a)^4)^{-5} = \frac{1}{a^{20}}$ (§. 101.)
5. $((-a)^5)^{-3} = -\frac{1}{a^{15}}$ (§. 101.)

§. 147. *Problema.*

Monomium dividere per Monomium.

Solutio.

Haec Divisio fit secundum regulas expositas. Omnes Factores communes Divisoris et Dividendi

di tolluntur. Quare nonnullis solum id illustretur exemplis.

1. $\frac{224}{168} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{4}{3}$

2. $\frac{-81a^2bc^2}{+\ 3abc} = -27ac$

3. $\left(\frac{-64abcd}{-\ 12acd}\right)^2 = \left(\frac{16b}{3}\right)^2 = \frac{256 \cdot b^2}{9}$

4. $\left(\frac{a^{m-n}}{a^m}\right)^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np}$

5. $\frac{-216}{124} \cdot \left(\frac{a^4b^3}{a^3b}\right)^{12} = -\frac{54}{31} \cdot (ab^2)^{12} = -\frac{54}{31} a^{12} b^{24}$

6. $\frac{-12 \cdot 7^{-5}b^3}{+\ 3 \cdot 7^{-8}a^4} = -\frac{4 \cdot 7^3b^3}{a^4} = -\frac{1372b^3}{a^4}$

7. $\frac{27 \cdot (a+b)^9\,(c+d)^{-4}\,e^8}{3 \cdot (a+b)^4\,(c+d)^{-9}\,e^5} = 9 \cdot (a+b)^5\,(c+d)^5\,e^3$

8. $\frac{48a^4b^3c^2x}{6d^3e^2x} : \frac{5a^6b^4c^3x}{4d^6e^4x^3} = \frac{32d^3e^2x^2}{5a^2bc}$

9. $\frac{2x^4y^2}{5abc} : 3axy = \frac{2x^3y}{15a^2bc}$

10. $\frac{1}{8x^2y^3z^4} : \frac{1}{12xy^2z^3} = \frac{12xy^2z^3}{8x^2y^3z^4} = \frac{3}{2xyz}$

§. 148. *Theorema.*

Quotus ex Polynomio Dividendo et Monomio Divisore integro est Summa Quotorum ex singulis terminis Polynomii, divisis per Monomium, veluti $\frac{ab+ac}{a} = b+c$.

De-

Demonstratio.

Ratio perspicitur ex Multiplicatione (§. 80.). Etenim $a(b \pm c) = ab \pm ac$, id est, si $ab \pm ac$ est Dividendus, atque a est Divisor $b \pm c$ est Quotus. Atque ita de aliis.

§. 149. *Coroll.* 1.

Si Divisor non est pars aliquota terminorum Dividendi, aut ipsis est aequalis, Quoti partiales sub forma Fractionis notantur, ut: $\frac{a+b+c+d}{p} = \frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}+\frac{d}{p}$. *Idem fit, si quid restat ex Divisione, quod neque est Multiplum Divisoris, neque ei est aequale*, ut $\frac{ax^2+bx+c}{x} = ax+b+\frac{c}{x}$.

Si Divisor est Productum, fieri potest, ut Factor aliquis Divisoris sit pars aliquota Dividendi, quod si fit, Totum per hunc Factorem dividitur, ut $\frac{ab \pm ac}{am} = \frac{b}{m} \pm \frac{c}{m}$.

Idem fit, si Residuum habet aliquem Factorem communem cum Divisore ut: $\frac{ax^2+abx+ca}{ax} = x+b+\frac{c}{a}$.

Exempla

1. $\frac{30x^3 - 15ax^2 - 6a^2x}{3x} = 10x^2 - 5ax - 2a^2$.

2. $$\frac{12a^2 b^2 x - 4a^2 b^2 y + 6a^2 b^3}{-4a^2 b^2} = -3x + y - \tfrac{3}{2} b.$$

3. $$\frac{16a^m b^n c^{q+3} - 8a^{m-2} b^3 c^{n+q+2} - 12a^{m+n} b^q c^3.}{8a^m b^n c^q}$$

$$= 2c^3 - \frac{8b^3 c^{n+2}}{a^2 b^n} - \frac{3}{2} \cdot \frac{a^n b^q c^3}{b^n c^q}$$

4. $$\frac{4a^2 x^5 + 6ax^4 + 8ax^3 + 2ax^2}{6ay^3 + 12y^2 z} \quad \frac{ax^2}{3y^2}$$

$$= \frac{2ax^3 + 3x^2 + 4x + 1}{ay + 2z}$$

§. 150. *Coroll.* 2.

Quotus ex Polynomio et Monomio aut major aut minor est Dividendo, si Divisor minor vel major est unitate.

Sit Quotus $x = \frac{a}{b}$, ubi a est Polynomium, b Monomium. Ergo $a = bx$. Itaque si $b = 1 + c$, erit $a = x + cx$, ergo $a > x$. Sed si $b = 1 - c$, erit $a = x - cx$, atque $x = a + cx$, ergo $x > a$ (§. 10.)

Quare neque Productum semper majus est Multiplicando (§. 81.) neque Quotus semper minor est Dividendo. *Si Multiplicator et Divisor sunt unitate minores, Productum minus est Multiplicando, atque Quotus major est Dividendo.* Tum autem improprie dicitur Multiplicatio et Divisio. Cujus rei ratio haec est. Multiplicatio per numerum unitate minorem est conjuncta actio multiplicandi et dividendi, ubi numerus, qui dividit, major est quam numerus, qui multiplicat. Eadem con-

conjuncta actio est in Divisione per numerum unitate minorem, ubi tamen dividens numerus minor est, quam multiplicans.

§. 151. *Problema.*

Dividere numeros determinatos diversorum ordinum, secundum Systema Decadicum notatos, per numerum primi ordinis.

Solutio.

Theorema, §. 143. expositum, docet, singulos terminos Polynomii esse dividendos per Monomium, atque Quotos partiales in unam Summam esse congregandos. Idem faciendum est in his numeris determinatis dividendis per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, veluti:

$$\frac{144}{6}=\frac{120+24}{6}=20+4=24.$$

Ex quo explicatur hic modus dividendi, quem docet Arithmetica vulgaris:

```
6 | 144 | 20+4; qui omissis notis o fit: 6 | 144 | 24
  | 120 |                                   | 12  |
  ------                                    ------
     24                                        24
     24                                        24
     --                                        --
      0                                         0
```

Plerumque neque scribitur Productum, neque Residuum ex Quotis partialibus: ut 6 | 144 | 24.

§. 152. *Coroll.* 1.

Si quid ex Divisione restat, id adjicitur Quoto sub forma Fracti, ut 6 | 149 | $24+\frac{5}{6}$.

§. 153. Coroll. 2.

Numerus, cujus posteriores notae sunt o, per 10, 100, 1000 . . 10^m dividitur, si duae, tres, quatuor . . *m* notae o delentur. Id facilem reddit Divisionem numeri per 5, 25, 125, 625, 3125 . . . 5^m, si per hos numeros sine Residuo dividi potest. Est enim multiplicandus per 2, 4, 8, 16, 32 . . . 2^m; atque delendae sunt postremae duae, tres, quatuor, quinque . . *m* notae o, veluti:

$$\frac{400}{25} = \frac{1600}{100} = 16; \quad \frac{4000}{125} = \frac{16000}{1000} = 16;$$

$$\frac{70000}{625} = 16 \cdot 7 = 112; \quad \frac{900000}{3125} = 9 \cdot 32 = 288;$$

$$\frac{3125}{25} = \frac{12500}{100} = 125.$$

§. 154. Coroll. 3.

Quodlibet Polynomium, cujus termini aliquem habent Factorem communem, mutari potest in Productum duorum Factorum, ex quibus alter est Factor communis, alter reperitur dividendo Polynomium per hunc Factorem, veluti:

$$ax + bx - cx + x = x(a + b - c + 1).$$

Si alteruter aut uterque Factor est Polynomium, cujus termini etiam habent Factorem communem, simili ratione in Productum duorum Factorum mutari potest. Ita Polynomium in suos Factores partiri possumus; quae actio dicitur *Partitio numeri* seu *Polynomii in suos Factores*, atque diversis modis institui potest.

§. 155. *Coroll.* 4.

Ejusmodi Partitio in Factores Divisionem reddit faciliorem, si uterque et Dividendus et Divisor sunt Polynomia, cujus exemplum est:

$$\frac{ab+ac+bd+cd}{b+c}=\frac{(a+d)\,b+(a+d)\,c}{b+c}=\frac{(a+d)\,(b+c)}{b+c}=a+d.$$

Similiter reperitur:

$$\frac{6aa+7ab+2bb}{2a+b}=\frac{6aa+3ab+4ab+2bb}{2a+b}$$

$$=\frac{3a\,(2a+b)+2b\,.\,(2a+b)}{2a+b}=3a+2b.$$

§. 156. *Problema.*

Polynomium, quod Multiplum est alius Polynomii, dividere per hoc Polynomium.

Solutio.

Sit P *Polynomium dividendum*, atque p *Polynomium dividens*, atque ponatur Quotus:

$$\frac{P}{p}=A+B+C+D+E\ldots$$

Ergo $P=pA+pB+pC+pD+pE\ldots$ §. 127. 99.

$P-pA=pB+pC+pD+pE\ldots$ §. 20.

$\frac{P-pA}{p}=B+C+D+E\ldots$ §. 143. 129.

$P-pA-pB=pC+pD+pE\ldots$

$\frac{P-pA-pB}{p}=C+D+E\ldots$

Eodem modo reperitur:

$$\frac{P-pA-pB-pC}{p}=D+E\ldots$$

$P-pA$

$$\frac{P - pA - pB - pC - pD}{p} = E \ldots$$

et ita deinceps, donec Dividendus Subtractione totus evanuerit.

Hae aequationes nos ducunt ad Problematis propositi solutionem, quae est hujusmodi.

Dividendi et Divisoris terminis in justum ordinem redactis atque effectis, quae brevitas atque simplicitas expressionis praescribunt, ut id expositum fuit §. 104., primus terminus Dividendi P dividatur per primum terminum Divisoris p, ex qua Divisione prodit *primus Quotus partialis* A. Hic Quotus multiplicetur per Divisorem, idque Productum Ap subtrahatur Dividendo, adeo ut restet $P - pA$. Hujus Residui primus terminus similiter dividatur per primum terminum Divisoris, ex qua Divisione prodit *secundus Quotus partialis* B. Hunc Quotum multiplicet Divisor, idque Productum Bp auferatur a priore Residuo $P - pA$, ita ut restet $P - pA - pB$. Hoc modo pergimus in reperiundis novis Quotis partialibus, donec totum Dividendum exhaustum sit.

Animadv. Si in Dividendo et Divisore plurium sunt Potestates numerorum, nihil attinet, secundum quemnam numerum sit institutus ordo, dummodo in utroque ordinis fundamentum idem sit. Quare

$$\frac{2y^2 x^4 + (7y^3 + 4y^4) x^3 + (6y^4 + 10y^5) x^2 + (3y^6 + 4y^7) x}{x^2 + 2xy + y^2}$$

potest etiam ita inverti:

$$\frac{4xy^7 + 3xy^6 + 10x^2y^5 + (6x^2 + 4x^3)y^4 + 7x^2y^3 + 2x^4y^3}{y^3 + 2xy + x^2}.$$

Si sunt plures termini, in quibus est eadem Potestas ejus numeri exponentialis, qui ordinem constituit, hi in unum terminum sunt redigendi: ut $(a^2+bc)x^2 + (a^3+b^2c)x + (a^4+b^3c+c^4)$ uti factum est in ipso hoc exemplo proposito.

Caeterum idem erit ordo Exponentium in Quoto, qui fuerit in Dividendo et Divisore. Ita ex priore collocatione oritur Quotus $2x^2y^2+(3y^3+4y^4)x$; ex posteriore Quotus $4xy^4+3xy^3+2x^2y^2$.

§. 157. *Exempla Divisionis.*

Quaeratur Quotus $Q = \frac{24a^3+10a^2b-13ab^2-6b^3}{4a-3b} = \frac{P}{p}$.

Calculus ita instituitur:

Divid. $P = 24a^3+10a^2b-13ab^2-6b^3$		Divisor $p=4a-3b$
$pA = 24a^3-18a^2b$		Quot. $Q=6a^2(A)+7ab(B)$
$P-pA=$	$28a^2b-13ab^2-6b^3$	$+2b^2(C)$
$pB=$	$28a^2b-21ab^2$	
$P-pA-pB=$	$8ab^2-6b^3$	
$pC=$	$8ab^2-6b^3$	
$P-pA-pB-pC=$	0	

Omissis autem, quae solummodo ad illustrandum calculum pertinent, Divisio hanc habet formam:

$$\begin{array}{l|l}
24a^3+10a^2b-13ab^2-6b^3 & 4a-3b \\
24a^3-18a^2b & 6a^2+7ab+2b^2 \\
\quad 28a^2b & \\
\quad 28a^2b-21ab^2 & \\
\qquad 8ab^2 & \\
\qquad 8ab^2-6b^3 & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Ex-

Ergo $24a^3 + 10a^2b - 13ab^2 - 6b^3 = (4a - 3b)(6a^2 + 7ab + 2b^2) = (4a - 3b)(2a + b)(3a + 2b)$ (§. 155.), atque ita Dividendus in tres Factores est resolutus (§. 54).

Dividendus pauciores potest habere terminos, quam Quotus; quod tum accidit, quando termini aequales, sed contrariis signis affecti, in Multiplicatione sese mutuo sustulerunt. Hi termini in Divisione redeunt, veluti (§. 128. 4)

$$\begin{array}{l|l}
a^6 - b^6 & a - b \\
\underline{a^6 - a^5b} & \overline{a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5} \\
\quad a^5b & \\
\quad \underline{a^5b - a^4b^2} & \\
\qquad a^4b^2 & \\
\qquad \underline{a^4b^2 - a^3b^3} & \\
\qquad\quad a^3b^3 & \\
\qquad\quad \underline{a^3b^3 - a^2b^4} & \\
\qquad\qquad a^2b^4 & \\
\qquad\qquad \underline{a^2b^4 - ab^5} & \\
\qquad\qquad\quad ab^5 - b^6 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{ab^5 - b^6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Potest accidere, ut Quotus partialis sit Polynomium, ut est in hoc exemplo:

$$\begin{array}{l|l}
(a^3-1)x^3-(a^3+a^2-2)x^2+(4a^2+3a+2)x-3(a+1) & (a-1)x^2-(a-1)x+3 \\
(a^3-1)x^3-(a^3-1)x^2 \quad +3(a^2+a+1)x-3(a+1) & (a^2+a+1)x-(a+1) \\
\hline
\qquad -(a^2-1)x^2 \qquad +(a^2-1)x \qquad\qquad 0 & \\
\qquad -(a^2-1)x^2 \qquad +(a^2-1)x & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Etenim $\frac{a^3-1}{a-1}=a^2+a+1$, atque $\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$. (§. 128. 12)

Hujus generis est Quotus, quem indicavimus (§ 156. *Animadv.*), ubi Divisio est hujusmodi:

$$\begin{array}{l|l}
2y^2x^4+(7y^3+4y^4)x^3+(6y^4+10y^5)x^2+(3y^6+4y^7)x & x^2+2xy+y^2 \\
2y^2x^4+\;4y^3\;x^3 \qquad\qquad\quad 2y^5\;x^2+(3y^6+4y^7)x & 2y^2x^2+(3y^3+4y^4)x \\
\hline
0 \quad (3y^3+4y^4)x^3+(6y^4+8y^5)x^2 \qquad\qquad 0 & \\
\quad\;\; (3y^3+4y^4)x^3+(6y^4+8y^5)x^2 & \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

aut, commutato ordine terminorum,

$$\begin{array}{l|l}
4xy^7+3xy^6+10x^2y^5+(6x^2+4x^3)y^4+7x^3y^3+2x^4y^2 & y^2+2xy+x^2 \\
4xy^7+3xy^6+\;8x^2y^5+\qquad\quad 4x^3y^4+3x^4y^3+2x^4y^2 & 4xy^4+3xy^3+2x^2y^2 \\
\hline
0 \qquad 0\;+\;2x^2y^5 \quad +6x^2y^4+4x^3y^3 \qquad 0 & \\
\qquad\quad\;\; +\;2x^2y^5 \quad +6x^2y^4+4x^3y^3 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

Hu-

Hujusmodi etiam formae est Quotus:

$$\frac{12a^2 b^3 x^4 + (18a^4 b^2 + 24a^3 b^3) x^3 + (8a^5 b^2 + 6a^6 b) x^2 - (8a^7 b + 32a^6 b^2) x}{3bx^2 + 3a^2 x - 4a^3}.$$

qui est $(8a^3 b^2 + 2a^4 b) x + 4a^2 b^2 x^2$.

Possumus etiam Divisione pervenire ad Exponentes negativos, ut:

$$\frac{x^4 + (b - a^2) x^2 + (c - ab) x - ac}{x^3 - ax^2} = x + a + bx^{-1} + cx^{-2}$$
$$= x + a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}.$$

quae Divisio etiam ita institui potest, ut primum fiat per $x - a$, deinde per x^2.

Alia exempla Divisionis, eaque multa, suppeditant Producta, quae exposuimus §. 104—112. 114. 121. 122. 127. 128. Nam si aliquod Productum, quod ex duobus Factoribus constat per alterutrum Factorem dividitur, Quotus est alter Factor; sed si, ex pluribus Factoribus constans, per unum Factorem dividitur, Quotus est Productum ex reliquis Factoribus; ut:

1. $$\frac{x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24}{(x - 4)(x - 3)} = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3}$$
$= x^2 - x - 2$. Confer. §. 112. N°. 28. 11. 3.

2. $$\frac{x^4 + 4ax^3 + 6a^2 x^2 + 4a^3 x + a^4}{x^2 + 2ax + a^2} = x^2 + 2ax + a^2.$$
Confer. §. 114. N°. 4.

atque ita alia. Quare plura adjicere exempla nequaquam necesse est.

§. 158. *De Residuo ex Divisione.*

Si Divisor non est pars aliquota Dividendi aut nulla effici potest Divisio numerorum universalium,

lium, eaque solummodo notatur, aut si unus vel plures Quoti partiales reperti sunt, Residuum non amplius dividi potest, idque adjicitur Quotis sub forma Fractionis. Prius accidit, si nullus Divisoris terminus est pars aliquota ullius termini Dividendi, ut: $\frac{4a+3b-5c+7d}{2e-f}$; posterius, si unus pluresve Divisoris termini sunt partes aliquotae unius aut plurium terminorum Dividendi, neque tamen totus Divisor est pars aliquota Dividendi; quod semper fit, si aliqua litera Divisoris non inest in Dividendo, ut:

$$\frac{ap+2bp+3c+d}{a+2b+3c+4e}=p+\frac{3c+d-3pc-4pe}{a+2b+3c+4e}$$

Saepe etiam Residuum, quod Quotis adjicitur sub forma Fractionis, in seriem infinitam converti potest; de quo in sequentibus agetur.

§. 159. *Problema.*

Dividere numeros determinatos diversorum ordinum, secundum Systema Decadicum notatos, alterum per alterum.

Solutio.

Cum uterque numerus sit Polynomium, eadem est hujus Problematis solutio, atque ejus, quod propositum fuit §. 156. Quare solummodo exemplis illustranda est Methodus.

Exemplum I.

$$\begin{array}{rr|l} \text{Dividendus } P = & 156 & \text{Divisor } p = 12 \\ pA = & \underline{120} & \text{Quotus} = 10\,(A) + 3\,(B) = 13 \\ P - pA = & 36 & \\ pB = & \underline{36} & \\ P - pA - pB = & 0 & \end{array}$$

Exemplum II.

$$\begin{array}{rr|l} \text{Dividendus } P = & 3744 & \text{Divisor } p = 13 \\ pA = & \underline{2600} & \text{Quotus} = 200\,(A) + 80\,(B) + 8\,(C) \\ P - pA = & 1144 & \qquad = 288 \\ pB = & \underline{1040} & \\ P - pA - pB = & 104 & \\ pC = & \underline{104} & \\ P - pA - pB - pC = & 0 & \end{array}$$

Exemplum III.

$$\begin{array}{rr|l} \text{Dividendus } P = & 1086384 & \text{Divisor } p = 156 \\ pA = & \underline{936000} & \text{Quotus} = 6000\,(A) + 900 \\ P - pA = & 150384 & (B) + 60(C) + 4(D) = 6964. \\ pB = & \underline{140400} & \\ P - pA - pB = & 9984 & \\ pC = & \underline{9360} & \\ P - pA - pB - pC = & 624 & \\ pD = & \underline{624} & \\ P - pA - pB - pC - pD = & 0 & \end{array}$$

Ex hac atque numerorum universalium Divisione perspicuum est, *evolutionem Quoti fieri per gradus*, ut:

$$\frac{1086384}{156} = 6000 + \frac{150384}{156} = 6000 + 900 + \frac{9984}{156} = 6000 + 900 + 60$$

$$+ \frac{624}{156} = 6000 + 900 + 60 + 4$$

Si

Si notae 0 eaque, quae ad calculum illustrandum adjecta sunt, omittuntur, calculus hanc habet formam.

```
156 | 12        3744 | 13       1086384 | 156
 12 |----       26   |----       936    | 6964
--- | 13        ---- | 288      ----
 36             114             1503
 36             104             1404
 --             ---             ----
  0             104              998
                104              936
                ---              ---
                  0              624
                                 624
                                 ---
                                   0
```

Possunt etiam Dividendus sub Quoto, atque Producta partialia scribi sub Divisore, hoc modo:

```
 Divisor          6964 Quotus
  156          1086384 Dividendus
 ----
  936             1503
 1404              998
  936              624
  624                0
```

Brevior etiam redditur scriptio, *si sola Residua, non Producta, notantur*, hoc modo:

```
1086384 | 156
 1503   | 6964
  998
  624
 -----
    0
```

Si quid ex Divisione restat, id Quoto adjicitur sub forma Fractionis, eodem modo, quo in numeris universalibus (§. 149. 158.), atque in Divisione per numeros primi ordinis (§. 151.); ut:

```
148 | 12
 12 |----
--- | 12 + 4/12 = 12 + 1/3 (§. 133. 3).
 28
 24
 --
  4
```

Quo-

Quotus $12+\frac{4}{12}$ in Arithmetica vulgari sine ullo signo interposito designari solet $12\frac{4}{12}=12\frac{1}{3}$.

Si Divisor est Productum ex Factoribus integris, saepe commodius est, per hos Factores separatim dividere; ut, si 17472 dividendus est per 48, aut per 6 atque Quotus inde ortus per 8, aut per 8 atque Quotus per 6 dividatur, ut:

$$\begin{array}{rr} 8, & 17472 \\ \hline 6, & 2184 \\ \hline & 364 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 6, & 17472 \\ \hline 8, & 2912 \\ \hline & 364 \end{array}$$

$$\text{ergo } \frac{17472}{48}=364.$$

Animadv. 1. Possumus in Divisione et Multiplicatione tractare numeros determinatos ut numeros universales, ponendo x^m pro 10^m, sed animadvertendo, $10x^m$ esse x^{m+1}, veluti:

1728 est x^3+7x^2+2x+8

12 est $x+2$

$$\begin{array}{l|l} \text{ergo } x^3+7x^2+2x+8 & x+2 \text{ Divisor} \\ \underline{x^3+2x^2} & x^2+4x+4=144 \text{ Quotus} \\ \quad 5x^2+2x & \quad \underline{x+2} \\ \quad \underline{4x^2+8x} & x^3+4x^2+4x \\ \qquad 4x+8 & \quad \underline{+2x^2+8x+8} \\ \qquad \underline{4x+8} & x^3+7x^2+2x+8=1728 \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Hic autem calculus, qui in numeris Dyadicis et Dodecadicis usurpatur, si x^m ponitur pro 2^m atque 12^m, justo est longior, sed ejus facta est mentio, ut eo magis, ratione Multiplicationis et Divisionis, numerorum universalium atque determinatorum appareret convenientia.

Ani-

Animadv. 2. Exemplis Divisionis numerorum determinatorum inservire possunt tabulae Potestatum numerorum p. 81—84. Sequens Problema etiam praebet Divisionis exempla.

§. 160. *Problema.*

Mutare numerum Decadicum in Dyadicum atque Dodecadicum.

Solutio.

Si commutandus est numerus Decadicus in numerum Dyadicum, perpetuo dividatur per *duo*, donec exhaustus sit. Residua sunt diversorum ordinum numeri, atque ultimus Quotus est prima nota. Ita si annus 1832 per numerum Dyadicum est designandus, id hoc modo fieri potest.

	1832		
2,	916	restat 0,	nota primi ordinis
2,	458	. . 0	. . secundi . . .
2,	229	. . 0	. . tertii . . .
2,	114	. . 1	. . quarti . . .
2,	57	. . 0	. . quinti . . .
2,	28	. . 1	. . sexti . . .
2,	14	. . 0	. . septimi . . .
2,	7	. . 0	. . octavi . . .
2,	3	. . 1	. . noni . . .
2,	1	. . 1	. . decimi. . .

aut aliquanto brevius

	1832		
8,	229	restat 0,	nota trium priorum ordinum
2,	114	. . 1	. . quarti ordinis
2,	57	. . 0	. . quinti . . .
2,	28		

	28	. . 1	. . sexti ordinis
4,	7	. . 0	. . septimi et octavi ordinis
2,	3	. . 1	. . noni ordinis
2,	1	. . 1	. . decimi. . .

Nota igitur undecimi ordinis est 1, atque Numerus Dyadicus est 11100101000.

Si numerus Decadicus convertendus est in numerum Dodecadicum, Divisio fit per 12.

	1832		
12,	152 restat 8;	ergo haec est nota primi ordinis	
12,	12 . .	8	secundi . . .
12,	1 . .	0	tertii. . . .

Ergo numerus Dodecadicus est 1088.

Ratio per se patet. Potest universalior reddi hac contemplatione. Sit N Numerus convertendus; x numerus fundamentalis (2, 12, et quivis alius numerus); Quoti sint p, q, r, s, t ...., atque Residua a, b, c, d, e ....

ergo	$N=px+a$		$s=fx+e$
	$p=qx+b$		$r=fx^2+ex+d$
	$q=rx+c$	ex quo	$q=fx^3+ex^2+dx+c$
	$r=sx+d$	sequitur	$p=fx^4+ex^3+dx^2+cx+b$
	$s=tx+e$		$N=fx^5+ex^4+dx^3+cx^2+bx+a$
	$t=f$		

a est igitur nota primi ordinis, b secundi, c tertii, caet. Calculus procedit usque ad sexti ordinis notam, sed per se patet, eum progredi posse, quantum volumus.

Animadv. Quomodo fiat Divisio numerorum Dyadicorum et Dodecadicorum ex iis, quae dicta sunt, facile perspicitur, veluti:

Nu

```
Numeri Dyadici, Dividendus 101100100I | Divisor 11111
                           11111      | Quotus  10111
                           ------
                           110110
                            11111
                            ------
                            101110
                             11111
                             ------
                             11111
                             11111
                             ------
                                 0

Numeri Dodecadici, Dividendus 4196ω3580 | Divisor TT70
                              3Tω40     | Quotus  41T38
                              -----
                              1T2ω3
                               TT70
                               -----
                               T2335
                              ωT750
                              ------
                               27ω58
                               2Tω90
                               -----
                                7T880
                                7T880
                                -----
                                    0
```

§. 161. *Usus Divisionis in vita sociali.*

Divisionis ratio est inversa Multiplicationis, ex quo jam cernitur ejus usus, qui potissimum triplex est:

1. Si Totum a, qualecunque sit, dividendum est in m partes aequales, quaelibet pars p reperitur Divisione. Est enim $p = \frac{a}{m}$.

2. Si quaeritur, quoties pars p contineatur in Toto a, Divisio responsionem praebet. Est enim $m = \frac{a}{p}$.

3.

3. Si convertitur unitas inferior a in unitatem superiorem, quae $m$ties eam continet, fit unitas fracta $\frac{a}{m}$. Ita quidem numerus, ex inferioribus unitatibus constans, Divisione convertitur in numerum superiorum unitatum; ut 3665 Minuta prima temporis sunt $\frac{3665}{60}$ horae, vel 61 horae et 5 minuta prima, vel $\frac{61}{24}$ dies et 5 minuta prima; id est: 2 dies 13 horae et 5 minuta prima.

PARS II.

DE CONJUNCTIS HIS ACTIONIBUS ADDENDI, SUBTRAHENDI, MULTIPLICANDI ET DIVIDENDI IN TRACTANDIS NUMERIS FRACTIS, SERIEBUS ET POTESTATIBUS INDE ORTIS.

CAPUT I.

DE NATURA NUMERORUM FRACTORUM, DE IPSORUM ADDITIONE, SUBTRACTIONE, MULTIPLICATIONE ET DIVISIONE.

§. 162. *Comparatio Quoti et numeri fracti.*

Ostendimus (§. 68.) *Quotum ex Dividendo et Divisore, si sunt numeri puri, esse numerum fractum purum, cujus Numerator est Dividendus, Denominator autem Divisor.* Ergo in his investi-

tignitionibus, ubi de solis numeris puris agimus, eandem esse naturam Quoti et Fracti esse ponimus, adeo ut alter in alterius locum substitui possit. Id magis etiam patebit, si ad rationem, quae inter Dividendum et Divisorem intercedere potest, animadverterimus, recordantes, *eam esse naturam numeri fracti* $\frac{a}{b}$, *ut Denominator a indicet, in quot partes aequales divisa sit unitas;* aut *quoties unitas integra contineat unitatem fractam; Numerator* b *autem, quot partes aequales, sive unitates fractae in unam Summam sint colligendae;* adeo ut numerus fractus haberi possit *Productum ex duobus Factoribus, ex quibus alter est Numerator a, alter est unitas fracta* $\frac{1}{b}$, *quae eo minor est, quo major est Denominator* b. Unitas ipsa est aut *pura* aut *denominata.* Si est denominata, fractus est *numerus denominatus,* atque tum convenit cum Quoto denominato, qui indicat, *quanta sit pars Dividendi;* ubi Divisor designat, *quot sint partes* (§. 65.); ut $\frac{3}{4}$ floreni, id est: tres quartae partes floreni.

1. *Divisor major sit Dividendo, ut* $\frac{5}{7}$. Patet Divisionem non aliter fieri posse, nisi dividendo unitatem in 7 partes aequales, atque harum partium 5 sumendo. Est igitur hic Quotus *Fractus verus.* Quare Quotus partialis, qui ex absoluta Divisione numerorum determinatorum restat, cum

sit vere numerus fractus, Quoto integro adjicitur sub forma numeri fracti, ut $\frac{47}{8} = 5\frac{7}{8}$, quod etiam fit in numeris universalibus.

2. *Dividendus sit unitas*, ut 1 : 7. Quotus est *unitas fracta*, cujus species definitur Divisore 7.

3. *Divisor sit Dividendi pars aliquota.* Quotus est numerus integer, qui tamen formam induere potest Fracti spurii. Ita $\frac{48}{6} = 48 . \frac{1}{6} = 8 = \frac{8}{1}$. Sed *Dividendus ipse pro Numeratore*, *atque Divisor pro Denominatore haberi potest.* Nam totius Dividendi 48 pars sexta non differt ab ea Summa, quae reperitur, si unitas ipsa in 6 partes aequales dividitur, atque ejusmodi 48 partes in unam colliguntur Summam; ut fit, si $\frac{48}{6}$ habetur pro numero fracto $48 . \frac{1}{6}$.

4. Idem dicendum est, *si Divisor*, *quamquam minor Dividendo*, *non est ejus pars aliquota*, *adeo ut aliquid sit residui ex Divisione*, ut $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$, ubi Quotus constat ex numero 2, atque ex Quoto partiali sive fracto $\frac{2}{3}$. Sed Totum etiam Fracti spurii formam servare potest, quoniam $\frac{8}{3} = 8 . \frac{1}{3} = 6 . \frac{1}{3} + 2 . \frac{1}{3}$.

5. *Divisor sit aequalis Dividendo* ut $\frac{a}{a} = 1$.

Tum

Tum Quotus est Fractus, cujus quantitas est unitas ipsa integra.

6. *Dividendus et Divisor simul evanescant, ita ut Quotus sit* $\frac{o}{o}$, ut v. c. $\frac{a-a}{b-b}=\frac{o}{o}$. Hic Quotus sive Fractus est sui generis, atque per se quamlibet unitatum copiam, sive integrarum, sive fractarum designare potest. Nam $a\times o=o$, idque semper, qualiscunque sit a; ergo etiam $\frac{o}{o}=a$, quamlibet Quantitatem designat. Sed animadvertendum est, id genus Fractionis oriri, si literis seu numeris universalibus, definita tribuitur quantitas; quare ex isto Quoto, seu Fracto universali, quantitas ipsius $\frac{o}{o}$ est elicienda. Veluti si $x=a$, erit Fractus $\frac{a^4-x^4}{a-x}=\frac{o}{o}$; sed, si peragitur Divisio, prodit $\frac{a^4-x^4}{a-x}=a^3+a^2x+ax^2+x^3$; qui numerus fit $=4a^3$, si $x=a$.

Ergo si Fractus $\frac{o}{o}$ prodit ex Fracto universali $\frac{a^4-x^4}{a-x}$, ejus quantitas est $4a^3$. Sed si prodit ex Fracto $\frac{(x-a)^3}{(x-a)^2}$, erit $=o$, quoniam $\frac{(x-a)^3}{(x-a)^2}=x-a=o$; si $x=a$.

7. *Si Dividendus evanescit, neque tamen una Divisor, Fractus seu Quotus nullus est.* Nam $\frac{o}{b}=o$, qualiscunque sit b. Hic Fractus v. c. oriri po-

potest ex Fracto universali $\frac{a^4-x^4}{a+x}=\frac{o}{2x}$, si $a=x$.

8. *Si Divisor evanescit, neque tamen una Dividendus, Fractus seu Quotus est infinitus*, quod indicatur signo ∞, ut $\frac{a}{o}=\infty$ (§. 3.), veluti si in Fracto $\frac{a^4+x^4}{a-x}$ ponitur $a=x$.

Haec aequatio est symbolum aliquod, quo declaratur, eo majorem esse copiam partium aequalium Dividendi, quo minor sit pars quaelibet, *adeo ut nullus numerus definitus indicari possit, qui hanc designet copiam, si pars ipsa, sive unitas fracta, est infinite parva* (1). Nam si vere est $\frac{a}{o}=\infty$, etiam vere est $a=\infty . o$, quod absurdum videtur, si a non est $=o$. Quaelibet enim summa partium, quae nullae sunt, nulla est, etiamsi numerus partium sit infinitus.

§. 163. *Coroll. 1. Prima lex Fractorum.*

Propter hanc convenientiam Fracti et Quoti, ea, quae de Quotis exposita sunt, ad Fractos transferre licet. At vero, cum omnes Fractorum proprietates fere continuo sequantur ex ipsorum natura (indicata §. 162. ab initio), commodum esse videtur eas ex hoc fonte haurire; saltem non alienum a ratione Mathematicorum, qui saepe diver-

(1) Conf. Proleg., p. 7.

versas indicant vias, quibus ad eundem scopum sive ad eadem conclusa perveniatur.

Ex hac enim Fractorum natura continuo nascitur lex gravissima, eademque, quae est Quotorum §. 135.

Si quis numerus Numeratorem Fracti multiplicat vel dividit, Fractum ipsum multiplicat vel dividit; sed si Denominatorem multiplicat vel dividit, Fractum ipsum dividit vel multiplicat.

Animadv. Fracti Denominatorem et Numeratorem Arithmetici dicere solent *terminos Fractionis.*

§. 164. *Coroll. 2. De mutanda forma Fractionis.*

Ex hac lege sequitur alia, quae ad formam Fractionis mutandam pertinet, eaque est:

Quantitas Fracti non mutatur, si termini ejus per eundem numerum multiplicantur vel dividuntur. (Confer. §. 133.)

1. Ergo *Forma ejusdem Fracti Multiplicatione et Divisione infinitis modis mutari potest.* Quillibet numerus Fracti formam inducere potest, sive sit integer sive mixtus, ut $5 = \frac{5}{1} = \frac{15}{3}$; $2 + \frac{3}{4}$ $= \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.

2. *Fractio, divisis terminis ejus per communem Factorem, redditur simplicior,* ut $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2}$ $= \frac{a-b}{a+b}$.

3. *Si autem termini dividuntur per numerum, qui non est Factor communis, alteruter, aut uterque eorum ipse sit Fractus*, ut $\frac{11}{4} = \frac{5\frac{1}{2}}{2}$; $\frac{a^2+bc}{a+bd} = \frac{a+\frac{bc}{a}}{1+\frac{bd}{a}}$. Hunc numerum fractum, cujus alteruter, vel etiam uterque terminus est aut fractus aut mixtus ex integro et fracto, dicere solent *dupliciter fractum.* Hic autem, ut ex Divisione prodire, ita Multiplicatione utriusque termini tolli potest, ut: $\frac{a+\frac{b}{c}}{d+\frac{e}{b}} = \frac{ac+b}{cd+\frac{ce}{b}} = \frac{abc+bb.}{bcd+ec.}$

Duplex haec Fractio saepe nobis occurrit in calculo, inprimis numerorum denominatorum; veluti, cum radius fere sit pars $\frac{53}{333}$ peripheriae circuli, atque *unus gradus* sit pars $\frac{1}{360}$ peripheriae circuli, arcus 57 graduum est $= \frac{\frac{57}{360}}{\frac{53}{333}} = \frac{57 \cdot 333}{53 \cdot 360} = \frac{18981}{19080}$ pars radii. Sed arcus 58° est $= \frac{58 \cdot 333}{53 \cdot 360} = \frac{19314}{19081}$ pars radii. Cum autem prior Fractus unitate minor, posterior autem unitate major sit, sequitur, arcum 57° esse minorem, sed arcum 58° esse majorem radio Circuli.

4. *For-*

4. *Forma duorum Fractorum, quibus sunt diversi Denominatores, ita Multiplicatione utriusque termini mutari potest, ut hi Fracti eundem acquirant Denominatorem, quod fit, si uterque terminus cujusque Fracti multiplicatur per Denominatorem alterius Fracti, ita ut communis Denominator sit aequalis Producto ex duobus hisce Denominatoribus*, veluti $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, atque $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$. Hoc modo pluribus quam duobus fractis idem dari potest Denominator.

§. 165. *Coroll.* 3. *De Multiplicatione et Divisione Fractorum.*

Ex lege exposita §. 163. etiam sequitur:

1. *Multiplicatio Fracti per aliquem numerum integrum duobus fit modis; vel Numeratorem multiplicando, vel Denominatorem dividendo per hunc numerum, eodem modo*, ut *dictum est de Quotis* (§. 135.)

veluti $2 \cdot \frac{3}{4} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} = 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (§. 164. 1)

vel $2 \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{2}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$$(a+b) \cdot \frac{a^2-b^2}{5(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2(a-b)}{5(a+b)^2} = \frac{a-b}{5}$$

$$(a+b) \frac{a^2-b^2}{5(a+b)^2} = \frac{a^2-b^2}{5(a+b)} = \frac{a-b}{5}. \text{(§.127.1)}$$

2. *Divisio Fracti per aliquem numerum integrum etiam duplici modo peragitur, vel Numeratorem dividendo, vel Denominatorem multiplican-*

cando per hunc numerum, eodem modo ut dictum est de Quotis (§. 135.), veluti:

$$\frac{6}{7}:3=6.\frac{1}{7}:3=2.\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$$

vel $\frac{6}{7}:3=6.\frac{1}{7}:3=6.\frac{1}{21}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$ (§. 164. 1.)

$$\frac{a^2-b^2}{5(a+b)^2}:a+b=\frac{\frac{a^2-b^2}{a+b}}{5(a+b)^2}=\frac{a-b}{5(a+b)^2}\ (\text{§. 127. 1})$$

vel $\frac{a^2-b^2}{5(a+b)^2(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{5(a+b)^3}=\frac{a-b}{5(a+b)^2}$

3. *Fractus multiplicatus per Denominatorem fit Numerator, sed divisus per Numeratorem fit unitas fracta*, (§. 132.), veluti: si $x=\frac{a}{b}$, erit $bx=a$, atque $\frac{x}{a}=\frac{1}{b}$.

4. *Fractum* $\frac{a}{b}=a.\frac{1}{b}$ *dividere per* $\frac{1}{b}$, *idem est atque multiplicare per b;* utraque enim actione prodit a. Similiter *numerum a multiplicare per* $\frac{1}{b}$ *idem est, atque dividere per b:* utraque enim actione prodit $\frac{a}{b}$. Ergo ut nihil differt, utrum numero addatur $+b$ an subtrahatur $-b$; utrum addatur $-b$, an subtrahatur $+b$, ita etiam *perinde est dividere numerum per b, atque multiplicare per* $\frac{1}{b}$; *multiplicare per b, atque dividere per* $\frac{1}{b}$.

5. *Si Fractus* $\frac{a}{b}$ *multiplicat numerum integrum*

t, Numeratore ipsum multiplicat, Denominatore dividit, id est $\frac{a}{b}.c=\frac{ac}{b}$. Etenim $\frac{a}{b}.c=a.\frac{1}{b}.c$ $=ac.\frac{1}{b}=\frac{ac}{b}$. Ergo *nihil differt, utrum numerus integer multiplicet Fractum, an Fractus multiplicet eum numerum.* Nam $\frac{a}{b}.c=\frac{ac}{b}=c.\frac{a}{b}$.

6. *Si Fracto* $\frac{a}{b}$ *dividitur numerus integer c; Numeratore dividitur, Denominatore multiplicatur;* id est: $c:\frac{a}{b}=\frac{cb}{a}$ Etenim $c:\frac{a}{b}=c:a.\frac{1}{b}$ $=\frac{c}{a}:\frac{1}{b}=\frac{cb}{a}$ (§. 165. 4.)

Fractus invertitur, si ejus Numerator in Denominatorem, Denominator in Numeratorem transit (conf. §. 138.); ut Fractus $\frac{a}{b}$ inversus fit $\frac{b}{a}$. Cum autem $c:\frac{a}{b}=\frac{cb}{a}=c.\frac{b}{a}$ (§. 165. 5) patet, *perinde esse, dividere numerum c per Fractum* $\frac{a}{b}$, *an multiplicare per Fractum inversum* $\frac{a}{b}$.

7. *Productum ex duobus Fractis* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *est Fractus* $\frac{ac}{bd}$, *cujus Numerator et Denominator sunt Producta ex horum Fractorum Numeratoribus,*

et *Denominatoribus*. (Confer. §. 137.) Etenim
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d} = \frac{ac}{b} \cdot \frac{1}{d}$.(§. 165. 5) $= \frac{ac}{bd}$ (§. 165. 4).

8. *Productum ex pluribus quam duobus Fractis est Fractus, cujus Numerator et Denominator sunt Producta ex horum Fractorum Numeratoribus et Denominatoribus.*

Etenim $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{ace}{bdf} \cdot \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}$ et ita deinceps.

9. Rursus, *si termini alicujus Fracti sunt Producta ex pluribus Factoribus, Fractus aequalis est Producto ex aliis Fractis*, quos *partiales* vocare possumus, *quorum Numeratores et Denominatores sunt Factores hujus Numeratoris et Denominatoris.* Nihil attinet, quo ordine sumantur isti Factores. Quare idem Fractus aliis Fractis partialibus multis modis repraesentari potest, veluti:

$$\frac{ace}{bdf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{f} \cdot \frac{e}{b}$$
$$= \frac{a}{f} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{e}{d} = \frac{a}{f} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{b}.$$

$$\frac{30}{1001} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{13} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{5}{11} = \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{13}$$
$$= \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{11} = \frac{2}{13} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{7}.$$

10. *Quotus ex duobus Fractis aequalis est Producto ipsorum, si inversus fuerit Fractus dividens*, (confer. §. 138.) id est $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Ete-

Etenim $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}:c.\frac{1}{d}=\frac{a}{bc}:\frac{1}{d}$ (§. 165. 1) $=\frac{ad}{bc}$ (§. 165. 4).

§. 166. *Coroll.* 4. *De Fractione Fractionis.*

Ex producto $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}$ (§. 165. 7) innotescit id genus Fractionis, quod Arithmetici *Fractionem Fractionis* dicunt. Nam $\frac{a}{b}$ dici potest *Fractio unitatis.* Quodsi igitur in locum unitatis ponitur Fractio $\frac{c}{d}$, nascitur *Fractio Fractionis.* Quare $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ *significat Fractionem* $\left(\frac{a}{b}\right)$ *Fractionis.* $\left(\frac{c}{d}\right)$. Ita Decimetrum est pars decima unitatis, quae Metrum dicitur, ergo est *Fractio Metri.* Centimetrum est pars decima Decimetri, itaque *Fractio Decimetri*, ergo *Fractio Fractionis Metri* $=\frac{1}{10}.\frac{1}{10}$ Metri. Ita tres dies, quinque horae atque septem minuta prima sunt $\left(3+\frac{5}{24}+\frac{7}{60}.\frac{1}{24}\right)$ dies $=\left(3+\frac{5}{24}+\frac{7}{1440}\right)$ dies.

§. 167. *Coroll.* 5. *De Signo Fracti.*

Fractus est positivus, si Numerator et Denominator idem habent signum, sed negativus, si ipsis sunt signa diversa. Fractus enim $\frac{a}{b}$ est Produc-

ductum ex Numeratore a atque ex unitate fracta $\frac{1}{b}$ (§. 162.); quae est positiva vel negativa, si b est positivus vel negativus. Ut igitur Productum ex duobus Factoribus est positivum vel negativum, si Factores idem vel diversum habent signum (§. 100. c), ita Fractus est positivus vel negativus, si Denominator et Numerator idem vel diversum habent signum.

Ergo *signum Fracti non mutatur, si signa Numeratoris et Dominatoris una mutantur* (§. 133. 4.)

Animadv. Sit Fractus $y = \frac{m}{n - x}$, talis quidem, ut m et n semper eandem designent unitatum copiam, sed x mutetur, adeo ut cujusque possit esse quantitatis, atque crescat a o usque ad infinitum. Quamdiu x minor est quam n, y restat positivus, sed eo fit major, quo major fit x, atque infinite magnus, si $x = n$, aut ab n. quantitate infinite parva differt (§. 162. 8). Si x pergit crescere, ita ut fiat major, quam n, y redditur negativus, sed eo fit minor, quo magis crescit x. Possumus igitur affirmare, *y ex statu positivo transire in statum negativum, postquam fuerit infinitus; ita ut hoc infinitum sit status utrique intermedius.*

Sit autem $y = m - x$. Si $x = o$, $y = m$. Sed crescente x, diminuitur y, adeo ut fiat o, si $x = m$, atque negativus, si x fit major quam m. In hoc autem statu negativo simul cum x crescit y, eoque major fit, quo major fit x. Ergo *ex statu positi-*

vo

vo transit in negativum, sed per intermedium statum, in quo evanuit.

Ex quo concludere possumus, *ut numerus positivus mutatione alicujus partis reddatur negativus, aut ut reddatur positivus, si antea fuerit negativus, debet transire eum statum, in quo est aut infinite magnus, aut* $= o$. Ex quo tamen non sequitur, omnem numerum, qui, mutatione partium ejus, aut o aut infinite parvus redditus sit, transire ex statu negativo in positivum, aut ex statu positivo in negativum. Nam si $y = (m-x)^{2n}$, vel $= \frac{1}{(m-x)^{2n}}$ y nunquam fit negativus, etiamsi fiat $= o$ vel infinite magnus, si $m = x$. Si $y = \sqrt{(a-x)}$, y fit $= o$, si $x = a$, sed x nunquam fieri potest major quam a (Confer. §. 101. atque §. 162. 7. 8.)

§. 168. *Coroll. 6. De Potestatibus Fractorum.*

Quaecunque de Quotis, quorum Dividendi et Divisores sunt numeri exponentiales, demonstrata sunt § 139—146. valent etiam de Fractis, quorum termini sunt numeri exponentiales, ita ut Quoti ibi commemorati pro Fractis haberi possint. Quare:

1. *Numerus exponentialis, qui habet Exponentem negativum, indicat Fractum, cujus Numerator est unitas, et cujus Denominator est idem numerus exponentialis, sed cum Exponente positivo;* quod jam notatum est §. 142.

2. *De-*

2. *Denominator in Numeratorem, Numerator in Denominatorem abire potest, dummodo Exponentis signum mutetur* (§. 143.) ut $\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$.

3. *Omnis Factor Denominatoris potest mutari in Factorem Numeratoris, atque omnis Factor Numeratoris in Factorem Denominatoris, dummodo Exponentis signum mutetur* (§. 143.), ut: $\frac{2^3\ x}{3^{-4}y} = \frac{3^4\ y}{2^{-3}x}$.

4. *Fractus ad aliquam Potestatem evehitur, si termini ejus ad eam evehuntur* (§. 144.), ut: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

5. *Potestas qtima unitatis fractae* $\frac{1}{a^m}$ *eadem est, atque* mtima *Potestas unitatis fractae* $\frac{1}{a^q}$ (§. 144.), id est: $\left(\frac{1}{a^m}\right)^q = \left(\frac{1}{a^q}\right)^m$.

6. *Potestates Fractorum sequuntur eandem legem atque Potestates numerorum integrorum* (§. 145.)

§. 169. *Coroll. 7.*

Ex comparandis duobus Fractis $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ *eadem colliguntur, quae ex comparandis duobus Quotis* (§. 134.).

§. 170. *Coroll.* 8.

Perspecta numerorum fractorum natura, eorumque Multiplicatione et Divisione, comparatio eorum in-

instituti potest et numerorum integrorum. Haec comparatio primum docet.

1. Si numeri integri inter se multiplicantur et dividuntur; Productum semper majus est singulis Factoribus, Quotus Dividendo semper minor est. Quod non ita est in numeris fractis. Etenim:

a. *Productum majus vel minus est Multiplicando, si Multiplicator major vel minor est unitate* (§. 81.). Ergo *quilibet numerus, sive integer sive fractus, sive mixtus sit, Multiplicatione per Fractum verum diminuitur.*

b. *Quotus major vel minor est Dividendo, si Divisor minor vel major est unitate* (§. 150.). Ergo *quilibet numerus Divisione per fractum verum augetur.*

c. *Fractus major vel minor est Numeratore, si Denominator minor vel major est unitate* (§. 150.); ut: $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$; $\frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$.

d. *Si plures igitur Fracti veri inter se multiplicantur, quilibet Factor major est Producto*, ut: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20} < \frac{3}{4}$ et $< \frac{2}{5}$ et $< \frac{1}{2}$.

e. *Quaelibet Potestas positiva integra Fracti veri minor est quam Fractus ipse, eoque minor, quo major est Exponens*, ut: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{3}{4}$, atque $\left(\frac{3}{4}\right)^3 < \left(\frac{3}{4}\right)^2$, id est: $\frac{27}{64} < \frac{9}{16}$. Ergo haec Potestas unitate semper minor est.

Con-

Contrarium obtinet, si Potestas integra est negativa, ut: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{27^{-1}}{64^{-1}} = \frac{64}{27} > \frac{3}{4}$, atque

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}, \text{ id est } \frac{64}{27} > \frac{16}{9}.$$

f. *Quaelibet Potestas positiva integra Fracti, unitate majoris, major est hoc Fracto, eoque major, quo major est Exponens.* Ergo *est etiam unitate major*, ut: $\left(\frac{4}{3}\right)^{3} > \frac{4}{3}$, atque $> \left(\frac{4}{3}\right)^{2}$.

Contrarium obtinet, si Potestas est negativa, ut: $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} < \frac{4}{3}$, atque $< \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$; quoniam

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{64}, \text{ atque } \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{16}.$$

g. Hoc etiam ad Radices referri potest. Nam $\frac{a}{b}$ est $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^{m}$; id est, *m*tima Potestas numeri $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$. Quare si $\frac{a}{b}$ verus est fractus, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$ (ubi *m* est numerus integer positivus) est $> \frac{a}{b}$; sed, si $\frac{a}{b}$ est unitate major, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}} < \frac{a}{b}$. Contrarium fit si *m* est negativus.

Ergo *quaelibet Radix positiva Fracti veri major est quam Fractus ipse, eoque major, quo est majoris gradus* (id est quo major est *m*, aut quo minor est $\frac{1}{m}$), veluti: $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{m}} > \frac{3}{5}$; $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} > \frac{9}{16}$; $\left(\frac{2^6}{3^6}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9} > \left(\frac{2^6}{3^6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(= \frac{8}{27}\right)$.

At-

Attamen *haec Radix*, quamvis eo magis accedat ad unitatem, quo majoris est gradus atque quo minus ab unitate differt verus Fractus, *semper minor est unitate.*

Radix positiva Fracti, unitate majoris, minor est, quam Fractus ipse, eoque minor, quo est majoris gradus, veluti: $\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} < \frac{16}{9}$, $\left(\frac{3^6}{2^6}\right)^{\frac{1}{3}} \left(= \frac{9}{4}\right) < \left(\frac{3^6}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(= \frac{27}{8}\right)$.

Contrarium obtinet, si Radix est negativa. Radix enim negativa Fracti veri est Radix positiva Fracti spurii, atque Radix negativa Fracti spurii est Radix positiva Fracti veri, veluti: $\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$, atque $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$.

De hujus diversitatis ratione confer. §. 145 et 168.

§. 171. *Coroll. 9.*

Deinde perspicuum est, plurima, quae de Multiplicatione et Divisione numerorum integrorum dicta sunt, etiam valere in numeris fractis. Etenim

1. Quoniam $\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b}$, atque $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ (§. 165. 5. 7.) sequitur Theorema enunciatum §. 74: *Productum* ab *idem est sive b multiplicat a, sive*

a multiplicem b: esse etiam verum, si unus aut uterque Factor est Fractus (1). Ergo etiam enunciationes, quae ex hoc Theoremate consequuntur, (§. 75—79.) verae sunt, si numeri sunt fracti, vel ex fractis et integris compositi.

2. Sit $x = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \ldots + p + q \ldots$ atque $y = \frac{m}{n}$;

$$\text{ergo } xy = \frac{am}{bn} + \frac{cm}{dn} + \frac{me}{nf} \ldots + \frac{pm}{n} + \frac{qm}{n}.$$

Nam, ut Polynomium x multiplicetur per Fractum $\frac{m}{n}$, multiplicandum est per m, atque dividendum per n (§. 165. 5.): ergo omnes termini Polynomii multiplicandi sunt per m, atque dividendi per n (§. 80. atque §. 148.). Ergo Theorema §. 80. valet etiam de numeris fractis, vel compositis ex fractis et integris, id est: *Productum ex Polynomio et Monomio, qualescunque sunt numeri, est Summa Productorum ex Monomio atque ex singulis terminis Polynomii.*

3. Sit $x = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \ldots + p + q + \frac{3}{4}$ atque $y = \frac{m}{n}$

$$\text{ergo } \frac{x}{y} = \frac{an}{bm} + \frac{cn}{dm} + \frac{en}{fm} \ldots + \frac{pn}{m} + \frac{qn}{m} + \frac{3n}{4m}$$

Etenim, ut Polynomium x per numerum fractum $\frac{m}{n}$ dividatur, multiplicandum est per n, at-

(1) Euclides, Lib. VII. Prop. 16. id demonstrat, sed de solis numeris integris.

atque dividendum per m (§. 165. 10.). Quare omnes Polynomii termini multiplicandi sunt per n atque dividendi per m (§. 80, atque §. 148.)

Unde magis universale fit Theorema, §. 148. expositum, hujus argumenti: *Quotus ex Polynomio et Monomio, qualescunque sunt numeri, est Summa Quotorum ex Monomio atque ex singulis terminis Polynomii.*

4. Sit $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$, atque $\frac{c}{d} = \frac{r}{s}$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{ergo } aq = bp \\ \text{atque } cs = dr\end{array}\right\} \text{§. 136.}$$

unde $acqs = bdpr$ (§. 82.), atque $\frac{ac}{bd} = \frac{pr}{qs}$ (§. 136.)

vel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$ (§. 165. 9.); id est:

Si Fractos aequales multiplicant Fracti aequales, Producta sunt aequalia.

Similiter, cum sit $aq = bp$ et $cs = dr$, erit $\frac{aq}{cs} = \frac{bp}{dr}$ (§. 134. 1.) unde $\frac{ad}{bc} = \frac{ps}{qr}$ (§. 136.), vel $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{p}{q} : \frac{r}{s}$ (§. 165. 10.), id est: *si Fractos aequales dividunt Fracti aequales, Quoti sunt aequales.*

Ergo enunciationes, §. 82 et §. 134. 1. expositae, valent de quibuslibet numeris.

5. Ex §. 165 et 145. sequitur, id quod enunciatum est §. 91 et 139. de multiplicandis et dividendis numeris exponentialibus, etiam verum esse, si Factores,

res, Divisores et Dividendi, sunt numeri fracti formae $\frac{a}{b}$ et $\frac{1}{b}$, id est: si Exponentes sunt aut omnes aut ex parte negativi.

6. Cum igitur ea, quae exposita sunt §. 82. 91. 99. 134. 1. 139. 148. de quibuslibet valeant numeris, ea etiam, quae inde consequuntur, atque Multiplicationem et Divisionem numerorum integrorum spectant, ad numeros fractos sunt referenda.

§. 172. *Coroll.* 10.

Omnis Fractus universalis, in cujus Numeratore et Denominatore idem est numerus fundamentalis exponentialis, Divisione ad mixtam reduci potest formam, si summus Exponens hujus numeri fundamentalis major est in Numeratore quam in Denominatore vel in utroque aequalis est, ut:

$$\frac{x^3 + 3ax^2 + 7a^2x + 4a^3}{x^2 + 2ax + 3a^2} = x + \frac{ax^2 + 4a^2x + 4a^3}{x^2 + 2ax + 3a^2}$$
$$= x + a + \frac{2a^2x + a^3}{x^2 + 2ax + 3a^2}.$$

Ejusmodi Fractum universalem, ad imitationem numerorum fractorum determinatorum, quorum Numerator est aequalis vel major Denominatore, dicunt *Fractum spurium*. In quo autem Fracto summus Exponens numeri fundamentalis minor est in Numeratore quam in Denominatore, hunc *Fractum verum* vel *genuinum* dicunt. Id tum inprimis dicitur, quando ille numerus fundamentalis est *quantitas variabilis*, reliqui autem sunt *constantes*, adeo

adeo ut Fractus sit *Functio hujus variabilis*, id est: Quantum, cujus Quantitas pendet ex Quantitate numeri variabilis, simulque cum ea mutatur. Qui locus de Functionibus in posterum explicabitur (1).

§. 173. *Animadv.*

Ut gradus, sive dimensio definiatur Fracti, cujus Numerator et Denominator sunt aut Monomia, aut Polynomia ad aliquam Potestatem evecta (§. 79.) numerus Factorum Denominatoris subtrahendus est numero Factorum Numeratoris. Ergo Summa Exponentium, qui sunt in Denominatore, subtrahenda est Summae Exponentium in Numeratore; in quibus tamen numerorum determinatorum non habetur ratio. Ita Fractorum:

$$\frac{5a^3b^2}{6c^2d},\ \frac{7a^4b}{c^8d^2},\ \frac{9a^{-4}b^5}{c^{-4}d},\ \frac{(a+b)^8}{(c+d)^{10}},\ \frac{(a+b)^6}{(c+d)^4},\ \frac{a}{b},\ \frac{a^3}{b^3}$$

grad. sunt 2, -5, 4, -2, 2, 0, 0.

Si terminis Fractionis insunt Radices, Exponens fractus gradum indicat; ut $a^{\frac{1}{3}}$ habet gradum $\frac{1}{3}$, quoniam Productum $a^{\frac{1}{3}}\,a^{\frac{1}{3}}\,a^{\frac{1}{3}} = a'$, habet primum gradum. Quare Fractorum

$$\frac{(a+b)^{\frac{1}{m}}}{(c+d)^{\frac{1}{n}}},\ \frac{(a+b)^{-\frac{1}{m}}}{(c+d)^{-\frac{1}{n}}},\ \frac{(a+b)^{\frac{n}{m}}}{(+d)^{2}},\ \frac{(a+b)}{(c+d)^{\frac{n}{m}}}$$

gradus sunt $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$, $\frac{n}{m}-2$, $1-\frac{n}{m}$.

Si

(1) Confer. **Euler** Introductio in Analysin infinitorum, pag. 23.

Si in Fracto est Quantitas variabilis, dimensio Fracti aestimatur ex Exponente hujus Quantitatis. Quare Fractus $\frac{a^3 x^6}{x^2}$ est quarti gradus.

§. 174. *Theorema.*

Si $a=b$, erit $a^m=b^m$, atque si $a^m=b^m$, erit $a=b$; qualiscunque sit Exponens m, positivus, negativus, integer vel fractus.

Demonstratio.

1. Sit $a=b$; ergo $a^2=b^2$, $a^3=b^3$, caet. (§. 82.); ergo universe $a^m=b^m$, ubi m est positivus integer; ergo $\frac{1}{a^m}=\frac{1}{b^m}$ (§. 134. 1.), id est $a^{-m}=b^{-m}$ (§. 142.). Ergo vera est enunciatio, si Exponens est integer positivus et negativus.

Si autem $a^{\frac{n}{m}}$ non est $=b^{\frac{n}{m}}$, sit $a^{\frac{n}{m}}=b^{\frac{n}{m}}\pm c=b^{\frac{n}{m}}$ $\left(1\pm\frac{c}{b^{\frac{n}{m}}}\right)$, ergo $\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m=\left(b^{\frac{n}{m}}\left(1\pm\frac{c}{b^{\frac{n}{m}}}\right)\right)^m$

id est $a^n=b^n\left(1\pm\frac{c}{b^{\frac{n}{m}}}\right)$, sed $a^n=b^n$, quod demonstratum est; ex quo sequatur necesse est $\frac{c}{b^{\frac{n}{m}}}=0$ id est $c=0$, ergo $a^{\frac{n}{m}}=b^{\frac{n}{m}}$. Ex quo etiam sequitur $\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=\frac{1}{b^{\frac{n}{m}}}$ vel $a^{-\frac{n}{m}}=b^{-\frac{n}{m}}$.

Ergo vera est etiam enunciatio, si Exponens est fractus positivus et negativus.

2. Sit $a^m = b^m$, qualiscunque sit exponens m. Ponamus a non esse $= b$, sed esse $= b \pm c = b\left(1 \pm \frac{c}{b}\right)$; ergo $a^m = b^m \left(1 \pm \frac{c}{b}\right)^m$ qualiscunque sit m. (§. 174. 1.) Sed $a^m = b^m$, ergo $1 = \left(1 \pm \frac{c}{b}\right)^m$ quod esse nequit, nisi $c = o$, ergo $a = b$.

Quare, *si duo numeri sunt aequales, eorum Potestates et Radices ejusdem nominis, sive sunt positivae, sive negativae, etiam aequales sunt. Rursus si hae Potestates vel Radices aequales sunt, numeri ipsi sunt aequales.*

§. 175. *De Numerorum universalium Divisoribus. Definitio.*

Numerus dicitur *esse divisibilis*, aut dividi posse per aliquem numerum, si, per hunc numerum divisus, totus exhauritur, adeo ut nullum sit Residuum. Quod igitur fit in numeris universalibus, aut si omnes termini Quoti sunt integri, aut inter terminos fractos nullus reperitur, qui, ad simplicissimam formam redactus, habeat Denominatorem, qui sit vel ipse Divisor, vel aliquis Factor ejus. Quare $ax + \frac{b}{c} x$ est divisibilis per x, sed non per ax. Priore enim Divisione prodit $a + \frac{b}{c}$, posteriore autem $1 + \frac{b}{ca}$; ubi in Denominatore

tore est a, qui est Factor Divisoris ax. Divisores numeri $2x+\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}$ sunt x, atque $a+b$, quoniam Quoti sunt $2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, atque $x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Sed $a+b$ non est divisibilis neque per a, neque per b. Quoti enim sunt $1+\frac{b}{a}$, atque $1+\frac{a}{b}$. Ergo omnis Divisor Producti est Factor ejus, sed non omnis Factor est Divisor. Factores numeri $a+b$, sunt a et $1+\frac{b}{a}$, quoniam ex eorum Multiplicatione prodit $a+b$; sed a non est Divisor. Multi Mathematici ad hanc differentiam non satis attendisse videntur. Nam si Divisores numerorum universalium solos dicunt Factores, non omnes Multiplicatores et Multiplicandi Factores appellandi sunt.

Exempla nobis praebent Divisores, qui prodeunt ex Radicibus Aequationum (§. 110—112.). Etenim si Radices Aequationis: $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + Mx + N = o.$, sunt $a, b, c, d \ldots$, Divisores sunt $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, $(x-d) \ldots$

Ita Divisores Polynomii: $x^4-8x^3+17x^2+2x-24$, sunt $(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)$; sed Polynomii: $x^2+(3a-\frac{2b}{6})x-\frac{1}{6}ab$, Divisores sunt $(x+\frac{a}{2})$ et $(x-\frac{b}{3})$.

Ad

Ad hos etiam referendi sunt Divisores Binomii $1+x^m$, atque $1-x^m$ (partim secundum §. 128. si ponimus $a=1$, atque $b=x^2$), veluti:

$^4 = (1+x^2+px)(1+x^2-px)$, ubi $p = \sqrt{2}$. Ex quo, ponendo $px = x\sqrt{2}$ in locum ipsius x, prodit.

$x^4 = (1+2x+2x^2)(1-2x+2x^2)$. (§. 127. 2.)

$^6 = (1+x^2)(1-x^2+x^4) = (1+x^2)(1+x^2+px)(1+x^2-px)$, ubi $p = \sqrt{3}$. (§. 128. 21.)

Aut, ponendo $x\sqrt{3}$ in locum ipsius x,

$7x^6 = (1+3x^2)(1-3x^2+9x^4) = (1+3x^2)(1+3x+3x^2)(1-3x+3x^2)$.

$^8 = (1+x^2+px)(1+x^2-px)(1+x^2+qx)(1+x^2-qx)$, bi $p = (2+\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$; $q = (2-\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$.

$x^{10}) = (1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8) = (1+x^2)(1+x^2+px)$ $+x^2-px)(1+x^2+qx)(1+x^2-qx)$, ubi $p = (\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$, $= (\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$.

$x^{12}) = (1+x^2+px)(1+x^2-px)(1+x^2+qx)(1+x^2-qx)$ $+x^2+rx)(1+x^2-rx)$, ubi $p = \sqrt{2}$; $q = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$, $= (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$.

$x^4 = (1-xx)(1+xx)$.

$-x^6) = (1-xx)(1+x^2+x^4)$.

$-x^8) = (1-xx)(1+xx)(1+x^4) = (1-xx)(1+xx)(1+x^2+px)(1+x^2-px)$, ubi $p = \sqrt{2}$.

Ex quo ponendo $px = x\sqrt{2}$ in locum ipsius x, prodit:

$16x^8 = (1-2x^2)(1+2x^2)(1+2x+2x^2)(1-2x+2x^2)$.

$-x^{16}) = (1-xx)(1+xx)(1+x^4)(1+x^8)$, caet. (1)

Alios

(1) Conf. Johannis Bernoulli Opera T. IV. N°. CLIX. p. 58 seqq. Euler, (Introd. in Analysin Infinitorum

Alios Divisores Polynomiorum praebet §. 127 et 128.

§. 176. *De Divisoribus numerorum determinatorum atque de Numeris primis.*

Magnus inprimis hujus notionis *Divisibilitatis* usus est in numeris determinatis integris, qui igitur tum per alium numerum determinatum integrum sunt divisibiles, quando Quotus, ex hac Divisione ortus, est numerus integer. Quare si de integris agitur numeris, ita ut Quoti et Factores fracti non admittantur, omnis Factor alicujus numeri integri est ejus Divisor. Ita 60 decem habet Divisores, qui sunt 2. 3. 4. 5. 6. 10. 12. 15. 20. 30, ubi Quoti $\frac{60}{2} = 30$, $\frac{60}{3} = 20$, caet. sunt iidem numeri, sed inverso ordine.

Sunt tamen alii, qui nullum habent Divisorem (nam *unitas* atque *numerus ipse* inproprie Divisores vocantur), atque hi dicuntur *Numeri primi.* Velut ex 100 prioribus numeris integris sunt hi 26 numeri primi: 1. 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. 67. 71. 73. 79. 83. 89. 97. Reliqui 74 numeri habent Divi-

rum Tom. I. p. 108 seqq.) tradit Methodum, cujus ope Factores simplices imaginarii saepe inveniri possunt; quod fit ope linearum Goniometricarum, inprimis Cosinuum.

visores ut $6=2.3$; $8=2.4$; $10=2.5$; $12=2.3.4$; $14=2.7$. Velut, quod omnibus cognitum est, *omnes numeri pares* numerum 2; omnes numeri, *qui desinunt in quinque*, hunc ipsum numerum 5; qui *desinunt in zero*, numeros 5 et 10 Divisores habent. Ex his sunt, *qui eundem Divisorem saepius continent*, quo referendi sunt Potestates numerorum, aut solae, aut cum aliis Divisoribus multiplicatae, ut $4=2^2$; $8=2^3$; $9=3^2$; $12=2^2.3$; $16=2^4=4^2$; $18=2.3^2$; $20=2^2.5$, caet. (confer. Tab. p. 81—84.)

Ex his sequitur, *omnes numeros integros, qui non sunt primi, esse Producta ex his numeris primis.* Quare omnem numerum integrum hac forma repraesentare possumus: $a^m\ b^n\ c^p\ d^q\ e^r$ .... ubi a, b, c, d, e ... sunt numeri primi; m, n, p, q, r, Exponentes integri positivi, qui possunt etiam esse o, quod si fit, Factor est ipsa unitas. Itaque, ut hac forma repraesentetur numerus 75600 $=2^4\ 3^3\ 5^2\ 7$, ponendum est $a=2$, $b=3$, $c=5$, $d=7$, $m=4$, $n=3$, $p=2$. Sed r omnesque reliqui Exponentes sunt $=o$.

Tabula haec compositionis numerorum ex numeris primis id explicabit.

For-

Forma $2^n\ 3^m\ 5^p\ 7^q\ 11^r\ 13^s\ 17^t$ . . . *numerorum integrorum, ab unitate usque ad* 1000.

1	$33=3.11$	$65=5.13$	97
2	$34=2.17$	$66=2.3.11$	$98=2.7^2$
3	$35=5.7$	67	$99=3^2.11$
$4=2^2$	$36=2^2.3^2$	$68=2^2.17$	$100=2^2.5^2$
5	37	$69=3.23$	101
$6=2.3$	$38=2.19$	$70=2.5.7$	$102=2.3.17$
7	$39=3.13$	71	103
$8=3^3$	$40=2^3.5$	$72=2^3.3^2$	$104=2^3.13$
$9=3^2$	41	73	$105=3.5.7$
$10=2.5$	$42=2.3.7$	$74=2.37$	$106=2.53$
11	43	$75=3.5^2$	107
$12=2^2.3$	$44=2^2.11$	$76=2^2.19$	$108=2^2.3^3$
13	$45=3^2.5$	$77=7.11$	109
$14=2.7$	$46=2.23$	$78=2.3.13$	$110=2.5.11$
$15=3.5$	47	79	$111=3.37$
$16=2^4$	$48=2^4.3$	$80=2^4.5$	$112=2^4.7$
17	$49=7^2$	$81=3^4$	113
$18=2.3^2$	$50=2.5^2$	$82=2.41$	$114=2.3.19$
19	$51=3.17$	83	$115=5.23$
$20=2^2.5$	$52=2^2.13$	$84=2^2.3.7$	$116=2^2.29$
$21=3.7$	53	$85=5.17$	$117=3^2.13$
$22=2.11$	$54=2.3^3$	$86=2.43$	$118=2.59$
23	$55=5.11$	$87=3.29$	$119=7.17$
$24=2^3.3$	$56=2^3.7$	$88=2^3.11$	$120=2^3 3.5$
$25=5^2$	$57=3.19$	89	$121=11^2$
$26=2.13$	$58=2.29$	$90=2.3^2.5$	$122=2.61$
$27=3^3$	59	$91=7.13$	$123=3.41$
$28=2^2.7$	$60=2^2.3.5$	$92=2^2.23$	$124=2^2.31$
29	61	$93=3.31$	$125=5^3$
$30=2.3.5$	$62=2.31$	$94=2.47$	$126=2.3^2.7$
31	$63=3^2.7$	$95=5.19$	127
$32=2^5$	$64=2^6$	$96=2^5.3$	$128=2^7$

$129=3.43$	$170=2.5.17$	211	$252=2^2.3^2.7$
$130=2.5.13$	$171=3^2.19$	$212=2^2.53$	$253=11.23$
131	$172=2^2.43$	$213=3.71$	$254=2.127$
$132=2^2.3.11$	173	$214=2.107$	$255=3.5.17$
$133=7.19$	$174=2.3.29$	$215=5.43$	$256=2^8$
$134=2.67$	$175=5^2.7$	$216=2^3.3^3$	257
$135=3^3.5$	$176=2^4.11$	$217=7.31$	$258=2.3.43$
$136=2^3.17$	$177=3.59$	$218=2.109$	$259=7.37$
137	$178=2.89$	$219=3.73$	$260=2^2.5.13$
$138=2.3.23$	179	$220=2^2.5.11$	$261=3^2.29$
139	$180=2^2.3^2.5$	$221=13.17$	$262=2.131$
$140=2^2.5.7$	181	$222=2.3.37$	263
$141=3.47$	$182=2.7.13$	223	$264=2^3.3.11$
$142=2.71$	$183=3.61$	$224=2^5.7$	$265=5.53$
$143=11.13$	$184=2^3.23$	$225=3^2.5^2$	$266=2.7.19$
$144=2^4.3^2$	$185=5.37$	$226=2.113$	$267=3.89$
$145=5.29$	$186=2.3.31$	227	$268=2^2.67$
$146=2.73$	$187=11.17$	$228=2^2.3.19$	269
$147=3.7^2$	$188=2^2.47$	229	$270=2.3^3.5$
$148=2^2.37$	$189=3^3.7$	$230=2.5.23$	271
149	$190=2.5.19$	$231=3.7.11$	$272=2^4.17$
$150=2.3.5^2$	191	$232=2^3.29$	$273=3.7.13$
151	$192=2^6.3$	233	$274=2.137$
$152=2^3.19$	193	$234=2.3^2.13$	$275=5^2.11$
$153=3^2.17$	$194=2.97$	$235=5.47$	$276=2^2.3.23$
$154=2.7.11$	$195=3.5.13$	$236=2^2.59$	277
$155=5.31$	$196=2^2.7^2$	$237=3.79$	$278=2.139$
$156=2^2.3.13$	197	$238=2.7.17$	$279=3^2.31$
157	$198=2.3^2.11$	239	$280=2^3.5.7$
$158=2.79$	199	$240=2^4.3.5$	281
$159=3.53$	$200=2^3 5^2$	241	$282=2.3.47$
$160=2^5.5$	$201=3.67$	$242=2.11^2$	283
$161=7.23$	$202=2.101$	$243=3^5$	$284=2^2.71$
$162=2.3^4$	$203=7.29$	$244=2^2.61$	$285=3.5.19$
163	$204=2^2.3.17$	$245=5.7^2$	$286=2.11.13$
$164=2^2.41$	$205=5.41$	$246=2.3.41$	$287=7.41$
$165=3.5.11$	$206=2.103$	$247=13.19$	$288=2^5.3^2$
$166=2.83$	$207=3^2.23$	$248=2^3.31$	$289=17^2$
167	$208=2^4.13$	$249=3.83$	$290=2.5.29$
$168=2^3.3.7$	$209=11.19$	$250=2.5^3$	$291=3.97$
$169=13^2$	$210=2.3.5.7$	251	$292=2^2.73$

293	$334=2.167$	$375=3.5^3$	$416=2^5.13$
$294=2.3.7^2$	$335=5.67$	$376=2^3.47$	$417=3.139$
$295=5.59$	$336=2^4.3.7$	$377=13.29$	$418=2.11.19$
$296=2^3.37$	337	$378=2.3^3.7$	419
$297=3^3.11$	$338=2.13^2$	379	$420=2^2.3.5.$
$298=2.149$	$339=3.113$	$380=2^2.5.19$	421
$299=13.23$	$340=2^2.5.17$	$381=3.127$	$422=2.211$
$300=2^2.3.5^2$	$341=11.31$	$382=2.191$	$423=3^2.47$
$301=7.43$	$342=2.3^2.19$	383	$424=2^3.53$
$302=2.151$	$343=7^3$	$384=2^7.3$	$425=5^2.17$
$303=3.101$	$344=2^3.43$	$385=5.7.11$	$426=2.3.71$
$304=2^4.19$	$345=3.5.23$	$386=2.193$	$427=7.61$
$305=5.61$	$346=2.173$	$387=3^2.43$	$428=2^2.107$
$306=2.3^2.17$	347	$388=2^2.97$	$429=3.11.13$
307	$348=2^2.3.29$	389	$430=2.5.43$
$308=2^2.7.11$	349	$390=2.3.5.13$	431
$309=3.103$	$350=2.5^2.7$	$391=17.23$	$432=2^4.3^3$
$310=2.5.31$	$351=3^3.13$	$392=2^3.7^2$	433
311	$352=2^5.11$	$393=3.131$	$434=2.7.31$
$312=2^3.3.13$	353	$394=2.197$	$435=3.5.29$
313	$354=2.3.59$	$395=5.79$	$436=2^2.109$
$314=2.157$	$355=5.71$	$396=2^2.3^2.11$	$437=19.23$
$315=3^2.5.7$	$356=2^2.89$	397	$438=2.3.73$
$316=2^2.79$	$357=3.7.17$	$398=2.199$	439
317	$358=2.179$	$399=3.7.19$	$440=2^3.5.11$
$318=2.3.53$	359	$400=2^4.5^2$	$441=3^2.7^2$
$319=11.29$	$360=2^3.3^2.5$	401	$442=2.13.17$
$320=2^6.5$	$361=19^2$	$402=2.3.67$	443
$321=3.107$	$362=2.181$	$403=13.31$	$444=2^2.3.37$
$322=2.7.23$	$363=3.11^2$	$404=2^2.101$	$445=5.89$
$323=17.19$	$364=2^2.7.13$	$405=3^4.5$	$446=2.223$
$324=2^2.3^4$	$365=5.73$	$406=2.7.29$	$447=3.149$
$325=5^2.13$	$366=2.3.61$	$407=11.37$	$448=2^6.7$
$326=2.163$	367	$408=2^3.3.17$	449
$327=3.109$	$368=2^4.23$	409	$450=2.3^2.5^2$
$328=2^3.41$	$369=3^2.41$	$410=2.5.41$	$451=11.41$
$329=7.47$	$370=2.5.37$	$411=3.137$	$452=2^2.113$
$330=2.3.5.11$	$371=7.53$	$412=2^2.103$	$453=3.151$
331	$372=2^2.3.31$	$413=7.59$	$454=2.227$
$332=2^2.83$	373	$414=2.3^2.23$	$455=5.7.13$
$333=3^2.37$	$374=2.11.17$	$415=5.83$	$456=2^3.3.19$

457	$498=2.3.83$	$539=7^2.11$	$580=2^2.5.29$
$458=2.229$	499	$540=2^2.3^3.5$	$581=7.83$
$459=3^3.17$	$500=2^2.5^3$	541	$582=2.3.97$
$460=2^2.5.23$	$501=3.167$	$542=2.271$	$583=11.53$
461	$502=2.251$	$543=3.181$	$584=2^3.73$
$462=2.3.7.11$	503	$544=2^5.17$	$585=3^2.5.13$
463	$504=2^3.3^2.7$	$545=5.109$	$586=2.293$
$464=2^4.29$	$505=5.101$	$546=2.3.7.13$	587
$465=3.5.31$	$506=2.11.23$	547	$588=2^2.3.7^2$
$466=2.233$	$507=3.13^2$	$548=2^2.137$	$589=19.31$
467	$508=2^2.127$	$549=3^2.61$	$590=2.5.59$
$468=2^2.3^2.13$	509	$550=2.5^2.11$	$591=3.197$
$469=7.67$	$510=2.3.5.17$	$551=19.29$	$592=2^4.37$
$470=2.5.47$	$511=7.73$	$552=2^3.3.23$	593
$471=3.157$	$512=2^9$	$553=7.79$	$594=2.3^3.11$
$472=2^3.59$	$513=3^3.19$	$554=2.277$	$595=5.7.17$
$473=11.43$	$514=2.257$	$555=3.5.37$	$596=2^2.149$
$474=2.3.79$	$515=5.103$	$556=2^2.139$	$597=3.199$
$475=5^2.19$	$516=2^2.3.43$	557	$598=2.13.23$
$476=2^2.7.17$	$517=11.47$	$558=2.3^2.31$	599
$477=3^2.53$	$518=2.7.37$	$559=13.43$	$600=2^3.3.5^2$
$478=2.239$	$519=3.173$	$560=2^4.5.7$	601
479	$520=2^3.5.13$	$561=3.11.17$	$602=2.7.43$
$480=2^5.3.5$	521	$562=2.281$	$603=3^2.67$
$481=13.37$	$522=2.3^2.29$	563	$604=2^2.151$
$482=2.241$	523	$564=2^2.3.47$	$605=5.11^2$
$483=3.7.23$	$524=2^2.131$	$565=5.113$	$606=2.3.101$
$484=2^2.11^2$	$525=3.5^2.7$	$566=2.283$	607
$485=5.97$	$526=2.263$	$567=3^4.7$	$608=2^5.19$
$486=2.3^5$	$527=17.31$	$568=2^3.71$	$609=3.7.29$
487	$528=2^4.3.11$	569	$610=2.5.61$
$488=2^3.61$	$529=23^2$	$570=2.3.5.19$	$611=13.47$
$489=3.163$	$530=2.5.53$	571	$612=2^2.3^2.17$
$490=2.5.7^2$	$531=3^2.59$	$572=2^2.11.13$	613
491	$532=2^2.7.19$	$573=3.191$	$614=2.307$
$492=2^2.3.41$	$533=13.41$	$574=2.7.41$	$615=3.5.41$
$493=17.29$	$534=2.3.89$	$575=5^2.23$	$616=2^3.7.11$
$494=2.13.19$	$535=5.107$	$576=2^6.3^2$	617
$495=3^2.5.11$	$536=2^3.67$	577	$618=2.3.103$
$496=2^4.31$	$537=3.179$	$578=2.17^2$	619
$497=7.71$	$538=2.269$	$579=3.193$	$620=2^2.5.31$

$621=3^3.23$	$662=2.331$	$703=19.37$	$744=2^3.3.31$
$622=2.311$	$663=3.13.17$	$704=2^6.11$	$745=5.149$
$623=7.89$	$664=2^3.83$	$705=3.5.47$	$746=2.373$
$624=2^4.3.13$	$665=5.7.19$	$706=2.353$	$747=3^2.83$
$625=5^4$	$666=2.3^2.37$	$707=7.101$	$748=2^2.11.1$
$626=2.313$	$667=23.29$	$708=2^2.3.59$	$749=7.107$
$627=3.11.19$	$668=2^2.167$	709	$750=2.3.5^3$
$628=2^2.157$	$669=3.223$	$710=2.5.71$	751
$629=17.37$	$670=2.5.67$	$711=3^2.79$	$752=2^4.47$
$630=2.3^2.5.7$	$671=11.61$	$712=2^3.89$	$753=3.251$
631	$672=2^5.3.7$	$713=23.31$	$754=2.13.29$
$632=2^3.79$	673	$714=2.3.7.17$	$755=5.151$
$633=3.211$	$674=2.337$	$715=5.11.13$	$756=2^2.3^3.7$
$634=2.317$	$675=3^3.5^2$	$716=2^2.179$	757
$635=5.127$	$676=2^2.13^2$	$717=3.239$	$758=2.379$
$636=2^2.3.53$	677	$718=2.359$	$759=3.11.23$
$637=7^2.13$	$678=2.3.113$	719	$760=2^3.5.19$
$638=2.11.29$	$679=7.97$	$720=2^4.3^2.5$	761
$639=3^2.71$	$680=2^3.5.17$	$721=7.103$	$762=2.3.127$
$640=2^7.5$	$681=3.227$	$722=2.19^2$	$763=7.109$
641	$682=2.11.31$	$723=3.241$	$764=2^2.191$
$642=2.3.107$	683	$724=2^2.181$	$765=3^2.5.17$
643	$684=2^2.3^2.19$	$725=5^2.29$	$766=2.383$
$644=2^2.7.23$	$685=5.137$	$726=2.3.11^2$	$767=13.59$
$645=3.5.43$	$686=2.7^3$	727	$768=2^8.3$
$646=2.17.19$	$687=3.229$	$728=2^3.7.13$	769
647	$688=2^4.43$	$729=3^6$	$770=2.5.7.1$
$648=2^3.3^4$	$689=13.53$	$730=2.5.73$	$771=3.257$
$649=11.59$	$690=2.3.5.23$	$731=17.43$	$772=2^2.193$
$650=2.5^2.13$	691	$732=2^2.3.61$	773
$651=3.7.31$	$692=2^2.173$	733	$774=2.3^2.43$
$652=2^2.163$	$693=3^2.7.11$	$734=2.367$	$775=5^2.31$
653	$694=2.347$	$735=3.5.7^2$	$776=2^3.97$
$654=2.3.109$	$695=5.139$	$736=2^5.23$	$777=3.7.37$
$655=5.131$	$696=2^3.3.29$	$737=11.67$	$778=2.389$
$656=2^4.41$	$697=17.41$	$738=2.3^2.41$	$779=19.41$
$657=3^2.73$	$698=2.349$	739	$780=2^2.3.5.$
$658=2.7.47$	$699=3.233$	$740=2^2.5.37$	$781=11.71$
659	$700=2^2.5^2.7$	$741=3.13.19$	$782=2.17.2$
$660=2^2.3.5.11$	701	$742=2.7.53$	$783=3^3.29$
661	$702=2.3^3.13$	743	$784=2^4.7^2$

=5.157	826=2.7.59	$867=3.17^2$	$908=2^2.227$
=2.3.131	827	$868=2^2.7.31$	$909=3^2.101$
	$828=2^2.3^2.23$	869=11.79	910=2.5.7.13
$=2^2.197$	829	870=2.3.5.29	911
=3.263	830=2.5.83	871=13.67	$912=2^4.3.19$
=2.5.79	831=3.277	$872=2^3.109$	913=11.83
=7.113	$832=2^6.13$	$873=3^2.97$	914=2.457
$=2^3.3^2.11$	$833=7^2.17$	874=2.19.23	915=3.5.61
=13.61	834=2.3.139	$875=5^3.7$	$916=2^2.229$
=2.397	835=5.167	$876=2^2.3.73$	917=7.131
=3.5.53	$836=2^2.11.19$	877	$918=2.3^3.17$
$=2^2.199$	$837=3^3.31$	878=2.439	919
	838=2.419	879=3.293	$920=2^3.5.23$
=2.3.7.19	839	$880=2^4.5.11$	921=3.307
=17.47	$840=2^3.3.5.7$	881	922=2.461
$=2^5.5^2$	$841=29^2$	$882=2.3^2.7^2$	923=13.71
$=3^2.89$	842=2.421	883	$924=2^2.3.7.11$
=2.401	843=3.281	$884=2^2.13.17$	$925=5^2.37$
=11.73	$844=2^2.211$	885=3.5.59	926=2.463
$=2^2.3.67$	$845=5.13^2$	886=2.443	$927=3^3.103$
=5.7.23	$846=2.3^2.47$	887	$928=2^5.29$
=2.13.31	$847=7.11^2$	$888=2^3.3.37$	929
=3.269	$848=2^4.53$	889=7.127	930=2.3.5.31
$=2^3.101$	849=3.283	890=2.5.89	$931=7^2.19$
	$850=2.5^2.17$	$891=3^4.11$	$932=2^2.233$
$=2.3^4.5$	851=23.37	$892=2^2.223$	933=3.311
	$852=2^2.3.71$	893=19.47	934=2.467
$=2^2.7.29$	853	894=2.3.149	935=5.11.17
=3.271	854=2.7.61	895=5.179	$936=2^3.3^2.13$
=2.11.37	$855=3^2.5.19$	$896=2^7.7$	937
=5.163	$856=2^3.107$	897=3.13.23	938=2.7.67
$=2^4.3.17$	857	898=2.449	939=3.313
=19.43	858=2.3.11.13	899=29.31	$940=2^2.5.47$
=2.409	859	$900=2^2.3^2.5^2$	941
$=3^2.7.13$	$860=2^2.5.43$	901=17.53	942=2.3.157
$=2^2.5.41$	861=3.7.41	902=2.11.41	943=23.41
	862=2.431	903=3.7.43	$944=2^4.59$
=2.3.137	863	$904=2^3.113$	$945=3^3.5.7$
	$864=2^5.3^3$	905=5.181	946=2.11.43
$=2^3.103$	865=5.173	906=2.3.151	947
$=3.5^2.11$	866=2.433	907	$948=2^2.3.79$

$949=13.73$	$962=2.13.37$	$975=3.5^2.13$	$988=2^2.1$
$950=2.5^2.19$	$963=3^2.107$	$976=2^4.61$	$989=23.4$
$951=3.317$	$964=2^2.241$	977	$990=2.3^2.$
$952=2^3.7.17$	$965=5.193$	$978=2.3.163$	991
953	$966=2.3.7.23$	$979=11.89$	$992=2^5.3$
$954=2.3^2.53$	967	$980=2^2.5.7^2$	$993=3.33$
$955=5.191$	$968=2^3.11^2$	$981=3^2.109$	$994=2.7.7$
$956=2^2.239$	$969=3.17.19$	$982=2.491$	$995=5.19$
$957=3.11.29$	$970=2.5.97$	983	$996=2^2.3.$
$958=2.479$	971	$984=2^3.3.41$	997
$959=7.137$	$972=2^2.3^5$	$985=5.197$	$998=2.49$
$960=2^6.3.5$	$973=7.139$	$986=2.17.29$	$999=3^3.3$
$961=31^2$	$974=2.487$	$987=3.7.47$	$1000=2^3.$

§. 177. *Numeri inter se primi. Definitio.*

Numeri sunt inter se primi, *qui* (praeter unitatem) *nullum habent Divisorem communem:* ut 4 et 9; quare omnes numeri primi etiam inter se primi sunt. *Si duorum numerorum alteruter est primus, neque alter numerus est ejus Multiplum, inter se primi sunt*, ut 5 et 6; 3 et 8; 9 et 11, sed numeri 3, 6, 9, 12, 15 habent Divisorem communem 3.

§. 178. *Problema.*

Numeros primos reperire, qui alicujus numeri divisibilis sunt Divisores.

Solutio.

Instituatur Divisio per numeros primos, a minimo incipiendo. Si non est Residuum, numerus dividens est Divisor; si est Residuum, in Divisorum numero non est habendus (§. 172). Sed

quo-

quoniam etiam Potestas aliqua hujus numeri primi Divisor esse potest, repetatur Divisio per eundem numerum, donec aliquid maneat residui. Si quis numerus p repertus fuerit esse Divisor numeri M, ita ut $q = \frac{M}{p}$ sit numerus integer, non amplius numeri ipsius M, sed Quoti q instituatur Divisio per eundem vel alium numerum primum; ut, si proponitur reperire Divisores numeri 60060, calculus hic esse potest.

$$\begin{array}{r|l} 2, & 60060 \\ 2, & 30030 \\ 3, & 15015 \\ 5, & 5005 \\ 7, & 1001 \\ 11, & 143 \\ & 13 \end{array}$$

quare $60060 = 2.\ 2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11.\ 13$, atque hi numeri primi sunt Divisores. Saepius autem hic calculus multo brevior esse potest. Ita si omittitur zero ultimum, hac omissione ipse numerus est divisus per 2 et 5.

§. 179. *Coroll.*

Si hoc modo, progrediendo in tentanda Divisione, pervenerimus ad numerum primum, qui sit minor quam $M^{\frac{1}{2}}$, neque ullum Divisorem invenerimus, colligendum est, numerum M esse numerum primum.

Nam si hoc falsum sit, ponamus $p > M^{\frac{1}{2}}$ esse Divisorem, atque esse $\frac{M}{p} = q$. Numerus q etiam est Divisor, quoniam $\frac{M}{q} = p$, et, quoniam $M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} = M$, vel $\frac{M}{M^{\frac{1}{2}}} = M^{\frac{1}{2}}$, atque p est $> M^{\frac{1}{2}}$,

erit

erit $q < M^{\frac{1}{2}}$. Sed hoc repugnat Hypothesi, Posuimus enim, numerum M non habere Divisorem, qui sit minor quam $M^{\frac{1}{2}}$; ex quo sequatur necesse est, q non posse esse Divisorem. Quare p non est Divisor. Velut ex instituta Divisione, vel aliunde patet, 59 non esse divisibilem, neque per 2. 3. 5. neque per 7. Sed $8^2 = 64$, atque $7^2 = 49$, ergo $59^{\frac{1}{2}}$ major est quam 7 et minor est quam 8; ex quo colligitur, omnes sequentes numeros primos, qui sunt 11. 13. 17. 19 .... esse majores quam $59^{\frac{1}{2}}$, atque igitur non posse esse Divisores. Ergo 59 est numerus primus.

§. 180. *Definitio.*

Numerus fractus ad minimos terminos dicitur esse reductus, si ejus termini Multiplicatione et Divisione redditi sunt inter se primi; ut: $\frac{30}{48} = \frac{5}{8}$;

$$\frac{4\frac{2}{3}}{6\frac{1}{3}} = \frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{6}} = \frac{33}{59}; \quad \frac{abc}{dec} = \frac{ab}{de}; \quad \frac{ax^2 + \frac{a^2x}{b} + bx^2 + ax}{abx + ax^2 + b^2x + bx^2}$$

$$= \frac{(a+b)\,x + \frac{a^2+ab}{b}}{(a+b)\,b + (a+b)x} = \frac{x + \frac{a}{b}}{b+x} = \frac{bx+a}{bx+bb}.$$

Numerus dupliciter fractus ad minimos terminos non est reductus; quod igitur ut fiat, duplex Fractio Multiplicatione tollenda est (§. 164. 3.)

§. 181. *Problema.*

Numerum fractum, cujus termini unum aut plures habent Divisores communes, ad minimos reducere terminos.

Solutio.

Dividantur per maximum Factorem, qui, si id non aliunde patet, quomodo reperiundus sit, in posterum monstrabitur.

Aut termini fracti resolvantur in suos Divisores simplices, qui sunt numeri primi (§. 178.), atque communes deleantur Divisores, ut: $\frac{48}{60} = \frac{2^4 \cdot 3}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2^2}{5} = \frac{4}{5}$.

§. 182. *Definitio.*

Duo aut plures Fracti dicuntur esse ejusdem Denominationis, si eosdem habent Denominatores, ut $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$.

§. 183. *Problema.*

Numeros fractos, qui diversae sunt Denominationis ad eandem Denominationem reducere, ita tamen ut Denominator sit minimus.

Solutio.

Ratio hujus Solutionis jam indicata est §. 164. 4. Multiplicet igitur utriusque Fracti terminos Denominator, alter alterius. Ita si propositi sunt $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$,

prior

prior Fractus hac Multiplicatione fit $\frac{ad}{bd}$; posterior autem $\frac{cb}{bd}$. Habent igitur eundem Denominatorem, qui est Productum ex Denominatoribus Fractorum.

Si plures Fracti ad eandem Denominationem sunt reducendi, cujuslibet Fracti termini multiplicandi sunt per Productum ex Denominatoribus reliquorum Fractorum; qua ratione Productum ex omnibus Denominatoribus fit Denominator communis. Ita quidem $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$, fiunt $\frac{adfh}{bdfh}, \frac{cbfh}{bdfh}, \frac{ebdh}{bdfh}, \frac{gbdf}{bdfh}$.

Si, ut in his Fractis, Denominatores communem non habent Divisorem, *Productum ex omnibus Denominatoribus ipse est Denominator communis minimus.* Si autem communes habent Factores, Denominatores resolvantur in suos Factores, atque in Denominatore communi semel tantum ponatur ille Factor, qui in duobus aut pluribus simul est Denominatoribus; ut Fractorum $\frac{a}{npr}, \frac{c}{prt}, \frac{d}{ppt}, \frac{e}{pu}$, Denominator communis minimus est *npprtu.* Ut sit minimus, simplicitas atque commoditas calculi requirunt. Id enim solum agitur, ut reperiatur numerus, divisibilis per omnes singulorum Fractorum Denominatores.

Ut Numeratores reperiantur, Quotus, ortus ex hoc communi Denominatore, diviso per Denomina-

to-

torem Fracti, multiplicetur per Numeratorem Fracti. Ita nascuntur formae: $\frac{aptu}{npprtu}$, $\frac{cnpu}{npprtu}$, $\frac{dnru}{npprtu}$, $\frac{enprt}{npprtu}$. Quare quicunque Denominator est pars aliquota alius Denominatoris, is in Denominatore communi omittitur, ut Fractorum $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, communis Denominator est 12.

Ut tollantur Factores communes, Denominatores per eos dividantur, ut, si proponuntur Fracti: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{12}$, Denominator communis ita invenitur:

	2 .	4 .	6 .	8 .	10 .	12
2,	1	2	3	4	5	6
2,		1	3	2	5	3
2,		1	3	1	5	3
3,		1	1	1	5	1

Denominator communis igitur est 2. 2. 2. 3. 5 = 120, atque Fracti fiunt $\frac{60}{120}$, $\frac{90}{120}$, $\frac{100}{120}$, $\frac{45}{120}$, $\frac{84}{120}$, $\frac{110}{120}$.

§. 184. *Problema.*

Invenire Summam duorum aut plurium Fractorum.

Solutio.

1. *Si sunt ejusdem Denominationis, Summa aequalis est Fracto, qui eundem habet Denominatorem, sed cujus Numerator est Summa Numeratorum.*

Sit

Sit enim $s = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{e}{b}$, ergo $bs = a + c + d + e$, §. 165. 3. ergo $s = \frac{a+c+d+e.}{b}$

2. *Si non sunt ejusdem Denominationis, ad eam sunt reducendi* eo modo, quo dictum est §. 183. Tum tractantur, ut in priore casu, veluti:

$$s = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{bd} + \frac{f}{g} = \frac{adg + cbg + eg + fbd}{bdg}$$

$$s = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9} + \frac{9}{20} = \frac{90 + 135 + 150 + 140 + 81}{180}$$

$$= \frac{596}{180} = 3\,\frac{56}{180} = 3\,\frac{14}{45}.$$

§. 185. *Coroll.* 1.

Ex hac solutione, atque ex §. 183. perspicitur ratio addendi numeros fractos, quam docet Arithmetica vulgaris. *Numeri addendi scribuntur in linea verticali, ad cujus apicem notatur Denominator communis. Hic dividitur per singulos Denominatores atque Producta ex Quotis, multiplicatis per Numeratores, in unam Summam colliguntur*, ut:

	180	
$\frac{1}{2}$	90 . . .	90
$\frac{3}{4}$	45 . . .	135
$\frac{5}{6}$	30 . . .	150
$\frac{7}{9}$	20 . . .	140
$\frac{9}{20}$	9 . . .	81

Ergo Summa est $= \frac{596}{180} = 3\,\frac{56}{180} = 3\,\frac{14}{45}$.

§. 186.

§. 186. *Coroll.* 2.

Hoc modo etiam numerorum fractorum et integrorum invenitur Summa, ut: $a + \frac{b}{c} + f + \frac{d}{e}$ $= \frac{ace + be + fce + dc}{ec}$.

	24	
$2\frac{3}{4}$	6 . . .	18
$6\frac{2}{3}$	8 . . .	16
$4\frac{5}{8}$	3 . . .	15

Ergo Summa $= 12\,\frac{49}{24} = 12 + 2 + \frac{1}{24} = 14\,\frac{1}{24}$.

§. 187. *Coroll.* 3.

Eodem modo Fractorum invenitur Differentia, ut:
$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$.

	12	
$6\frac{2}{3}$	4 . .	8
$-\ 2\frac{3}{4}$	3 .	-9
		-1

Ergo $6\frac{2}{3} - 2\frac{3}{4} = 4 - \frac{1}{12} = 3\frac{11}{12}$.

§. 188. *Exempla Additionis et Subtractionis numerorum fractorum.*

A. Exempla formae $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.

$$\frac{a+bx}{1-2x+2x^2} + \frac{c+dx}{1+2x+2x^2} = \frac{(a+c)+(b+d+2a-2c)x + 2(a+b+c-d)x^2 + 2(b+d)x^3}{1+4x^4}$$ (p. 197.)

Et ponendo c et d negativos, fit:

II. $\frac{a+bx}{1-2x+2x^2} - \left(\frac{c+dx}{1+2x+2x^2}\right) = \frac{(a-c)+(b-d+2a+2c)x+2(a+b-c+d)x^2+2(b-d)x^3}{1+4x^4}$

Ex quibus formulis aliae infinitae numero nascuntur, quoniam pro a, b, c, d, omnes alii numeri determinati poni possunt. Sit v. c. $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{4}$, unde:

1. $\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x}{1-2x+2x^2} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x}{1+2x+2x^2} = \frac{1+2x+3x^2+4x^3}{1+4x^4}$,

aut $\frac{2+5x}{1-2x+2x^2} + \frac{2+3x}{1+2x+2x^2} = \frac{4(1+2x+3x^2+4x^3)}{1+4x^4}$

2. $\frac{2+5x}{1-2x+2x^2} - \left(\frac{2+3x}{1+2x+2x^2}\right) = \frac{10x+16x^2+4x^3}{1+4x^4}$; atque si x ponitur negativus:

3. $\frac{2-5x}{1+2x+2x^2} + \frac{2-3x}{1-2x+2x^2} = \frac{4(1-2x+3x^2-4x^3)}{1+4x^4}$.

4. $\frac{2-5x}{1+2x+2x^2} - \left(\frac{2-3x}{1-2x+2x^2}\right) = \frac{-10x+16x^2-4x^3}{1+4x^2}$.

Ponatur $x = 10$, erit

5. $\frac{13}{181} + \frac{8}{221} = \frac{4321}{40001}$; $\frac{13}{181} - \frac{8}{221} = \frac{1425}{40001}$; $\frac{12}{221} + \frac{7}{181} = \frac{3719}{40001}$;

$\frac{12}{221} - \frac{7}{181} = \frac{625}{40001}$

III. $\frac{p}{a+bx} + \frac{q}{c+dx} = \frac{cp+aq+(dp+bq)x}{ac+(ad+cb)x+bdx^2}$; et si $a = c = 1$

$\frac{p}{1+bx} + \frac{q}{1+dx} = \frac{p+q+(dp+bq)x}{1+(b+d)x+bdx^2}$.

B. Exempla formae $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf+cbf+ebd}{bdf}$.

IV. $\frac{p}{a+bx} + \frac{q}{c+dx} + \frac{r}{e+fx}$ est Fractus, cujus Numerator est $(cep+aeq+acr) + \big((de+cf)p+(be+af)q+(ad+bc)r\big)x + (dfp+bfq+bdr)x^2$, et cujus Denominator est: $ace + (acf+ade+bce)x + (adf+bcf+bde)x^2 + bdfx^3$;

Ex

Ex qua formula aliae prodeunt, ut

1. $\frac{5}{1+2x}+\frac{4}{3-4x}+\frac{3}{2-3x}=\frac{47-75x+12x^2}{6-5x-22x^2+24x^3}$.

2. $\frac{p}{1+x}+\frac{q}{1+2x}+\frac{r}{1+3x}=\frac{(p+q+r)+(5p+4q+3r)x+(6p+3q+2r)x^2}{1+6x+11x^2+6x^3}$

3. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+3x}=\frac{3+12x+11x^2}{1+6x+11x^2+6x^3}$, ubi $p=q=r$.

4. $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}=\frac{3-12x+11x^2}{1-6x+11x^2-6x^3}$, ubi pro x ponitur $-x$.

Si in hisce Fractis numerum x talem ponimus esse, ut Denominator evanescat, Fractus fit infinitus. Ita posito in postrema formula $x=-\frac{1}{3}$, haec fit:

$$\frac{p}{1-\frac{1}{3}}+\frac{q}{1-\frac{2}{3}}+\frac{r}{1-3\cdot\frac{1}{3}}=\frac{p+q+r-\frac{1}{3}(5p+4q+3r)+\frac{1}{9}(6p+3q+2r)}{(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})(1-3\cdot\frac{1}{3})}$$

Id est $\frac{3}{2}p+3q+\frac{r}{0}=\frac{\frac{2}{9}r}{0}=\frac{r}{0}$. Ergo $\frac{3}{2}p+3q$, quantuscumque sit p et q, dummodo non sit infinitus, evanescit prae numero infinito $\frac{r}{0}$ sive $\frac{1}{0}$. Ex quo efficitur, numerum infinite magnum, seu formae $\frac{1}{0}$, neque augeri neque diminui, si ipsi Quantitates finitae adduntur vel subtrahuntur, adeoque prae hoc numero *evanescere* has quantitates, idque plenissimo hujus vocis sensu, non per approximationem, ut dicunt. Neque etiam Multiplicatione et Divisione per numerum finitum augeri

aut

aut diminui potest, quia $\frac{8r}{o}$ non differt ab $\frac{1}{o}$. Haec igitur est nota essentialis hujus numeri, quae etiam ex natura ipsius prodit.

Caeterum ex hisce exemplis satis perspicitur, quomodo formulae universae possint confici, atque ex his deduci singulares. Formulae IV., 1. 2. 3. 4. sua forma satis indicant, quales debeant esse, si plures quam tres ejusmodi Fracti in unam Summam sunt colligendi.

C. Exempla, ubi Denominatores habent Factores communes.

V. $\frac{p}{z^2}+\frac{q}{z}+\frac{r}{y}=\frac{py+qzy+rz^2}{z^2y}=\frac{(p+aq)+(q+m)x}{a^2+2ax+x^2}$

VI. $\frac{p+mx}{(a+bx)^2}+\frac{q}{a+bx}=\frac{p+aq+(m+bq)x}{a^2+2abx+b^2x^2}.$

VII. $\frac{p+mx}{(a+bx)^2}+\frac{q}{a+bx}+\frac{r}{c+dx}$

$=\frac{cp+acq+a^2r+(cm+dp+(ad+bc)q+2ab\ldots \quad +(dm+bdq+b^2r\ldots}{(a+bx)^2(c+dx)}$

ut: 1. $\frac{p}{(3+x)^2}+\frac{q}{3+x}+\frac{r}{1-4x}=\frac{p+3q+9r+(6r-4p-11\ldots \quad +(r-4q\ldots}{9-3cx-23x^2-4x^3}$

2. $\frac{2}{(3+x)^2}+\frac{3}{3+x}+\frac{4}{1-4x}=\frac{47-17x-8x^2}{9-30x-23x^2-4x^3}.$

VIII. $\frac{3}{(2+x)^3}+\frac{4}{(2+x)^2}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3+x}=\frac{53+51x+17x^2+2x^3}{24+44x+30x^2+9x^3+\ldots}$

IX. $\frac{p}{(1+x)^3}+\frac{q}{(1+x)^2}+\frac{r}{1+x}=\frac{p+q+r+(q+2r)x+rx^2}{1+3x+3x^2+x^3}$

$\frac{p}{(1+}$

$$\frac{p}{(1+x)^4}+\frac{q}{(1+x)^3}+\frac{r}{(1+x)^2}+\frac{s}{1+x}=\frac{p+q+r+s+(q+2r+3s)x+(r+3s)x^2+sx^3}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}.$$

Si ita progredimur, atque cum Coëfficientibus comparamus numeros §. 118. p. 113., ex Analogia atque ex natura ipsa hujus calculi concludimus:

$$\frac{p}{(1+x)^m}+\frac{q}{(1+x)^{m-1}}+\frac{r}{(1+x)^{m-2}}\ldots+\frac{w}{1+x}$$

$$=\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ldots+wx^{m-1}}{(1+x)^m}$$

ubi A est $p+q+r\ldots+w$; $B=q+2r+3s+4t+5u\ldots$, $C=r+3s+6t+10u\ldots D=s+4t+10u\ldots$, $E=t+5u\ldots$

Si ponimus $p=q=r$, prodit:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}=\frac{2+x}{(1+x)^2};\ \frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)^3-1}{x.(1+x)^3};$$

et universe, quod etiam ex aliis rationibus, postea explicandis, patet:

$$\frac{1}{(1+x)^m}+\frac{1}{(1+x)^{m-1}}+\frac{1}{(1+x)^{m-2}}\ldots+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)^m-1}{x.(1+x)^m}$$

$$\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2.(2-x)^2}+\frac{7}{4.(2-x)}-\frac{1}{4x}$$

$$=\frac{1}{(x-1)^3(2-x)^2x}.$$

P. II.

P. II. CAPUT II.

DE AEQUALITATE ET INAEQUALITATE FRACTORUM; DE RATIONIBUS, PROPORTIONIBUS ET PROGRESSIONIBUS.

SECTIO I.

De aequalitate Fractorum, sive de Proportionibus inter numeros puros.

---

§. 189. *Convenientia Fractorum et Rationum.*

Quandoquidem Exponens Rationis, quae est inter duo Quanta homogenea, indicatur Fracto, atque Rationes aequales sunt vel inaequales, si Exponentes aequales sunt vel inaequales (§. 52 et 57.), omnis quaestio de Rationum aequalitate et inaequalitate refertur ad investigandam Fractorum aequalitatem et inaequalitatem, atque ex horum contemplatione eliciendae sunt Proportionum et Progressionum leges.

§. 190. *Problema.*

Definire quid consequatur ex Fractorum $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ aequalitate.

Solutio.

Corollaria, quae deducuntur ex aequatione $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se-

secundum leges expositas §. 5. 59. 82. 134. 1. 136. 164. 166. haec in primis sunt; in quibus ponimus $a, b, c, d,$ esse *numeros positivos*, atque a et d *terminos extremos*; b et c *medios*; a et c *antecedentes*; b et d *consequentes*.

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, erit secundum §. 136.

I. $ad=bc$ (1). Ex quo sequitur:

II. $a^m d^m = b^m c^m$ (§. 174.), qualiscunque sit m.

III. $mad = mbc$; $mnad = mnbc$; $\frac{ad}{m}=\frac{bc}{m}$; $\frac{ad}{mn}=\frac{bc}{mn}$ (§. 82. §. 134. 1). Ex his autem, collatis cum §. 136, hae novae formantur aequationes:

IV. $a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$; $b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$.

V. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ (2).

VI. $\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$; $\frac{a^m}{c^m}=\frac{b^m}{d^m}$; $\frac{d^m}{c^m}=\frac{b^m}{a^m}$; $\frac{c^m}{a^m}=\frac{d^m}{b^m}$ (3).

VII. $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$; $\frac{ma}{mb}=\frac{nc}{nd}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (4);

$\frac{ma}{b}=\frac{mc}{d}=\frac{c}{d:m}$; $\frac{a}{mb}=\frac{c}{md}=\frac{c:m}{d}$ (§. 164.)

VIII.

(1) Euclides Lib. VII. Prop. 19.

(2) Euclides Lib. VII. Prop. 9. 10. 13. 15. Confer. Lib. V. Prop. 4. Cor.; Prop. 16.

(3) Euclides Lib. VIII. Prop. 13.

(4) Euclides Lib. VII. Prop. 17. 18. Confer. Lib. V. Prop. 3. 4. 15.

VIII. $mab+nad=mab+nbc$; $mac+nad=mac+nbc$.
$mab-nad=mab-nbc$; $mac-nad=mac-nbc$.
$nad-mab=nbc-mab$; $nad-mac=nbc-mac$ (N°. 1. atque §. 7. §. 21.)

id est: 1. $a(mb+nd)=b(ma+nc)$; 4. $a(mc+nd)=c(ma+nb)$;
2. $a(mb-nd)=b(ma-nc)$; 5. $a(mc-nd)=c(ma-nb)$;
3. $a(nd-mb)=b(nc-ma)$; 6. $a(nd-mc)=c(nb-ma)$ (§. 154.)

ubi m et n sunt numeri positivi.

IX. Ex his aequationibus, collatis cum §. 136, sequuntur hae aequationes universales:

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{ma-nc}{mb-nd}=\frac{nc-ma}{nd-mb}$.

2. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{ma+nb}{mc+nd}=\frac{ma-nb}{mc-nd}=\frac{nb-ma}{nd-mc}$.

Quae aequationes duobus modis mutari possunt; quorum prior est, *ut locum inter se commutent termini medii, atque similiter termini extremi*; posterior, *ut termini medii fiant termini extremi, atque extremi fiant medii*, secundum N°. V, ut

3. $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{mb+nd}{ma+nc}=\frac{mb-nd}{ma-nc}=\frac{nd-mb}{nc-ma}$.

4. $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}=\frac{mc+nd}{ma+nb}=\frac{mc-nd}{ma-nb}=\frac{nd-mc}{nb-ma}$, caet.

Animadv. Ne Fracti $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ fiant negativi, usurpatur aequatio $\frac{a}{b}=\frac{ma-nc}{mb-nd}$ si $ma>nc$, sed $\frac{a}{b}=\frac{nc-ma}{nd-mb}$ si $nc>ma$, et ita in aliis similibus aequationibus.

X. Ex

X. Ex his oriuntur aequationes particulares, posita unitate in locum Coëfficientium m et n.

$$1.\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=\frac{c-a}{d-b};\ 2.\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c};$$

$$3.\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{b-d}{a-c}=\frac{d-b}{c-a};\ 4.\ \frac{c}{a}=\frac{d}{b}=\frac{c+d}{a+b}=\frac{c-d}{a-b}=\frac{d-c}{b-a}.$$

Si locum inter se commutant termini medii, atque similiter termini extremi, prodeunt:

$$5.\ \frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b};\quad 8.\ \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c};\quad 11.\ \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d};$$

$$6.\ \frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b};\quad 9.\ \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c};\quad 12.\ \frac{c+a}{c-a}=\frac{d+b}{d-b};$$

$$7.\ \frac{c-a}{a}=\frac{d-b}{b};\quad 10.\ \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c};\quad 13.\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};$$

$$14.\ \frac{b+a}{b-a}=\frac{d+c}{d-c}.\ (1)$$

Usurpatur aequatio $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$, si $a>c$; sed $\frac{a}{b}=\frac{c-a}{d-b}$, si $c>a$.

XI. Si $a \gtrless b$, erit $c \gtrless d$, quoniam, si $\frac{a}{b} \gtrless 1$, erit $\frac{c}{d} \gtrless 1$ (§. 82, 83.)

Si $c \gtrless d$, erit $a \gtrless b$, quoniam, si $\frac{c}{d} \gtrless 1$, erit $\frac{a}{b} \gtrless 1$.

Cum idem valeat de quibuslibet Fractis aequalibus, sequitur:

Si $a \gtrless c$, erit $b \gtrless d$, atque si $b \gtrless d$, erit $a \gtrless c$ (V) (2).
Si $ma \gtrless nb$, erit $mc \gtrless nd$, atque si $mc \gtrless nd$, erit $ma \gtrless nb$ (VII), atque ita de reliquis.

XII.

(1) Euclides Lib. VII. Prop. 7. 8. 11. Conf. Lib. V. Prop. 5. 6. 17. 18. 19.

(2) Confer. Euclides Lib. V. Prop. 14.

XII. Si $a > c$, erit $a+d \gtrless b+c$, si $a \gtrless b$.
Si $a < c$, erit $b+c \gtrless a+d$, si $a \gtrless b$.

Nam si $a>c$, erit $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$(X); ergo, si $a \gtrless b$
$a-c \gtrless b-d$(XI); vel, si $a \gtrless b$, erit $a+d \gtrless b+c$ (
Si $a<c$, erit $\frac{a}{b}=\frac{c-a}{d-b}$(X); ergo, si $a \gtrless b$, erit $c-a \gtrless$
vel, si $a \gtrless b$, erit $b+c \gtrless a+d$ (§. 12).
Similiter si $a>c$, erit $ma+nd \gtrless nb+mc$, si ma
si $a<c$, erit $nb+mc \gtrless ma+nd$, si $ma \gtrless nb$

XIII. *Si* a *est maximus terminus*, d *est minimus.*
enim est $a>b$ et $a>c$, ergo $c>d$, atque
Rursus *si* d *est minimus terminus*, a *est maximus*
enim est $c>d$, atque $b>d$, ergo $a>b$, atque
Idem valet de b et c. Nam *si* b *est maximus ter*
c *est minimus*, *atque si* c *est minimus*, b *est ma*

XIV. *Si a est maximus terminus*, *atque igitur d mi*
vel si d est minimus terminus, *atque a est ma*
erit $a+d>b+c$. Ergo etiam, *si b est maxim*
minus, *vel si c est minimus terminus*, *erit* $b+c>a+$

XV. $a:b=\frac{1}{d}:\frac{1}{c}$; $b:a=\frac{1}{c}:\frac{1}{d}$; $a:c=\frac{1}{d}:\frac{1}{b}$; $c:a=$
atque ita de aliis. Quare si $ad=bc$, erit $a:\frac{1}{d}:$

§. 191. *Coroll.* 1.

Ex singulis aequationibus §. 190. *expositis*, *s* *quitur aequatio* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *ergo etiam reliquae o* *nes*, *quoniam ex hac consequuntur.* Ita ex aequ ti

(1) Conf. Euclides Lib. V. Prop. 26.

tione $\frac{mb+nd}{ma+nc}=\frac{mb-nd}{ma-nc}$ sequitur $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Nam si multiplicatur per $(ma+nc)(ma-nc)$, prodit $2mnad=2mnbc$, ergo $ad=bc$, unde $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. (§. 136.)

§. 192. *Coroll.* 2.

Duo Fracti $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *aequales sunt, si* $ad=bc$; (1) id est, *si Productum ex terminis extremis aequale est Producto ex terminis mediis.* Haec igitur est nota, ex qua judicatur, utrum Fracti sint aequales, nec ne.

§. 193. *Coroll.* 3.

a, b, c, d possunt esse quilibet numeri, Summae et Differentiae, Producta et Quoti sive Fracti, atque etiam unitas ipsa. Veluti, quoniam a^2-b^2 $=(a+b)(a-b)$ (§. 127. 1.), erit $\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}$. Ita etiam $\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)(a+b)}=\frac{a-b}{a^2+b^2}$ (§. 127. 1.) $\frac{1-x^6}{1-x^8}=\frac{1+x^2+x^4}{(1+x^2)(1+x^4)}$. §. 175.

§. 194. *Coroll.* 4.

Quoniam termini duorum Fractorum aequalium sunt *termini Proportionis Geometricae inter numeros* (§. 70.), possumus aequationes expositas §. 190, 191. verbis exprimere, huic Proportioni aptis. Ex quo oriuntur hae enunciationes.

Si

(1) Euclides Lib. VII. Prop. 19.

Si quatuor numeri a, b, c, d sunt proportionales,

A. *Productum ex terminis mediis aequale est Producto ex terminis extremis* (§. 190. I.)

B. *Omnis terminus extremus aequalis est Producto ex terminis mediis, diviso per alterum terminum extremum. Quilibet terminus medius aequalis est Producto ex terminis extremis, diviso per alterum terminum extremum* (IV).

C. *Proportio non cessat esse*

1. *Si termini medii, vel termini extremi locum inter se commutant* (V).

2. *Si termini medii mutantur in terminos extremos, atque extremi in medios* (V).

3. *Si pro terminis sumuntur ipsorum Potestates et Radices cujuslibet generis, dummodo Exponentes iidem sint* (VI).

4. *Si per eundem numerum multiplicantur vel dividuntur.*

a. *Omnes termini Proportionis.*

b. *Uterque terminus ejusdem Rationis.*

c. *Uterque terminus antecedens.*

d. *Uterque terminus consequens.*

e. *Si alteruter terminus extremus per aliquem numerum multiplicatur vel dividitur, dummodo alter terminus extremus per eundem numerum dividatur vel multiplicetur. Idem valet de terminis mediis* (VII).

D. *Si duo Producta, quae singula ex duobus Factoribus constant, inter se aequalia sunt, ex his*

his Factoribus Proportio effici potest, in qua isti duo Factores alterutrius Producti sunt termini medii, atque duo Factores alterius Producti sunt termini extremi. Hi Factores possunt esse Producta ex aliis Factoribus, Quoti, Summae, Differentiae atque etiam unitas (§. 192, 193.).

E. *Quaelibet igitur Proportio vera est, si Productum ex terminis extremis aequale est Producto ex terminis mediis* (§. 192.).

F. Ex qualibet Proportione nascuntur etiam aliae Proportiones, quarum termini sunt Summae et Differentiae terminorum hujus Proportionis, idque his legibus.

a. *Summa vel Differentia terminorum antecedentium est ad Summam vel Differentiam terminorum consequentium, ut terminus antecedens est ad suum terminum consequentem* (§. 190. X.).

b. *Summa vel Differentia terminorum alterutrius Rationis est ad Summam vel Differentiam terminorum alterius Rationis, ut terminus antecedens illius est ad terminum antecedentem hujus Rationis, vel ut terminus consequens illius est ad terminum consequentem hujus Rationis* (§. 190. X.).

In hisce Proportionibus termini antecedentes, vel termini ejusdem Rationis per eundem numerum possunt esse multiplicati aut divisi. Idem valet de terminis consequentibus (§. 190. IX.).

c. *Inter Summam terminorum antecedentium atque Summam terminorum consequentium eadem est Ratio atque inter Differentiam* (§. 190. X. 11, 12.).

d. *In-*

d. *Inter Summam terminorum alterutrius Rationis atque Summam terminorum alterius Rationis, eadem est Ratio atque inter Differentiam* (§. 190. X. 13, 14.).

G. *Si primus terminus est aequalis, major vel minor quam secundus terminus, tertius terminus erit etiam aequalis, major vel minor quam quartus terminus. Si primus terminus est aequalis, major vel minor quam tertius terminus, secundus terminus erit etiam aequalis, major vel minor quam quartus terminus* (§. 190. XI.).

H. *Si terminorum extremorum vel mediorum, alteruter est aut maximus, aut minimus, alter est minimus, aut maximus* (§ 190. XIII.).

I. *Summa maximi et minimi termini semper major est quam Summa reliquorum terminorum* (§. 190. XIV).

K. *Si Ratio inter duos numeros est inversa Ratio duorum aliorum numerorum, hi numeri dicuntur esse reciproce proportionales.* Ergo si $a : b = c : d$, erit $a : b = \frac{1}{d} : \frac{1}{c}$. *Quare duo Factores duorum Productorum aequalium sunt inter se proportionales reciproce* (§. 190. XV.).

§. 195. *Coroll.* 5.

Plurimi vocant Differentiam duorum numerorum *Rationem Arithmeticam*, atque aequalitatem duarum Differentiarum *Proportionem Arithmeticam* (§. 46.). Quare $a - b = c - d$ est ejusmodi Proportio, ex quo sequitur $a + d = b + c$. Eadem ratione ex $a - b = b - c$ sequitur $a + c = 2b$, et $\frac{a+c}{2} = b$. Ergo ut *in Proportione Geo-*

Geometrica, *Producta*, *ita in Proportione Arithmetica*, *Summae terminorum extremorum et mediorum sunt aequales.* In Proportione autem Geometrica hae Summae sunt semper inaequales, nisi omnes termini inter se aequales fuerint.

§. 196. *Coroll.* 6.

Si plures Fracti aequales sunt, ut

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{i}{k}\ \ldots,\ \text{erit}$$

I. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$ (§. 190. X. 1.) $=\frac{e}{f}$; unde eadem ratione prodit $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ $=\frac{i}{k}$, caet. Ex quo colligimus, *si plures Fracti inter se aequales sunt, singuli Fracti aequales sunt Fracto, cujus Numerator est Numeratorum, Denominator Denominatorum Summa.* Quod ita Proportioni convenienter exprimitur:

Si plures Rationes inter se aequales sunt, hae etiam aequales sunt Rationi, quae est inter Summam omnium terminorum antecedentium, atque Summam omnium terminorum consequentium. (1)

II. Quare si haec intercedit Ratio inter $a, b, c, d, e \ldots$ atque $a', b', c', d', e' \ldots$ ut sit $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}\ldots$ colligitur:

$$\frac{a+b+c+d+e\ \ldots}{a'+b'+c'+d'+e'\ \ldots}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}\ \ldots$$

Ita-

(1) Euclides Lib. VII. Prop. 12.

Itaque si aliquod Quantum T divisum fuerit in partes $a, b, c, d, e \ldots$ ita, ut hae partes sint inter se, ut numeri $a', b', c', d', e' \ldots$, atque si s fuerit Summa horum numerorum, erit $\frac{T}{s} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \ldots$; ergo si $\frac{T}{s} = t$, erit $a = ta'$; $b = tb'$; $c = tc'$ caet.

III. Deinde $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{ab}{a'b'}$; $\frac{a^3}{a'^3} = \frac{abc}{a'b'c'}$; et universe, si m indicat, quot sint partes et numeri, est $\frac{a^m}{a'^m} = \frac{abcd\ldots}{a'b'c'd'\ldots}$. Ejusmodi Ratio, quae est Productum ex aliis Rationibus, dici solet *ex his esse composita*; unde etiam voces *Ratio duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata*, caet.; ut $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{ab}{a'b'}$ est duplicata Ratio $\frac{a}{a'}$. Quare Rationes, compositae ex aequalibus Rationibus, inter se aequales sunt, atque igitur Proportionem constituunt (§. 171. 4.). Quoniam enim Ratio est numerus, quodcunque valet de numero, valet de Ratione. Ergo etiam in locum alicujus Rationis substitui potest alia Ratio ipsi aequalis (§. 5.) ut, si $\frac{a}{b} = \frac{cd}{ef}$, atque $\frac{c}{e} = \frac{g}{h}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{dg}{fh}$.

Animadv. De hisce Rationibus uberius agit Euclides (1). Tractat etiam eam Rationem inter

a,

(1) Lib. V. Prop. 20. 21. 22. 23. Lib. VIII. Prop. 11. 12. 18. 19. 26. 27.

$a, b, c, d \ldots$ et $a', b', c', d', \ldots$ ubi est $\frac{a}{b} = \frac{c'}{d'}$; $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$; $\frac{c}{d} = \frac{a'}{b'}$; ex quibus tamen etiam sequitur $\frac{a}{d} = \frac{a'}{d'}$. Etenim $ad' = bc' = cb' = a'd$, unde $\frac{a}{d} = \frac{a'}{d'}$. Hanc rationem, auctore Euclide, vocant *ex aequo perturbatim*, eam autem, quae est exposita N°. I. *ex aequo ordinatim* (1).

IV. Si a, b, c, d, atque a', b', c', d' ita inter se comparantur, ut sit $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, atque $\frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$, neque tamen sit $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, tamen erit $\frac{a+c}{a'+c'} = \frac{b+d}{b'+d'}$, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vel si $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$; id est, si antecedentes, vel consequentes termini proportionales sunt. Tum enim est $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ergo $\frac{a'+c'}{b'+d'} = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$, vel $\frac{a+c}{a'+c'} = \frac{b+d}{b'+d'}$ (190. X.) (2).

Ex his concludendum, esse $\frac{a+c}{a'+c'} = \frac{b+d}{b'+d'}$, vel si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$, ut in hisce numeris

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & a', & b', & c', & d' \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 10, & 15, & 20, & 25 \end{matrix}$$

ubi $\frac{6}{30} = \frac{8}{40}$; vel si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'} = \frac{c}{d}$; ut in hisce

a

(1) Conf. Euclides Lib. VII. Prop. 14. 22. Lib. V. Def. 18. 19. 20. Prop. 12.

(2) Conf. Euclides Lib. V. Prop. 24.

$\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & a', & b', & c', & d' \\ 3, & 4, & 60, & 80, & 6, & 8, & 12, & 16 \end{matrix}$, ubi $\frac{63}{18} = \frac{84}{24}$.

§. 197. *Coroll.* 7.

Quoniam, si aequales Fracti per aequales Fractos multiplicantur vel dividuntur, Producta vel Quoti inter se aequalia sunt (§. 171. 4.) colligimus, propositis aequationibus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ esse $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h}$, atque $\frac{a}{b} : \frac{e}{f} = \frac{c}{d} : \frac{g}{h}$, id est $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$ et $\frac{af}{be} = \frac{ch}{dg}$, atque similiter, si plurium Proportionum termini inter se multiplicantur. Termini a et e, b et f, c et g, d et h, vocantur termini *homologi* diversarum Proportionum. Quare *Singulis Proportionis terminis per singulos alius Proportionis terminos homologos multiplicatis vel divisis, Producta et Quoti novam efficiunt Proportionem.*

§. 198. *Coroll.* 8.

Si in his Proportionibus compositis idem est Factor in utroque termino ejusdem Rationis, vel in utroque termino antecedente, vel in utroque termino consequente, is Factor omitti potest; ut si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atque $\frac{b}{e} = \frac{f}{g}$, erit $\frac{a}{e} = \frac{cf}{dg}$ (§. 165. 7. atque §. 164.)

§. 199.

§. 199. *Coroll.* 9.

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, atque $\frac{a}{e}=\frac{c}{f}$, erit $\frac{b}{d}=\frac{e}{f}$, atque si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ et $\frac{g}{b}=\frac{h}{d}$, erit $\frac{a}{c}=\frac{g}{h}$; id est: *si duae Proportiones habent antecedentes terminos aequales, consequentes sunt proportionales, atque si consequentes habent aequales, antecedentes proportionales sunt.* Etenim $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e}{f}$, atque $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{g}{h}$ (§. 190. 5.).

§. 200. *Coroll.* 10.

Non solum ex formulis expositis §. 190. 4., si Proportionis $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ tres termini sunt cogniti, quartus reperitur terminus, (quod dicitur: *tribus datis numeris, quartum reperire proportionalem*) sed etiam *is numerus, qui aliquam efficit partem termini Proportionis.* Veluti, si proponitur $\frac{a}{b+x}=\frac{c}{x}$, erit $ax=bc+cx$ (§. 190. 1.), ergo $x=\frac{bc}{a-c}$ (§. 136.). Eodem modo reperitur, si $\frac{a}{b}=\frac{c-x}{d+x}$, $x=\frac{bc-ad}{a+b}$ atque si $\frac{a-x}{b-x}=\frac{c-x}{d-x}$, $x=\frac{ad-cb}{a+d-b-c}$.

§. 201. *Problema.*

Definire, quid consequatur ex aequalitate Fractorum $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{c}$.

Solutio.

Si in aequationibus §. 190. ponimus $b = c$, atque c pro d, colliguntur ea, quae ex aequatione $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ prodeunt, *ubi termini Fractorum efficiunt Proportionem continuam* (§. 62.). In his praecipue memoranda sunt:

I. $ac = b^2$, atque $b = \sqrt{ac}$ (§. 190. I.); id est: *terminus medius proportionalis aequalis est Radici secundae Producti terminorum extremorum* (1).

II. $a^{2m} c^{2m} = b^{4m}$ (§. 190. II.); atque $a^m c^m = b^{2m}$; id est: *inter duo Quadrata* a^{2m} *atque* c^{2m} *est unus terminus medius* $a^m c^m$. Ita inter Quadrata a^2 et c^2 terminus medius est ac; inter Quadrata a^4 et c^4 terminus medius est $a^2 c^2$, caet. (2)

III. $a = \frac{b^2}{c}$, atque $d = \frac{b^2}{c}$ (§. 190. IV.); id est: *alteruter terminus extremus aequalis est Quoto ex Quadrato termini medii, atque ex altero termino extremo.*

IV. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a+b}{b+c} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{b-a}{c-b}$ (190. X.).

V. $a + c > 2b$, vel $\frac{a+c}{2} > b$ (§. 190. XIV.); id est:

(1) Euclides Lib. VII. Prop. 20.

(2) Euclides Lib. VIII. Prop. 11.

est: *Dimidia Summa terminorum extremorum, si inaequales sunt, major est, quam terminus medius.*

In Proportione Arithmetica $a - b = b - c$, ubi medii termini sunt aequales, b est $= \frac{a+c}{2}$ (§. 195.). Quare *terminus medius proportionalis Arithmeticus inter duos numeros major est, quam Geometricus.*

VI. Si e est Exponens rationis, id est: si $e = \frac{a}{b}$, termini a, b, c, sunt a, $\frac{a}{e}$, $\frac{a}{e^2}$. Sed si ponimus $q = \frac{1}{e} = \frac{b}{a}$, hi termini sunt a, aq, aq^2. Ergo qualiscunque est q, sive integer, sive fractus, semper est $a + aq^2 > 2aq$ (V), vel $1 + q^2 > 2q$, vel $1 > q.(2-q)$ (§. 22.). Ex his cogitur, *quemlibet numerum negativum esse minorem, quam unitatem positivam.* Nam si $q > 2$, Productum $q.(2-q)$ fit negativum (§. 100. c.). Cum etiam sit $o > q.(2-q) - 1$ (§. 22.), dici potest, *quemlibet numerum negativum minorem esse, quam o.*

VII. Si $a = m^2$, id est: *si primus terminus est numerus quadratus, etiam tertius terminus c est quadratus.* Etenim termini sunt m^2, m^2q, m^2q^2, ergo $c = m^2q^2 = (mq)^2$ (§. 94.) (1).

VIII. Si $a = mn$, $c = m'n'$, atque $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$, unde $mn' = m'n$ (§. 190. I.), erit $ac = b^2 = m^2n'^2$, ergo $b = \sqrt{ac} = mn' = m'n$ est terminus medius (§. 201. I.) (2).

(1) **Euclides Lib. VIII. Prop. 22.**
(2) **Euclides Lib. VIII. Prop. 18.**

P. II.

P. II. C. II. SECTIO II.

DE PROGRESSIONE GEOMETRICA ET ARITHMETICA.

---

§. 202. *Series Quantorum. Definitio.*

Series dicitur ordo quidam et successio Quantorum, quae secundum aliquam legem generalem formantur. Haec Quanta, quae solent esse numeri, aut numeris designari, sunt *termini Seriei. Lex Seriei plerumque definit, quomodo ex antecedentibus terminis formentur consequentes.*

Termini Seriei possunt etiam esse partes ejusdem Quanti variabilis, atque progredi juxta Potestates alius Quanti variabilis, quae est Functio prioris. Exempla Serierum sunt allata §. 108. 114. 117. 118. 124—126.

Seriei species quaedam sunt *Progressiones*, quae *Geometricae* et *Arithmeticae* dici solent, sed melius dicuntur *Progressiones per Quotos*, atque *per Differentias.* Harum proprietates in hac Sectione contemplaturi sumus.

§. 203. *Series nata ex aequalitate Fractorum* $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}$ caet. *Definitio.*

Sit $q=\frac{b}{a}$, ergo termini a, b, c, d, e ... fiunt

fiunt $a, aq, aq^2, aq^3 \ldots aq^{m-1}$, atque ita formant Seriem quandam, quam *Progressionem Geometricam* vocant, ubi quilibet terminus oritur ex antecedente, multiplicato per q; qui dicitur *Exponens Progressionis*. Si m indicat, quotus sit terminus t, erit $t = aq^{m-1}$; itaque, si Progressio constat ex m terminis, ultimus terminus est $= aq^{m-1}$. Ejusmodi Progressionis exempla jam vidimus p. 134, atque p. 153. ubi a est unitas.

Si Exponens q major est unitate, quilibet terminus consequens, si signorum non habetur ratio, major est antecedente, atque Progressio dicitur *crescens*, vel *adscendens*; si autem q minor est unitate, quilibet terminus consequens minor est antecedente, atque Progressio dicitur *decrescens*, vel *descendens*. Itaque numeri

$3; 6; 12; 24; 48 \ldots$ vel $3; 3.2; 3.2^2; 3.2^3; 3.2^4 \ldots$

sunt in Progressione crescente, sed numeri

$12; 6.; 3.; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{8} \ldots$ vel $3.2^2; 3.2^1; 3.2^0; 3.2^{-1}; 3.2^{-2}; 3.2^{-3} \ldots$

sunt in Progressione decrescente.

§. 204. *Problema.*

Si Progressionis Geometricae a *est primus terminus;* t *est* m*timus terminus;* q *Exponens Progressionis;* s *Summa* m *terminorum, atque ex his quinque numeris* a, q, m, t, s *tres dati sunt, quaeritur reliquos calculo reperire.*

Solutio.

I. s hoc modo reperitur ex a, q, m.

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \ldots + aq^{m-1};$$

ergo $s - a = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \ldots + aq^{m-1}$,

atque $sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \ldots + aq^{m-1} + aq^m$;

ergo $s - a = sq - aq^m$, atque $s = \frac{a(q^m - 1)}{q - 1}$, vel

$$s = \frac{a(1 - q^m)}{1 - q} \text{ (§. 20 et 136.).}$$

Prior formula usurpari potest, si q est major unitate et positivus; posterior, si q est minor unitate vel negativus. Eadem etiam formula sequitur ex §. 128. 5. si b ponitur $= q$, atque $a = 1$; quoniam $s = a(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots + q^{m-1})$.

Exemplum. Sit $a = 5$, $q = 4$, $m = 12$, ergo $s = 5 + 20 + 80 + 320 \ldots + 5 \cdot 4^{11} = \frac{5 \cdot (4^{12} - 1)}{3}$ $= 27962025$, quoniam $4^{12} = 16777216$ (pag. 81.).

II. Summa etiam reperiri potest ex cognitis t, a et q. Nam $t = aq^{m-1}$, ergo $tq = aq^m$, atque $s = \frac{tq - a}{q - 1}$. In proposito exemplo est $t = 5.4194304$ (pag. 81.), $q = 4$, $a = 5$, ergo $s = \frac{83886080 - 5}{3}$ $= 27962025$.

Exemplo sit etiam Progressio, exposita p. 217.

$\frac{1}{(1+x)^m} + \frac{1}{(1+x)^{m-1}} \ldots + \frac{1}{1+x} = s$, ubi $t = \frac{1}{1+x}$; $q = 1 + x$; $a = \frac{1}{(1+x)^m}$. Ergo $s = \frac{tq - a}{q - 1}$

=

$$= \frac{1-\frac{1}{(1+x)^m}}{x} = \frac{(1+x)^m-1}{x.(1+x)^m} \text{ (§. 164.);}$$

quod idem p. 217. conclusimus ex Analogia.

III. Ex his tribus aequationibus

$$1.\ t = aq^{m-1}; \qquad 2.\ s = \frac{a(q^m-1)}{q-1}; \qquad 3.\ s = \frac{tq-a}{q-1};$$

colliguntur aliae (secundum §. 20 et §. 136.), quae solvendo huic Problemati inserviunt, hujus argumenti:

$$4.\ a = \frac{t}{q^{m-1}} \text{ ex aeq. 1.} \qquad 8.\ t = \frac{q^{m-1}\, s.(q-1)}{q^m-1} \text{ ex aeq. 1. et 5.}$$

$$5.\ a = \frac{s.(q-1)}{q^m-1} \text{ ex aeq. 2.} \qquad 9.\ q = \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}} \text{ ex aeq. 1. atque §. 174.}$$

$$6.\ a = tq - s.(q-1) \text{ ex aeq. 3.}$$

$$7.\ t = \frac{s.(q-1)+a}{q} \text{ ex aeq 3.} \qquad 10.\ q = \frac{s-a}{s-t} \text{ ex aeq. 3.}$$

$$11.\ s = \frac{t.\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}} - a}{\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}} - 1} = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - a^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - a^{\frac{1}{m-1}}} \text{ ex aeq. 3 et 9. atque §. 164.}$$

$$12.\ s = \frac{tq - \frac{t}{q^{m-1}}}{q-1} = \frac{t(q^m-1)}{(q-1)\,q^{m-1}} \text{ ex aeq. 3. et §. 164.}$$

Aliae formulae, ad hoc Problema solvendum aptae, mox explicabuntur.

$t = aq^{m-1}$ est lex Seriei, quae dicitur etiam *terminus generalis* (§. 202.).

§. 205. *Coroll.* 1.

Possumus etiam in his formulis uti secundo termino $b = aq$, veluti:

$$s-t=\frac{tq-a}{q-1}-t\ (\S.\ 205.\ 3.)=\frac{t-a}{q-1},$$

sed $b-a=a(q-1)$, ergo $s-t=\frac{(t-a)\,a}{b-a}$,

ergo $\frac{b-a}{a}=\frac{t-a}{s-t}$ (1).

Deinde $s-a=\frac{tq-aq}{q-1}$ (§. 205. 3.) $=\frac{atq-a^2q}{b-a}$

$$=\frac{bt-ab}{b-a},$$

aut $s-a=\frac{b.(t-a)}{b-a}$.

§. 206. *Coroll.* 2.

Si primus atque secundus terminus signo differunt, pro q ponendum est $-q$. Tum Series est: $a, -aq, aq^2, -aq^3, aq^4 \ldots \pm aq^{m-1}$, atque $s=\frac{a(1 \pm q^m)}{1+q}$, $t=\pm aq^{m-1}$.

Signum $+$ est, si m est numerus impar; $-$ autem, si m est numerus par; veluti, si $s=5-20+80-320\ldots-5.4^{11}$, erit $s=-\frac{5(4^{12}-1)}{5}$ $=-16777215$.

§. 207. *Coroll.* 3.

Si primus terminus est unitas, Progressio est $1, q, q^2, q^3, q^4 \ldots q^{m-1}$, quae eadem oritur, si eam, quae incipit ab a, dividimus per

(1) Hoc demonstrat Euclides IX. 35.

per a; ergo $s = \frac{q^m - 1}{q - 1}$ (1), (confer. §. 128. 16, ubi ponatur $a = q$), aut $s = \frac{tq - 1}{q - 1} = \frac{t \,.\, t^{\frac{1}{m-1}} - 1}{t^{\frac{1}{m-1}} - 1}$;

$t = s - \left(\frac{s-1}{q}\right)$; $q = \frac{s-1}{s-t} = t^{\frac{1}{m-1}}$ (§. 204.)

Quae de hac Progressione docet Euclides (2), per se sunt perspicua, veluti: *terminus tertius, quintus, septimus... sunt numeri quadrati; quartus, septimus, decimus ... sunt cubi; septimus, decimus tertius, ... sunt simul et quadrati et cubi ...* caet. *Si Exponens q est quadratus vel cubus, vel alius Potestatis, omnes termini sunt ejusdem Potestatis. Si q est numerus integer, quilibet minor terminus est Divisor termini majoris. Quilibet numerus primus, qui est Divisor ultimi termini, etiam Divisor est omnium reliquorum* (praeter unitatem). *Si q est numerus primus, ultimus terminus non alios habet Divisores, nisi terminos antecedentes.* Hujusmodi etiam alia sunt, quae ad omnem Progressionem pertinent, ut: *Exponens q est numerus fractus, si primus et secundus terminus, a et aq, sunt inter se primi, omnesque tum reliqui termini sunt fracti. Si a et aq^{m-1} sunt inter se primi, aq^m, aq^{m+1} ... sunt*

(1) Si in hac aequatione est $q = 2$ et $m = 64$, invenitur numerus indicatus p. 39.

(2) Euclides Lib. IX. Prop. 8, 9, 10, 11, 12, 13.

sunt Fracti. Si a est cubus, etiam quartus terminus cubus est (1). *Si primus terminus est Divisor ultimi termini, etiam Divisor est secundi termini* (2).

§. 208. *Coroll.* 4.

Si convertimus Progressionem:

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 \ldots + aq^{m-2} + aq^{m-1}, \text{ erit}$$
$$s = aq^{m-1} + aq^{m-2} + aq^{m-3} + aq^{m-4} \ldots + aq + a.$$

In hac posteriore Progressione Exponens est $\frac{1}{q}$, atque hac in re sola differt a priore. Ergo in formulis primus terminus in postremum, postremus in primum mutari potest, dummodo Exponens mutetur in $\frac{1}{q}$; quod etiam convenit aequationi $q = \frac{s-a}{s-t}$ (§. 204. 10.), ubi $\frac{1}{q} = \frac{s-t}{s-a}$. Ex hoc etiam perspicitur veritas hujus enunciationis: *Productum ex duobus terminis, qui aeque distant a primo atque ab ultimo termino est* $= a^2 q^{m-1}$ *sive aequale Producto hujus primi atque ultimi termini. Si numerus terminorum est impar, aliquis est terminus medius, qui aeque ab utroque distat, atque igitur est Radix secunda ex* $a^2 q^{m-1}$; *id est* $= a \cdot q^{\frac{m-1}{2}}$. *Ergo est* $\frac{m-1}{2}$ *terminus.*

(1) Euclides Lib. IX. Prop. 16, 17. Confer. Lib. VIII. Prop. 6. 23.

(2) Euclides Lib. VIII. Prop. 7.

§. 209. *Coroll.* 5.

Primae, secundae, tertiae, quartae, quintae ... Differentiae terminorum Progressionis (1), *efficiunt novas Progressiones, quarum Exponentes iidem sunt atque Progressionis, ex qua sunt ortae.* Nam si s', s'', s''' ... sunt Summae primarum, secundarum, tertiarum ... Differentiarum, erit

$$s = a(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5 \ldots)$$

$$s' = a\Big((1-q)+(q-q^2)+(q^2-q^3)+(q^3-q^4)+(q^4-q^5)\ldots\Big)$$

$$= a.(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4 \ldots)$$

ergo $s'' = a.(1-q^2)(1+q+q^2+q^3 \ldots)$

$$s''' = a.(1-q)^3(1+q+q^2\ldots);\ s^{IV} = a.(1-q)^4(1+q\ldots)$$

§. 210. *Coroll.* 6.

Rursus numeri a, b, c, d, e ... sunt in Progressione Geometrica, si proportionales sunt ipsorum Differentiis:

id est $a:b=b:c=c:d=d:e$ ... si

$a:a-b=b:b-c=c:c-d=d:d-e$ caet.

Etenim si $a:a-b=b:b-c$, erit $ab-ac=ab-b^2$ (§. 190. 1.);

ergo $ac=b^2$, id est: $a:b=b:c$. Eadem ratione, si $b:b-c=c:c-d$, erit $cb-bd=bc-c^2$, ergo $bd=c^2$, id est: $b:c=c:d$; et ita de aliis.

§. 211. *Coroll.* 7.

Ex formula 10. $q=\frac{s-a}{s-t}$ sequitur $q-1=\frac{s-a}{s-t}-1$

$$=s-a$$

(1) Quid sit *secunda*, *tertia*, caet. *Differentia Seriei* explicatum est §. 125.

$= \frac{s - a - s + t}{s - t} = \frac{t - a}{s - t}$ (1); ergo $t - a = (q - 1)(s - t)$. Ergo, *si q est vel 2, vel 3, vel 4, caet. ultimi et primi termini Differentia aequalis est simplici Summae, vel duplae, vel triplae ... Summae omnium terminorum, dempto ultimo.*

Sed si invertitur Progressio, ita ut primus terminus fiat ultimus, ultimus autem primus, q mutatur in $\frac{1}{q}$ (§. 207). Ergo tum $a - t = \left(\frac{1}{q} - 1\right)(s - a)$. Ergo si q est $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{q} - 1$ est 1, vel 2, vel 3, ex quo colligimus:

Si q est vel $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$ ...; Differentia ultimi et primi termini aequalis est simplici Summae, vel duplae vel triplae.... Summae omnium terminorum, dempto primo.

§. 212. *Coroll.* 8.

In omni Progressione Geometrica terminus primus est ad tertium, vel ad quartum, vel ad quintum ... ut sunt inter se secundae, vel tertiae, vel quartae ... Potestates numeri primi et secundi. Universe, *duo quilibet termini Progressionis sunt inter se, ut duo primi termini ad eam Potestatem evecti, ut ejus Exponens indicet, quot terminis alteruter terminus ab altero distet.* Ita quartus terminus est

(1) Haec est Euclidis Lib. IX. Prop. 35.

est ad nonum, ut quinta Potestas primi termini ad quintam Potestatem secundi termini, atque terminus *nonus* eodem modo reperitur per quartum terminum, ut *quintus* terminus per *primum*.

§. 213. *Coroll.* 9.

Inter duos quoslibet Progressionis Geometricae terminos alii interponi possunt, qui cum utroque termino novam efficiunt Progressionem, et quorum numerus ad libitum sumi potest. Nam si novae hujus Progressionis a est primus, atque t ultimus terminus, Exponens est $\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ (§. 204. 9.) ubi m indicat, quot sint Progressionis termini, atque igitur $m-2$, quot sint termini interponendi, ut:

si $m=3$, Progressio est a ; $a\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; t

si $m=4$, ... a ; $a\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$; $a\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$; t

si $m=5$, ... a ; $a\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$; $a\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; $a\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{4}}$; t.

Ergo si inter duos quoslibet terminos vicinos Progressionis $1, q, q^2, q^3$ ... ita interponuntur tres termini, prodit haec Progressio:

1 ; $q^{\frac{1}{4}}$; $q^{\frac{1}{2}}$; $q^{\frac{3}{4}}$; q ; $q^{\frac{5}{4}}$; $q^{\frac{3}{2}}$; $q^{\frac{7}{4}}$; q^2 ; $q^{\frac{9}{4}}$; $q^{\frac{5}{2}}$ . . . ; et universe, si $n-1$ termini sunt interponendi,

1 ; $q^{\frac{1}{n}}$; $q^{\frac{2}{n}}$; $q^{\frac{3}{n}}$ . . . $q^{\frac{n-1}{n}}$; q ; $q^{\frac{n+1}{n}}$; $q^{\frac{n+2}{n}}$ . . . . . q^2 . . . .

Sit

Sit $n=4$, $q=16$, nova Progressio est:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 ....

Talis terminorum interpositio inter duos vicinos terminos cujuslibet Seriei a recentioribus dici solet *Interpolatio*, cujus usus in Mathesi mixta maximus est.

Simplicissima interpolatio est, si $a=c^r$; $t=d^r$; atque $r=m-1$. Tum enim $\frac{t}{a}=\left(\frac{d}{c}\right)^r$, atque $q=\frac{d}{c}$, veluti:

c^2; cd; d^2,
c^3; c^2d; cd^2; d^3,
c^4: c^3d; c^2d^2; cd^3; d^4,
c^r; $c^{r-1}d$; $c^{r-2}d^2$ ... cd^{r-1}; d^r (1).

§. 214. *Animadv.*

Hoc sensu accipi potest, si dicitur *m*timus terminus, atque m est numerus fractus, ut adeo significet terminum aliquem interpositum inter duos Progressionis terminos. Sit $m=f+\frac{g}{h}$, ubi f, g, h, sunt numeri integri atque $\frac{g}{h}$ Fractus verus. Ergo inter f terminum atque $f-i$ terminum sunt interpositi $h-1$ termini, ex quibus *m*timus terminus locum g occupat. Sit Progressio 2,
6,

(1) Id demonstrat Euclides Lib. VIII. Prop. 11. 12.

6, 18, 54, atque quaeratur $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ terminus. Hic terminus interpositus est inter 18 et 54. Progressio inter hos duos numeros est: $18; 18 . 3^{\frac{1}{4}}; 18 . 3^{\frac{2}{4}}; 18 . 3^{\frac{3}{4}}; 54$. Ergo tertius terminus quaesitus est $18 . 3^{\frac{3}{4}}$.

Sed quoniam m terminus, si m est fractus, non potest esse terminus Seriei ipsius, m, qui est in formulis §. 204, semper debet esse positivus; id quod etiam in fundamentis positum est in eliciendis iis formulis. Si m fractus ponitur, neque vera Summa, neque vera Ratio reperitur.

§. 215. *Coroll.* 10.

Quo major est m, id est, quo plures sunt Progressionis termini, eo major fit Summa. Si q major est unitate, atque m est infinitus, id est omni finito numero major, Summa etiam fit infinita. Cum sit $s = \frac{a(q^m - 1)}{q - 1} = \frac{aq^m}{q - 1} - \frac{a}{q - 1}$ posterior pars $\frac{a}{q - 1}$ permanet idem, si numerus terminorum augetur, sed prior pars $\frac{aq^m}{q - 1}$ magis magisque increscit propter Factorem q^m (§. 170. *f.*). Ergo posterior pars evanescit prae priore, si m est infinitus, adeo ut Summa Seriei, quae tum infinita dicitur, sit $\frac{a}{q - 1} . q^m$. Summa fit infinita, quoniam termini crescunt in hoc progressu.

Non ita est, si q minor est unitate. Nam quoniam termini magis magisque diminuuntur, Summa restat finita, etiamsi m sit infinitus. Haec Summa definiri potest per aequationem:

$s = \frac{a.(1-q^m)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^m}{1-q}$. Prior pars non pendet ex m, id est, restat idem, quantuscunque sit terminorum numerus. Posterior autem $\frac{a}{1-q}.q^m$ eo fit minor, quo major est m, quoniam q est fractus verus (§. 170. e.). Quare evanescit prae priore, si m est infinitus. Ex quo sequitur Summam Progressionis infinitae esse $s = \frac{a}{1-q}$. Quod etiam perspicitur ex aequatione $s = \frac{a-tq}{1-q}$, quoniam postremus terminus tum omni finito numero minor fit; unde $s = \frac{a}{1-q}$.

Itaque, si $q < 1$, erit $\frac{a}{1-q} = a(1+q+q^2+q^3 \ldots$ ad infinitum), atque si q est negativus:

$\frac{a}{1+q} = a(1-q+q^2-q^3+q^4 \ldots$ ad infinitum).

Ponamus $a = 1$, atque $q = \frac{1}{2}$,

erit $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ ad infinitum;

ergo $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ ad inf.

$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ ad inf.

ergo $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \ldots$ ad inf.

Sit

Sit $a = 1$, atque $q = \frac{1}{f}$; erit $s = \frac{1}{1-\frac{1}{f}} = \frac{f}{f-1}$;

ergo $s = 1 + \frac{1}{f} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{f^3} \ldots$ ad inf. $= \frac{f}{f-1}$;

unde $\frac{1}{f} + \frac{1}{f^2} + \frac{1}{f^3} \ldots$ ad inf. $= \frac{f}{f-1} - 1 = \frac{1}{f-1}$.

Veluti $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \ldots$; $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \ldots$; $\frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \ldots$

Explicatis his legibus Progressionis Geometricae rei accommodatum esse videtur, una contemplari leges *Progressionis Arithmeticae*, sive Seriei Arithmeticae simplicis, de qua jam facta est mentio (§. 123. p. 120.). Magna enim est convenientia et arctum vinculum inter has duas Progressiones.

§. 216. *Progressio Arithmetica. Definitio.*

Progressio Arithmetica vocari solet illa Series Arithmetica, in qua primae terminorum Differentiae sunt aequales, quam §. 123. p. 120. diximus *Seriem Arithmeticam simplicem*, seu *primi ordinis*. Quare si primus terminus est a, Differentia communis est d, atque t est $m$timus terminus, Progressio est:

$a; a+d; a+2d; a+3d; a+4d \ldots; a+(m-1)d$; ubi $t = a+(m-1)d$.

Si d est numerus positivus, Progressio vocatur *crescens*; ut $3; 7; 11; 15 \ldots; 3+(m-1)4$, si

si autem est negativus, Progressio vocatur *decrescens*, ut 11; 7; 3; — 1; — 5; — 7 ...; 11 — $(m-1)4$. In priore d est $=4$; in posteriore autem $d=-4$.

Ergo inter Progressionem Geometricam et Arithmeticam ea est convenientia, ut, quemadmodum illa ex Geometricis, ita haec constet ex Arithmeticis Proportionibus *continuis*, id est, quarum medii termini sunt aequales. Nam si termini indicantur literis a; b; c; e; f ...., erit $b-a=c-b=e-c=f-e \ldots = d$.

§. 217. *Coroll.* 1.

Possumus invertere Progressionem, ita ut primus terminus fiat ultimus, ultimus autem primus, dummodo signum Differentiae communis mutetur. Nam si invertitur, atque Summa Progressionis litera s indicatur, erit utraque aequatio:

$$s = a \quad + a + d \quad + a + 2d \quad \ldots + a + (m-1)d.$$
$$s = a + (m-1)d + a + (m-2)d + a + (m-3)d \ldots\ldots + a$$

Prioris Differentia communis est d; posterioris autem $-d$.

§. 218. *Coroll.* 2.

Si terminos aequationis in unam Summam colligimus, erit:

$$2s = (2a + (m-1)d) + (2a + (m-1)d) + (2a + (m-1)d) + (2a + (m-1)d) \ldots\ldots$$

Termini igitur secundi membri hujus aequationis omnes sunt inter se aequales. Numerus autem

tem

tem ipsorum est m, quoniam Progressio constat ex m terminis. Ergo

$$2s = m.\left(2a+(m-1)d\right),\ \text{atque}\ s = \frac{m}{2}\left(2a+(m-1)d\right)$$

atque quoniam ultimus terminus $t = a+(m-1)d$, erit etiam $s = \frac{m}{2}.(a+t)$.

Ita si $a=3$, $m=6$, $d=4$, erit

$$s = 3+7+11+15+19+23$$
$$s = 23+19+15+11+7+3$$
$$2s = 6\ .\ 26,\ \text{ergo}\ s = 3.26 = 78.$$

§. 219. *Coroll.* 3.

Ergo Summa primi atque ultimi termini, quae est $a+t=2a+(m-1)d$, *aequalis est Summae duorum terminorum quorumlibet, ex quibus alteruter tantum a primo distat termino, quantum alter ab ultimo.* Hi enim duo termini sunt illi, qui §. 217. sunt in eadem linea verticali, ut $a+2d$, atque $a+(m-3)d$, vel ut §. 218, sunt 11 et 15. *Si numerus terminorum* m *est impar, aliquis est terminus medius, qui aeque distat a primo atque ab ultimo termino, qui igitur aequalis est dimidiae Summae illorum*, id est $=\frac{a+t}{2}$ $=\left(\frac{2a+(m-1)d}{2}\right)$, atque ab iis distat $\frac{m-1}{2}$ terminis; ut, si unus terminus additur Progressioni §. 218, ita ut m fiat $=7$, erit

$$s = 3+7+11+15+19+23+27$$
$$s = 27+23+19+15+11+7+3.$$

Ubi terminus medius est 15, qui tribus terminis dis-

distat a primo atque ultimo, atque est $= \frac{3+27}{2}$.

§. 220. *Coroll.* 4.

Si Progressio est decrescens, atque igitur d *est negativus, Summa est positiva vel negativa, si* $2a$ *est major vel minor quam* $(m-1)d$. *Summa autem est* $=0$, *si* $2a=(m-1)d$. Ut si $a=11$, $d=4$, atque $m=6$, erit $s=6$, sed si $m=7$, erit $s=-7$. Summae enim sunt:

$s=11+7+3-1-5-9=6$

$s=11+7+3-1-5-9-13=-7$.

Si autem $a=12$, $d=4$ et $m=7$, erit

$s=12+8+4+0-4-8-12=0$;

ubi termini sese mutuo tollunt.

§. 221. *Problema.*

Propositis Progressionis Arithmeticae a, d, m, t, s; *ex tribus datis reliqua reperire.*

Solutio.

Ex aequationibus:

$$1.\ t=a+(m-1)d;\quad 2.\ s=\frac{(a+t)m}{2};\quad 3.\ s=\frac{(2a+(m-1)d)m}{2}$$

expositis §. 216 et 218. reliquae deduci possunt, quae solvendo huic Problemati inserviunt.

$4.\ a=t-(m-1)d.$ (ex aeq. 1.) $\quad 5.\ a=\frac{2s}{m}-t$.(2).

$6.\ a=\frac{s}{m}-\frac{(m-1)d}{2}$ (3). $\quad 8.\ t=\frac{s}{m}+\frac{(m-1)d}{2}$ (6 et 7.)

$7.\ t=\frac{2s}{m}-a$ (5). $\quad 9.\ s=\frac{m}{2}\left(2t-(m-1)d\right)$ (8).

10.

10. $m = 1 + \frac{t-a}{d}$ (1), unde $m - 1 = \frac{t-a}{d}$.

11. $m = \frac{2s}{a+t}$ (2), unde $m - 1 = \frac{2s-a-t}{a+t}$.

12. $d = \frac{t-a}{m-1}$ (1).

14. $d = \frac{(t-a)(t+a)}{2s-a-t}$ (12. 11).

13. $d = \frac{2s-2am}{m.(m-1)}$ (6).

15. $d = \frac{2mt-2s}{m.(m-1)}$ (13. 11 vel 9).

16. $s = \frac{t+a}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d} = \frac{t+a}{2}\left(1+\frac{t-a}{d}\right)$ (14).

17. $t^2 + td = 2ds + a^2 - ad$ (16).

18. $a^2 - ad = t^2 + td - 2ds$ (17).

19. $m^2 + \left(\frac{2a-d}{d}\right)m = \frac{2s}{d}$ (13).

20. $m^2 - \frac{(2t+d)m}{d} = -\frac{2s}{d}$ (8).

Ergo quaelibet Quantitatum a, d, m, t, s quatuor aequationibus definitur. Exemplo inservire possunt Series §. 216. Quomodo autem ex aequationibus 17. 18. 19. 20 possint reperiri t, a, m in posterum explicabitur.

§. 222. *Coroll.* 1.

Progressio, quae incipit ab unitate hujusmodi est:

$1;\ 1+d;\ 1+2d;\ 1+3d\ \ldots\ 1+(m-1)d$

ergo 1. $t = 1+(m-1)d = \frac{2s}{m} - 1 = \frac{s}{m} + \frac{(m-1)d}{2}$.

2. $s = \frac{(1+t)m}{2} = \frac{(2+(m-1)d)m}{2} = \left(\frac{t+1}{2}\right)\left(1+\frac{t-1}{d}\right)$
$= \frac{m}{2}\left(2t-(m-1)d\right)$.

3. $m = \frac{2s}{1+t} = 1 + \frac{t-1}{d}$.

$$4.\ d = \frac{t-1}{m-1} = \frac{2.(s-m)}{m\,(m-1)} = \frac{t^2-1}{2s-(t+1)} = \frac{2\,(mt-s)}{m.(m-1)}.$$

Ergo si d est $=$	1 ;	2 ;	3 ;	4 ;
erit t $=$	$m.$;	$2m-1$;	$3m-2$;	$4m-3$;
atque s $=$	$\frac{m(m+1)}{1.2}$;	m^2 ;	$\frac{(3m-1)m}{2}$;	$(2m-1)m$;

Ex his Progressionibus duae sunt commemorandae. Prior est *Series numerorum naturalium*, ubi $d=1$, $t=m$, atque $s=1+2+3+4+5\ldots+m$ $=\frac{m(m+1)}{2}$ (§. 118.). Altera est *Series numerorum imparium*, ubi $d=2$, $t=2m-1$, atque $s=1+3+5+7+9+11\ \ldots\ +2m-1=m^2$. *Ergo Summa numerorum omnium imparium, ab unitate usque* ad $2m-1$, *est Quadratum numeri* m, *qui indicat quot sint termini.* Idem patet ex iis, quae de Differentiis Quadratorum dicta sunt (§. 124.).

§. 223. *Coroll.* 2.

Simplicior etiam fit Progressio, si $a=d$, ergo $s=d+2d+3d+4d\ldots+md=d\,(1+2+3\ldots+m)$ $=\frac{md.(m+1)}{1.2}$ (§. 222.), ergo $t=md=\frac{2s}{1+m}$;

$$m=\frac{t}{d}=\frac{2s}{t}-1;\quad d=\frac{t}{m}=\frac{2s}{m.(m+1)};$$

$$s=\frac{t.(t+d)}{2d}=\frac{t.(m+1)}{2}.$$

Si termini dividuntur per d, oritur Series naturalis numerorum. Si $=d=2$, $t=2m$, $s=m.(m+1)$, *quae est igitur Summa omnium numerorum parium usque ad numerum* $2m$.

Exem-

Exemplo sit hoc Problema. Duo operarii in se susceperunt effodiendum puteum altitudinis 12 metrorum, pacto pretio 117 florenorum. Inter eos ita convenit, ut ea pars pretii, quam uterque acciperet, esset in arithmetica Progressione, ad rationem altitudinis, ad quam pervenisset. Unus effodit puteum usque ad 8 metra, alter opus perfecit. Quaeritur, quantum uterque accepturus sit pecuniae.

Solutio.

Sunt duae Progressiones. Prior est:

$$s = d + 2d + 3d + 4d \ldots + 12d = 117 \text{ Floreni};$$

$$\text{ergo } d = \frac{2s}{m.(m+1)} = \frac{234}{12 . 13} = \frac{3}{2} \text{ Floreni.}$$

Posterior est:

$$s' = d + 2d + 3d \ldots 8d.$$

$$s' = \frac{m.(m+1)d}{1 . 2.} = \frac{8 . 9 . \frac{3}{2}}{2} = 54 \text{ Floreni.}$$

Ergo prior operarius accipit 54 Florenos; posterior 117 — 54, id est 63 Florenos (1).

§. 224. *Coroll.* 3.

Si ultimus terminus est = o, erit:

$$a = (1-m)d = \frac{2s}{m}; m = 1 - \frac{a}{d} = \frac{2s}{a}; d = \frac{a}{1-m} = \frac{a^2}{a-2s} = \frac{2s}{m.(1-m)};$$

$$s = \frac{am}{2} = \frac{m.(1-m)d}{2}.$$

Ergo, quod etiam ex natura rei patet, si a positivus est, d est negativus, atque s positivus; si a

(1) Kästner, Fortsetzung der Rechenkunst. p. 46.

si a negativus est, d est positivus, atque s negativus.

§. 225. *Coroll.* 4.

Ut Summa Progressionis sit $= o$, debet esse $t = -a = \frac{(m-1)d}{2}$, ergo $m = 1 - \frac{2a}{d}$; $d = \frac{-2a}{m-1}$. Sed quoniam $t = -a$, nonnulli fracti in aequationibus §. 221. fiunt formae $\frac{o}{o}$; ut $m = \frac{2s}{a+t} = \frac{o}{o}$ $= 1 - \frac{2a}{d}$, atque $d = \frac{t^2 - a^2}{2s - (a+t)} = \frac{o}{o} = \frac{-2a}{m-1}$. Confer. §. 162. 6.

§. 226. *Coroll.* 5.

Si Progressio est decrescens, primusque terminus est positivus, continua diminutione (ubi m est indefinitus) consequentes termini tandem fiant negativi necesse est. Ergo in hac Progressione *numeri negativi minores sunt positivis, atque eo minores, quo ipsorum Quantitas absoluta minor est.* Cujus rei ratio perspicua est. Numeri enim negativi orti sunt ex Subtractione, eo usque progressa, ut non amplius restet, a quo quid subtrahatur, ita ut solummodo, quantum sit subtrahendum, signo — indicetur (Confer. §. 201. 6.).

§. 227. *Coroll.* 6.

Ut in geometrica (§. 213.), ita in arithmetica Progressione, duobus quibuslibet terminis ad libitum alios terminos interponere possumus, qui cum ipsis novam Progressionem arithmeticam constituunt.

Ita

Ita si inter a atque $a+d$, unus, duo, vel tres interponuntur termini, exsistunt Progressiones:

1. $a; a+\frac{d}{2}; a+d.$ 2. $a; a+\frac{d}{3}; a+\frac{2d}{3}; a+d.$

3. $a; a+\frac{d}{4}; a+\frac{d}{2}; a+\frac{3d}{4}; a+d$, et universe si $n-1$ interponuntur termini, Progressio est:

$$a; a+\frac{d}{n}; a+\frac{2d}{n}; a+\frac{3d}{n}; \ldots a+\frac{(n-1)d}{n}; a+d;$$

ubi Differentia communis est $\frac{d}{n}$.

Ita etiam quaeri possit $m$timus terminus, etiamsi m sit numerus fractus. Velut si $m = 3\frac{2}{3}$; $a = 12$; et $d = 3$; erit $t = a+(m-1)d = 12+8 = 20$. Id autem indicat, t non esse vere terminum ipsius Progressionis, sed novae cujusdam Progressionis, interpositae inter tertium et quartum terminum, cujus secundum locum occupet t, et cujus Differentia communis sit $\frac{d}{3} = 1$; adeo ut Progressio sit:

$12; 15; 18; (19; \overset{t}{20}) 21 \ldots$

Sed quoniam t non est vere terminus Progressionis, cujus primus terminus sit 12, et Differentia communis $= 3$, Summa non reperitur, si m est fractus, quoniam id sibi repugnet. Ita si m foret $3\frac{2}{3}$, esset $s = \frac{(a+t)m}{2} = \frac{32 \cdot 11}{6} = 58\frac{2}{3}$, quod falsum sit necesse est, quoniam omnes termini sunt integri (Confer. §. 214.).

P. II. C. II. SECTIO III.

DE PRIMIS NOTIONIBUS LOGARITHMORUM.

§. 228. *Logarithmi. Definitio.*

Si aliqua est Progressio geometrica, cujus termini sunt Potestates ejusdem Factoris q, ut:

q^{-n}; $q^{-(n-1)}$; $q^{-(n-2)}$...; q^{-3}; q^{-2}; q^{-1}; q^0; q^1; q^2; q^3; q^4;...; q^n

aut $\frac{1}{q^n}$; $\frac{1}{q^{n-1}}$; $\frac{1}{q^{n-2}}$...; $\frac{1}{q^3}$; $\frac{1}{q^2}$; $\frac{1}{q}$; 1; q; q^2; q^3; q^4;...; q^n

ubi Exponentes sunt:

$-n$; $-(n-1)$; $-(n-2)$...-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4;...; n,

hi Exponentes, si n est numerus integer, formant Progressionem arithmeticam numerorum naturalium, atque dicuntur *Logarithmi eorum terminorum Progressionis geometricae, quorum sunt Exponentes.* Ita -3, $+3$ et $-(n-1)$ et $n-1$, sunt Logarithmi numerorum $\frac{1}{q^3}$; q^3; $\frac{1}{q^{n-1}}$; q^{n-1}. Talem conjunctionem numerorum cum ipsorum Logarithmis dicunt *Systema logarithmicum*, quod definitur numero q, qui ejus *basis* dicitur. Verum cum q possit esse quilibet numerus determinatus (excepta unitate ipsa), *possunt esse Systemata numero infinita.* Velut Systema, cujus basis esset *duo*, hujusmodi foret.

Numerorum $\frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{2^{n-1}}$... $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8 ...; 2^n

Logar. sunt $-n$; $-(n-1)$ ... -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 ...; n.

Ex

Ex his autem duo Systemata sola sunt in usu.

Prius est, cujus basis est 10, ergo eadem est atque Systematis decadici. In hoc igitur

Numeror. $\frac{1}{10^n}$; $\frac{1}{10^{n-1}}$...; $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10}$; 1; 10; 100; 1000; 10000...

Log. sunt $-n$; $-(n-1)$...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4...

Hi Logarithmi dicuntur *vulgares*, iisque plerumque Mathematici utuntur in calculis, propter maximum commodum, quod eorum affert convenientia cum Systemate decadico. Vocantur etiam Briggiani, quoniam ab *Henrico Briggs*, *Anglo*, primum computati fuerunt.

Posterius est Systema, quod dicitur *naturale*; cujus basis est inter 2 et 3 interposita. Quaenam sit ejus origo, in posterum explicabitur. Hi Logarithmi etiam dicuntur *Neperiani*, ab eorum inventore et computatore *Neper*, *Scoto*; vel etiam *hyperbolici*, quoniam curvis, quae *Hyperbolae aequilaterae* dicuntur, aliqua est proprietas, quae ad Logarithmos refertur.

Si inter q^0 et q^1, inter q^1 et q^2, atque omnino inter duos quoslibet sibi proximos terminos q^m et q^{m+1} vel q^{-m} et $q^{-(m-1)}$ alios interponimus, ut dictum est §. 213, hi termini sunt etiam in geometrica, eorumque Exponentes in arithmetica Progressione. Quoniam autem quotlibet terminos interponere possumus, patet, nullum esse numerum, cui suus non sit Logarithmus.

§. 229. *Coroll.* 1.

Ex his sequitur, hanc simpliciorem posse dari De-

Definitionem Logarithmorum: *Logarithmi sunt Exponentes numerorum exponentialium, quibus eadem est Radix, eorumque coniunctio cum his numeris, ita ut ex Exponente cognosci possit numerus, atque Exponens ex numero, efficit Systema logarithmicum. Radix communis* vocatur *basis Systematis.* Hoc igitur repraesentari potest aequatione $a^x = y$, ubi y est numerus, x ejus Logarithmus, a basis Systematis; ex quo continuo sequitur *cuilibet numero* y *esse suum Logarithmum* x.

Animadv. Nomen ipsum *Logarithmus* (λόγων ἀριθμὸς) significat *numerum Rationum;* vel numerum, qui indicat, *quotupla* sit Ratio. Nam si Ratio fundamentalis est $q = \frac{b}{a}$, duplicata Ratio est $q^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$; triplicata est $q^3 = \left(\frac{b}{a}\right)^3 \ldots$ idque Logarithmis 2 . 3 ... indicatur (Confer. §. 196. 3.) Melius autem et simplicius Logarithmi habentur pro *Exponentibus numerorum exponentialium, quorum Radix communis est basis Systematis logarithmici.*

§. 230. *Coroll.* 2. *Usus Logarithmorum.*

Ponamus Tabulas alicujus Systematis definiti logarithmici, v. c. Logarithmorum vulgarium, esse confectas, ex quibus reperire possimus Logarithmum cujusque numeri, atque igitur etiam numerum, si ejus cognitus est Logarithmus. Usus harum Tabularum patet ex natura numerorum exponentialium, quam in Multiplica-

tio-

tione et Divisione exposuimus. Nam si numeri sunt a^x, a^y, a^z ... atque a est basis Systematis, x, y, z ... sunt Logarithmi horum numerorum; quod ita designemus $x = \text{Log. } a^x$, $y = \text{Log. } a^y$, caet. Hinc prodeunt aequationes:

I. $x+y = \text{Log. } a^x + \text{Log. } a^y$; sed $a^x a^y = a^{x+y}$, (§ 91.) ergo $x+y = \text{Log. } (a^x a^y)$; ex quo colligimus $\text{Log. } (a^x a^y) = \text{Log. } a^x + \text{Log. } a^y$.

Similiter cum sit $a^x a^y a^z = a^{x+y+z}$, erit $x+y+z = \text{Log. } (a^x a^y a^z) = \text{Log. } a^x + \text{Log. } a^y + \text{Log. } a^z$, et ita de pluribus Factoribus. Ergo *Summa Logarithmorum plurium numerorum aequalis est Logarithmo Producti horum numerorum:* ut Log. 6 + Log. 8 + Log. 20 = Log. 960. Quare ad reperiundum Productum trium numerorum p, q, r, eorum Logarithmi in Tabulis quaerendi sunt, et in unam Summam colligendi. Cognita autem hac Summa, (cum sit $\text{Log. } p + \text{Log. } q + \text{Log. } r = \text{Log. } (pqr)$) in iisdem Tabulis reperitur ipsum Productum pqr.

II. Quoniam $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ (§. 139.), sequitur

$$x-y = \text{Log. } (a^{x-y}) = \text{Log. } a^x - \text{Log. } a^y = \text{Log. } \left(\frac{a^x}{a^y}\right);$$

id est: *Differentia Logarithmorum duorum numerorum aequalis est Logarithmo Quoti ex his numeris*, ut Log. 1728 — Log. 12 = Log. 144. Quare, ad reperiundum Quotum $\frac{p}{q}$, in Tabulis quaerendi sunt Log. p et Log. q, atque posterior subtrahendus est priori. Cognito Residuo, quod

est

est Log. $\left(\frac{p}{q}\right)$, ipse Quotus $\frac{p}{q}$ in Tabulis reperitur.

III. $(a^x)^m = a^{mx}$ (§. 93 §. 171. 5.), ergo mx = Log. $(a^{mx}) = m$ Log. a^x; id est: *Logarithmus cujuslibet numeri a^x, si per m fuerit multiplicatus, fit Logarithmus* mtimae *Potestatis hujus numeri; ubi m potest esse quilibet numerus, sive integer, sive fractus, sive mixtus;* ut 3 Log. 12 = Log. 12^3 = Log. 1728. Quare si v. c. quaeritur tertia Potestas numeri p, Logarithmus numeri p triplicandus est, quo facto redditur Logarithmus numeri p^3, qui igitur numerus in Tabulis reperitur. Si autem quaeritur tertia Radix numeri p, m est fractus $= \frac{1}{3}$; quare tertia pars Logarithmi p est Logarithmus tertiae Radicis hujus numeri.

§. 231. *Exempla.*

Exempla, quae ad usum Logarithmorum referuntur, hujusmodi sunt:

1. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erit Log. d = Log. b + Log. c — Log. d.

Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, erit Log. c = 2 Log. b — Log. a,

$$\text{Log. } b = \frac{\text{Log. } a + \text{Log. } c}{2}.$$

Ergo *ope Logarithmorum reperitur unus terminus Proportionis, si reliqui sunt cogniti.*

2. Log. $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^m = m\,(p\,\text{Log. } a - q\,\text{Log. } b)$ (§. 144.).

3. Log. $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^m = m\,.\,(p - q)\,\text{Log. } a$.

4. Log.

4. $\text{Log.}\left(\frac{1}{a^q}\right)^m = -\,mq\,\text{Log.}\,a.$

5. $\text{Log.}\left((a^{-m}\,b^n\,c^{-p})^{-q}\right)^s = s(mq\,\text{Log.}\,a + pq\,\text{Log.}\,c - nq\,\text{Log.}\,b)$ (§. 146.)

6. $\text{Log.}\left(\frac{a^{\frac{m}{n}}\,b^p\,c}{d^{\frac{q}{r}}\,e}\right) = \frac{m}{n}\,\text{Log.}\,a + p\,\text{Log.}\,b + \text{Log.}\,c - \frac{q}{r}\,\text{Log.}\,d - \text{Log.}\,e.$

7. $\text{Log.}\sqrt[n]{\left(\frac{a^m\,b^{-n}\,c^{\frac{p}{n}}}{d^{\frac{n}{m}}}\right)} = \frac{m}{n}\,\text{Log.}\,a + \frac{p}{n^2}\,\text{Log.}\,c - \text{Log.}\,b - \frac{1}{m}\,\text{Log.}\,d.$

8. $\text{Log.}\left(\frac{a\sqrt[n]{c^m}}{b\sqrt[p]{q^n}}\right)^{\frac{s}{t}} = \frac{s}{t}\left(\text{Log.}\,a + \frac{m}{n}\,\text{Log.}\,c - \text{Log.}\,b - \frac{n}{p}\,\text{Log.}\,q\right).$

9. $\text{Log.}\frac{(a+b)^n\,(c+d)^m}{(a+b^n)^m} = n\,\text{Log.}\,(a+b) + m\,\text{Log.}\,(c+d) - m\,\text{Log.}\,(a+b^n).$

10. Si $(x+1)(x+2) = 1$, erit $\text{Log.}\,(x+1) + \text{Log.}\,(x+2) = 0.$

11. $\text{Log.}\,(a^2-b^2) = \text{Log.}\,(a+b) + \text{Log.}\,(a-b)$ (§. 127. 1.).

12. $\text{Log.}\,(a^{2m}-b^{2m}) = \text{Log.}\,(a^m+b^m) + \text{Log.}\,(a^m-b^m).$

13. $\text{Log.}\,(a^2+2ab+b^2-c^2) = \text{Log.}\,(a+b+c) + \text{Log.}\,(a+b-c)$ (§. 127. 2.).

14. $\text{Log.}(a^4+a^2b^2+b^4) = \text{Log.}(a^2-ab+b^2) + \text{Log.}(a^2+ab+b^2).$

15. $\text{Log.}\,(a^3-a^2\,b-ab^2+b^3) = \text{Log.}\,(a+b) + 2\,\text{Log.}\,(a-b)$ (§. 127. 3.)

16. $\text{Log.}\,(1+a^2+a^4) = \text{Log.}\,(a^3+1) + \text{Log.}\,(a^3-1) - \text{Log.}\,(a+1) - \text{Log.}\,(a-1)$ (§. 128. 23.).

17. Si $a^{mx} = b$, erit $x = \frac{\text{Log}\;b}{m\,\text{Log.}\,a}.$

18. Si $a^{mx}\,b^{nx} = c^m$, erit $x = \frac{m\,\text{Log.}\,c}{m\,\text{Log.}\,a + n\,\text{Log.}\,b}.$

19. Si $a^{mx+n}\, b^{px+q} = \alpha^{m'x+n'}\, \beta^{p'x+q'}$,

$$\text{erit } x = \frac{n'\,\text{Log.}\,\alpha + q'\,\text{Log.}\,\beta - (n\,\text{Log.}\,a + q\,\text{Log.}\,b)}{-(m'\,\text{Log.}\,\alpha + p'\,\text{Log.}\,\beta) + m\,\text{Log.}\,a + p\,\text{Log.}\,b.}$$

$$= \text{Log.}\left(\frac{\alpha^{n'}\,\beta^{q'}}{a^{n}\,b^{q}}\right) : \text{Log.}\left(\frac{a^{m}\,b^{p}}{\alpha^{m'}\,\beta^{p'}}\right).$$

§. 232. *Coroll.* 3.

Logarithmorum ope facilius etiam solvitur Problema §. 204. Etenim

1. $\text{Log.}\,t = \text{Log.}\,a + (m-1)\,\text{Log.}\,q.$
2. $\text{Log.}\,s = \text{Log.}\,a + \text{Log.}\,(q^{m}-1) - \text{Log.}\,(q-1).$
3. $\text{Log.}\,s = \text{Log.}\,(tq-a) - \text{Log.}\,(q-1).$
4. $\text{Log.}\,a = \text{Log.}\,t - (m-1)\,\text{Log.}\,q.$
5. $\text{Log.}\,a = \text{Log.}\,s + \text{Log.}\,(q-1) - \text{Log.}\,(q^{m}-1).$
6. $\text{Log.}\,a = \text{Log.}\,(tq - s(q-1))$

$$= \text{Log.}\,q + \text{Log.}\left(t - s + \frac{s}{q}\right) = \text{Log}\,(t-s) + \text{Log.}\left(q + \frac{s}{t-s}\right).$$

7. $\text{Log.}\,t = \text{Log.}\,(s\,.\,(q-1) + a) - \text{Log.}\,q.$
8. $\text{Log.}\,t = (m-1)\,\text{Log.}\,q + \text{Log.}\,s + \text{Log.}\,(q-1)$
   $- \text{Log.}\,(q^{m}-1).$
9. $\text{Log.}\,q = \dfrac{\text{Log.}\,t - \text{Log.}\,a}{m-1}.$
10. $\text{Log.}\,q = \text{Log.}\,(s-a) - \text{Log.}\,(s-t).$
11. $\text{Log.}\,s = \text{Log.}\left(t^{\frac{m}{m-1}} - a^{\frac{m}{m-1}}\right) - \text{Log.}\left(t^{\frac{1}{m-1}} - a^{\frac{1}{m-1}}\right).$
12. $\text{Log.}\,s = \text{Log.}\,t + \text{Log.}\,(q^{m}-1) - \text{Log.}\,(q-1) - (m-1)\,\text{Log.}\,q.$

Ex his consequuntur quatuor aequationes aptae ad reperiundum m, si ex hisce propositis a, s, t, q, tria sunt cognita; quae aequationes addi possunt duodecim iis, quae expositae sunt §. 204.

13. $m - 1 = \frac{\text{Log.}\, t - \text{Log.}\, a}{\text{Log.}\, q}$ (ex aeq. 1).

aut $m = \frac{\text{Log.}\, t - \text{Log.}\, a + \text{Log.}\, q}{\text{Log.}\, q}$; sed cum $\text{Log.}\, t + \text{Log.}\, q$

$= \text{Log.}\, (s\,(q - 1) + a)$ (ex aeq. 7), sequitur

14. $$m = \frac{\text{Log.}\, (s\,(q - 1) + a) - \text{Log.}\, a}{\text{Log.}\, q}.$$

15. $m - 1 = \frac{\text{Log.}\, t - \text{Log.}\, a}{\text{Log.}\, (s - a) - \text{Log.}\, (s - t)}$ (aeq. 13 et 10.).

16. $m - 1 = \frac{\text{Log.}\, t - \text{Log.}\, (tq - s\,(q - 1))}{\text{Log.}\, q.}$ (aeq. 13 et 6.).

Reliquae aequationes, quae solvendo huic Problemati inserviunt, ita constituuntur:

$$t = aq^{m-1} = \frac{a\,.\,(s - a)^{m-1}}{(s - t)^{m-1}} \text{ (§. 204. 1 et 10.).}$$

unde

17 et 18. $(s - t)^{m-1}\, t = a\,.\,(s - a)^{m-1}$ (§. 136.); qua aequatione t ex datis s, m, a, atque a ex datis s, t, m est definiendum, quod plerumque difficilius est.

$$q^m - 1 = \frac{s\,.\,(q - 1)}{a} \text{ (§. 204. 2. §. 136.)} = \frac{qs}{a} - \frac{s}{a}; \text{ unde}$$

19. $q^m = \frac{qs}{a} - \left(\frac{s - a}{a}\right)$ (§. 20.).

Deinde $a = (t - s)\, q + s = \frac{t}{q^{m-1}}$ (§. 204. 6 et 4.);

ergo $(t - s)\, q^m + s\,.\,q^{m-1} = t$ (§. 136.);

vel $q^m + \frac{s}{t - s}\, q^{m-1} = \frac{t}{t - s}$ (§. 134. 1.), vel

20. $q^m = \frac{s}{s - t}\, q^{m-1} - \frac{t}{s - t}$.

Quomodo ex aeq. 19 et 20. reperiatur q, in posterum exponetur.

Sunt

Sunt alii etiam usus Logarithmorum in Mathesi pura et mixta, iique varii et multiplices, ita ut ex Logarithmorum inventione maximum ad perficiendam Mathesin ortum sit adminiculum; sine quo nonnulli loci gravissimi aut multo difficilius tractentur aut prorsus tractari nequeant.

§. 233. *Coroll.* 4.

Quoniam basis Logarithmorum vulgarium est decem (§. 228.), erit in hisce:

$\text{Log. } 10a = 1 + \text{Log.} a$; $\text{Log. } \frac{1}{10} a = -1 + \text{Log.} a$;
$\text{Log. } 100a = 2 + \text{Log.} a$; $\text{Log. } \frac{1}{100} a = -2 + \text{Log.} a$;
$\text{Log. } 1000a = 3 + \text{Log.} a$; $\text{Log. } \frac{1}{1000} a = -3 + \text{Log.} a$;

Ergo $\text{Log. } 10^n . a = n + \text{Log.} a$; $\text{Log.} \frac{a}{10^n} = -n + \text{Log.} a$.

Si a est < 10 et > 1, Log. a est *fractus verus* positivus. Ergo Logarithmus cujusque numeri, qui major est quam 10 vel minor quam $\frac{1}{10}$, constat ex numero integro et fracto. Numerus integer dici solet *Characteristica*, quae facile reperitur. *Tot enim habet unitates, quot notae sunt in numero, una demta.* Ita Characteristica Logarithmorum numerorum 12, 123, 4658, 56430000 est 1, 2, 3, 7. Quare, cum tam facile appareat, quanta sit, omissa est in tabulis majoribus Logarithmicis. Numerus fractus, qui Characteristicae addendus est, dici solet *Mantissa*.

Logarithmi numerorum inter 1 *et* 10 *sunt fracti veri positivi; Logarithmi Fractorum inter* 1 *et* $\frac{1}{10}$ *sunt*

sunt Fracti veri negativi, ita, ut utrorumque Characteristica nulla sit.

§. 234. *Coroll.* 5.

N sit numerus ad lubitum sumtum, atque ponatur $N = e^x = a^y$; ergo x Log $e = y$ Log. a, atque $x : y =$ Log. a : Log. e. Quare *si e et a sunt bases duorum Systematum logarithmicorum, Logarithmi x et y ejusdem numeri N in his duobus Systematibus sunt in ratione constante, quae est inversa ratio Logarithmorum basium.* Sit $a = 10$ basis Systematis vulgaris, e basis Systematis naturalis, atque designemus Logarithmos vulgares signo *Log.*; Logarithmos naturales signo *Logn*; unde Log. $a = 1$; Logn. $e = 1$; ergo

$$x : y = \text{Log. } a : \text{Log. } e = 1 : \text{Log. } e;$$

atque $x : y =$ Logn. a : Logn. $e =$ Logn. $10 : 1$;
id est: Logn. N : Log. $N = 1$: Log. $e =$ Logn. $10 : 1$;

$$\text{ergo Logn. } N = \frac{\text{Log. } N}{\text{Log. } e} \text{ et Log. } N = \frac{\text{Logn. } N}{\text{Logn. } 10}.$$

§. 235. *Coroll.* 6.

Reperiri potest Logarithmus alicujus numeri, definiendis terminis mediis proportionalibus geometricis inter duos numeros, quorum Logarithmus est cognitus, atque quibus interjacet numerus propositus. Progrediendum autem est in hoc calculo, donec repertus sit iste terminus medius, qui tam prope accedat ad numerum, qui quaeritur, quantum id ad usum sufficiat. Exponens hujus ter-

termini medii est Logarithmus numeri propositi. Quaeratur v. c. Logarithmus numeri 9; qui numerus cadit inter 1 et 10, quorum Logarithmi in Systemate vulgari sunt 0 et 1. Sint f, f', f'', f''', f^{IV} numeri fracti veri. Terminus medius proportionalis inter 1 et 10 est $10^{\frac{1}{2}}$ (§. 201. I.) $= 3+f$. Cum autem 9 sit inter $3+f$ atque 10, iterum quaerendus est terminus medius inter $10^{\frac{1}{2}}$, atque 10; qui est $10^{\frac{3}{4}} = 5+f'$. Computetur deinceps terminus medius inter $10^{\frac{3}{4}}$ et 10, qui est $10^{\frac{7}{8}} = 7+f''$; tum inter hunc numerum et 10, qui est $10^{\frac{15}{16}} = 8+f'''$; tum inter hunc numerum et 10, qui est $10^{\frac{31}{32}} = 9+f^{IV}$ caet. Ita quidem oritur Series:

Numeri 1; $10^{\frac{1}{2}}$; $10^{\frac{3}{4}}$; $10^{\frac{7}{8}}$; $10^{\frac{15}{16}}$; $10^{\frac{31}{32}}$; 10
id est 1; $3+f$; $5+f'$; $7+f''$; $8+f'''$; $9+f^{IV}$; 10
Logarithmi 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{31}{32}$; 1.

ex quo apparet Logarithmum numeri 9 esse minorem, quam $\frac{31}{32}$, sed majorem quam $\frac{15}{16}$. Hosce limites, inter quos jacet Logarithmus hujus numeri, quaerendo terminos medios, magis magisque contrahere possumus.

Haec via, reperiundi Logarithmos per terminos medios, quam punctis solum notavimus, quamque primi Logarithmorum computatores secuti fuerunt, longa sane est, quamvis termini medii inventi aliorum etiam numerorum Logarithmis reperiundis inservire possint. Recentior

Ma-

Mathesis magna attulit adjumenta, quibus hoc opus multo brevius et commodius perficiatur, ipsumque Logarithmorum usum maximopere extendit.

Si ita computati sunt Logarithmi numerorum primorum (§. 176.), reliqui Additione vel Multiplicatione eorum reperiuntur, velut:

$\text{Log. } 4 = 2 \text{ Log. } 2.$ $\quad \text{Log. } 8 = 3 \text{ Log. } 2.$

$\text{Log. } 6 = \text{Log. } 2 + \text{Log. } 3.$ $\quad \text{Log } 9 = 2 \text{ Log. } 3.$

cui operi inservire possunt Tabulae, qualis est exposita p. 200—206; ut: $\text{Log. } 288 = 5 \text{ Log. } 2 + 2 \text{ Log. } 3$; $\text{Log. } 946 = \text{Log. } 2 + \text{Log. } 11 + \text{Log. } 43$.

Logarithmi Fractorum reperiuntur Subtractione; ut: $\text{Log. } \frac{3}{4} = \text{Log. } 3 - \text{Log. } 4$; $\text{Log. } \frac{897}{935} = \text{Log. } 3 + \text{Log. } 13 + \text{Log. } 23 - (\text{Log. } 5 + \text{Log. } 11 + \text{Log. } 17)$. $\text{Log. } \frac{1}{2} = 0 - \text{Log. } 2 = -\text{Log. } 2$; $\text{Log. } \frac{3}{1000} = \text{Log. } 3 - 3$.

Rursus ex cognitis his Logarithmis, Logarithmi numerorum primorum reperiri possunt, quod saepe ex usu est, ut: $\text{Log. } 3 = \frac{1}{2} \text{ Log. } 9$; $\text{Log. } 5 = \text{Log. } 10 - \text{Log. } 2 = 1 - \text{Log. } 2$; quoniam $5 = \frac{10}{2}$.

P. II. C. II. SECTIO IV.

DE INAEQUALITATE CUM QUANTORUM HOMOGENEORUM TUM PRAECIPUE FRACTORUM, SIVE RATIONUM INTER NUMEROS PUROS.

§. 236. *De inaequalitate Quantorum homogeneorum.*

Theoria de inaequalitate Quantorum homogeneorum, si ipsorum valor absolutus, id est, non ha-

habita ratione signorum, consideratur, haurienda est ex principiis enunciatis §. 12. §. 22. §. 83. §. 134. 2. 3.

Verumtamen, cum Quantum negativum semper sit minus positivo, eoque minus, quo major est ejus valor absolutus (§. 201. 6. §. 226.), ratio omnino habenda est signorum; quae si habetur, Definitio inaequalitatis haec est:

Duorum Quantorum homogeneorum a et b, a majus est quam b, si $a-b$ est Residuum positivum, sed a minus est quam b, si $a-b$ est Residuum negativum.

Quae Definitio valet de omnibus numeris et fractis et integris, atque igitur etiam de Rationibus. *Duarum Rationum* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ *major vel minor est, quam* $\frac{c}{d}$, *si* $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ *est Residuum positivum vel negativum.*

§. 237. *Leges inaequalitatis.*

Ex hac Definitione prodeunt *leges inaequalitatis*, in quarum explicatione, ad imitationem aequationis (§. 4. §. 19.), in formula $a>b$, Quanta vel numeros a et b *membra* vocemus; quae etiam ex *terminis* constare possunt, ut $p+q+rs>a+b+c+\frac{d}{x}$, ubi majus membrum ex tribus, minus ex quatuor constat terminis.

Leges autem primae, quae ad inaequalitatem pertinent, hae sunt:

I. Si

I. Si $a > b$, erit $-b > -a$, vel $-a < -b$. Etenim $-b-(-a) = a-b$, est Residuum positivum. Quare *Signum inaequalitatis mutatur, si utriusque membri signum mutatur.*

II. *Signum inaequalitatis non mutatur*

1. *Si utrique membro aequalia adduntur vel subtrahuntur.* Tum enim Differentia maneat eadem necesse est; ergo signum Residui $a-b$ non mutatur; ut: si $a > b$, erit $a-c > b-c$; si $-b > -a$, erit $-b+c > -a+c$.

2. *Si quis terminus alterutrius membri, mutato signo, ad alterum membrum transfertur.* Hoc sequitur ex priore enunciatione. Fit enim haec translatio termini, si utrique membro additur idem terminus vel subtrahitur (§. 20.). Ex quo etiam sequitur, si $a > b$, esse $-b > -a$ (I) quoniam, signo mutato, termini translati sunt.

3. *Si utrumque membrum per eundem numerum positivum multiplicatur vel dividitur.* Nam signum Residui $a-b$ Multiplicatione vel Divisione per m non mutatur, si m est positivus numerus (§. 100. *c.*).

4. *Si utrumque membrum* a et b *est positivum, atque ad eandem Potestatem positivam, sive integram, sive fractam, evehitur*, id est: si $a > b$, erit $a^m > b^m$. Nam si $a > b$, erit $a-b = x$ positivum; ergo $a = b + x$; $\frac{a}{b} = 1 + \frac{x}{b}$ (§. 134. 1.), atque $\frac{a^m}{b^m} = \left(1+\frac{x}{b}\right)^m > 1$ (quoniam m, b, x, sunt positivi numeri). Ergo $a^m > b^m$ (II. 3.).

Similiter si $-b > -a$, id est, si $a > b$ (II. 2.), erit $-b^m > -a^m$, id est $a^m > b^m$.

5. *Si utrumque membrum est Exponens ejusdem numeri positivi, majoris unitate;* id est, si $a > b$ atque $N > 1$, erit $N^a > N^b$. Nam $\frac{N^a}{N^b} = N^{a-b}$(§. 139); sed $a-b$ est positivum, atque $N > 1$. Ergo $N^{a-b} > 1$ (§. 170. *f.*); ergo $\frac{N^a}{N^b} > 1$, id est: $N^a > N^b$ (II. 3.).

6. *Si membra sunt positiva, eorumque sumuntur Logarithmi, dummodo basis systematis N sit unitate major.* Hoc valet de utroque systemate, quod in usu est, quoniam utriusque basis major est unitate. Ergo si $a > b$, erit Log. $a >$ Log. b, atque Logn. $a >$ Logn. b.

Etenim $a = N^x$, $b = N^y$, ergo $\frac{a}{b} = N^{x-y} > 1$, (§. 139.); ergo cum sit $N > 1$, erit $x-y$ positivum; ergo $x > y$, id est; Log. $a >$ Log. b, atque Logn. $a >$ Logn. b.

III. *Signum inaequalitatis mutatur*

1. *Si utrumque membrum per eundem numerum negativum multiplicatur vel dividitur.* Tum enim membrorum signa mutantur, ergo etiam Residuorum (I). Nam si $a > b$, erit $ma > mb$ (II. 3.); quare $-mb > -ma$ (II. 2.); deinde $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ (II 3.), id est, $-\frac{b}{m} > -\frac{a}{m}$ (II. 2.).

2. *Si utrumque membrum est positivum atque ad eandem Potestatem negativam eveki-*

tur,

tur, id est: si $a > b$, erit $a^{-m} < b^{-m}$. Nam $a^m > b^m$ (II. 4.), ergo $\frac{1}{a^m} < \frac{1}{b^m}$ (§. 134.), id est: $a^{-m} < b^{-m}$ (§. 142.).

3. *Si utrumque membrum est Exponens ejusdem numeri positivi, unitate minoris*; id est: si $a > b$ atque $N < 1$, erit $N^a < N^b$. Etenim $\frac{N^a}{N^b} = N^{a-b}$ (§. 139.); sed $a-b$ est positivum, atque $N < 1$, ergo $N^{a-b} < 1$ (§. 170. *e*.), ergo $\frac{N^a}{N^b} < 1$, id est, $N^a < N^b$ (II. 3.).

4. *Si membra sunt positiva, eorumque sumuntur Logarithmi, quorum basis (N) est unitate minor*, id est: si $a > b$ atque $N < 1$, erit Log. $a <$ Log. b. Nam $\frac{a}{b} = N^{x-y} > 1$; ergo cum sit $N < 1$, erit $x-y$ negativum, vel $x < y$, id est: Log. $a <$ Log. b.

IV. *Si majori Quanto additur majus Quantum, Summa major est:* id est, si $a > b$ atque $c > d$, erit $a+c > b+d$.

Sit $a = b+x$ atque $c = d+y$ ergo $a+c = b+d+x+y$ atque $a+c > b+d$, quoniam x et y sunt positiva.

Similiter si $-b > -a$, id est: si $a > b$. (II. 2.) atque $-d > -c$, id est: si $c > d$.

erit $-(b+d) > -(a+c)$, id est: $a+c > b+d$.

V. *Si majori Quanto subtrahitur minus Quantum, Residuum majus est*, id est: si $a > b$ atque $c > d$, erit $a-d > b-c$.

Etenim $a+c > b+d$ (IV.), ergo $a-d > b-c$ (II. 2).

Similiter si $-b > -a$, id est: si $a > b$,

at-

atque $-d > -c$, id est: si $c > d$,
erit $a+c > b+d$ (IV.), atque $-b+c > -a+d$ (II. 2).

VI. *Si majora Quanta positiva multiplicantur per majores numeros positivos, Producta majora sunt*, id est: si $a > b$ atque $c > d$, erit $ac > bd$. Nam si $a = b+x$ atque $c = d+y$, erit $ac = bd+by+dx+xy$, ergo $ac > bd$, quoniam b, d, x, y sunt positiva.

VII. *Si majus Quantum positivum dividitur per minorem numerum positivum, Quotus major est:* id est, si $a > b$ atque $c > d$, erit $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$.

Nam $ac > bd$ (II. 3.), ergo $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ (II. 3.).

§. 238. *Formulae inaequalitatis, quae ex his legibus consequuntur.*

A. $s = \frac{q^m - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 \ldots q^{m-1}$ (§. 207.), ubi s, sive Summa hujus Progressionis, constat ex m terminis. Ergo si $q > 1$, erit q^{m-1} *maximus* terminus, ergo $s < mq^{m-1}$, vel $mq^{m-1} > \frac{q^m - 1}{q - 1}$; quare $mq^m - mq^{m-1} > q^m - 1$ (§. 237. II. 3.), atque $mq^m + 1 > q^m + mq^{m-1}$ (§. 237. II. 2.).

si $q < 1$, erit q^{m-1} *minimus* terminus; ergo $s > mq^{m-1}$, vel $\frac{1 - q^m}{1 - q} > mq^{m-1}$; id est: $mq^m + 1 > q^m + mq^{m-1}$ (§. 237. II. 3 et 2).

Quare sive $q > 1$ sive $q < 1$ semper erit

1. $1 + mq^m > mq^{m-1} + q^m$, vel $(m-1)\, q^m > mq^{m-1} - 1$ (§. 237. II. 2.); *si m est numerus positivus integer et major quam unitas.*

Sit $\frac{a}{b} = q$; ergo $(m-1)\frac{a^m}{b^m} > m\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} - 1$; vel si fit Multiplicatio per b^m,

2.

2. $(m-1)a^m+b^m > ma^{m-1}b$ (§. 237. II. 2 et 3.), atque, si dividitur per a^m,

3. $m-1+\left(\frac{b}{a}\right)^m > \frac{mb}{a}$ (§. 237. II. 3. atque §. 144.),

vel $m\left(1-\frac{b}{a}\right) > 1-\left(\frac{b}{a}\right)^m$.

Si $m=2$, erit (*A*. 2.)

4. $a^2+b^2 > 2ab$; atque, si $a=1$, erit $1+b^2 > 2b$,

Sit $b=2$, $a=1$, erit (*A*. 3.)

5. $2^m+m-1 > 2m$, vel $2^m > m+1$; atque similiter, si b ponitur 3, 4, 5 ... erit $3^m > 2m+1$; $4^m > 3m+1$, caet.

Quoniam $2^m > m+1$, erit $(2f)^m > (1+m)f^m$ (§ 237. II 3.). Basis Systematis logarithmici naturalis, quae designari solet litera e, est major quam duo, et minor quam tria (§. 228.). Sit igitur $e=2f$, ergo $f>1$, unde $e^m > (1+m)f^m$, atque $(1+m)f^m > 1+m$; quare:

6 $e^m > 1+m$, atque similiter $e^n > 1+n$, caet., quare

7. $e^{m+n+p+q}\ldots > (1+m)(1+n)(1+p)(1+q)\ldots$ (§. 237. VI.) ubi m, n, p, q sunt numeri positivi.

$e^{ab+a'b'+a''b''}\ldots > (1+ab)(1+a'b')(1+a''b'')\ldots$

ergo si a, a', a'', a''' ... sunt minores quam l,

erit etiam $e^{l(b+b'+b''+b'''\ldots)} > (1+ab)(1+a'b')(1+a''b'')\ldots$

B. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$; ergo $(a+b)^2 > 4ab$ quoniam $(a-b)^2$ et $(a+b)^2$ semper sunt positivi. Ergo si a et b sunt positivi, erit

1. $\sqrt{(ab)} < \frac{a+b}{2}$. (§. 237. II. 4.)

Quare si $\frac{a+b}{2}=\alpha$; $\frac{c+d}{2}=\beta$, erit $\sqrt{(ab)} < \alpha$; $\sqrt{(cd)} < \beta$;

atque $\sqrt{(\alpha\beta)} < \frac{\alpha+\beta}{2}$, ergo etiam $< \frac{a+b+c+d}{4}$; quapropter

$\sqrt{(abcd)} < \alpha\beta$ (§.237.VI.); $\sqrt[4]{(abcd)} < \sqrt{(\alpha\beta)}$ (§.237.II.4.).

unde

2.

2. $\sqrt[4]{(abcd)} < \frac{a+b+c+d}{4}$.

Similiter $\sqrt[4]{(efgh)} < \frac{e+f+g+h}{4}$. Sit $\frac{a+b+c+d}{4} = \gamma$; $\frac{e+f+g+h}{4} = \delta$, unde $\sqrt[4]{(abcdefgh)} < \gamma\delta$, ergo $< \frac{\gamma+\delta}{2}$, id est:

3. $\sqrt[8]{(abcdefgh)} < \frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}$. Si hoc modo progredimur, patet, *si P est Productum ex 2^m Factoribus inaequalibus, atque s est ipsorum Summa, esse semper*,

4. $P < \left(\frac{s}{2^m}\right)^{2^m}$, *atque* Log. $P < 2^m$ (Log. $s - m$ Log. 2.) (§. 237. II. 6.).

At vero in locum ipsius 2^m poni potest quilibet numerus integer positivus, ita ut sit $N > \left(\frac{s}{n}\right)^n$, si N est Productum ex n Factoribus, quorum Summa est s. Ponatur enim $\frac{s}{n} = \phi$, unde $s = n\phi$. Sed $\phi^{(2^m - n)}$ est Productum ex $2^m - n$ Factoribus ϕ, quorum Summa est $(2^m - n)\phi$. Quare $N\,\phi^{(2^m-n)}$ est Productum ex 2^m Factoribus, quorum Summa est $n\phi + (2^m - n)\,\phi = 2^m\,\phi$. Quapropter $N\phi^{(2^m-n)} < \left(\frac{2^m\,\phi}{2^m}\right)^{2^m}$, atque $< \phi^{2^m}$ vel $\frac{N\phi^{2^m}}{\phi^n} < \phi^{2^m}$, vel $N < \phi^n$ (§. 237. II. 3.); id est:

5. $N < \left(\frac{s}{n}\right)^n$, vel $\sqrt[n]{N} < \frac{s}{n}$ (§. 237. II. 4.);

unde, $\frac{1}{n}$ Log. $N <$ Log. s — Log. n. (§. 237. II. 6.)

sit $n = 2$, erit $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$;

sit

sit $n = 3$, erit $\sqrt[3]{(abc)} < \frac{a+b+c}{3}$;

sit $n = 4$, erit $\sqrt[4]{(abcd)} < \frac{a+b+c+d}{4}$;

ubi tamen n non debet esse minor quam 2.

Ex hoc etiam sequitur:

$a^n\ b^m < \left(\frac{na+mb}{m+n}\right)^{m+n}$. Ut evanescat Exponens numeri $m+n$, ponatur a^{m+n} et b^{m+n} in locum Quantorum a et b; quo facto prodit

$$(a^{m+n})^n\ (b^{m+n})^m < \left(\frac{na^{m+n}+mb^{m+n}}{m+n}\right)^{m+n};$$

$$\text{ergo } a^n\ b^m < \frac{na^{m+n}+mb^{m+n}}{m+n}, \text{ vel}$$

6. $(m+n)\ a^n\ b^m < na^{m+n} + mb^{m+n}$. (§. 237. II. 3. 4.)

Sit $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $m = 4$, $n = 5$, ergo $9 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{81} < \frac{5}{512} + \frac{4}{81 \cdot 243}$

Si autem $a = 2$, $b = 3$, erit $9 \cdot 32 \cdot 81 < 5 \cdot 512 + 4 \cdot 81 \cdot 243$.

C. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$,

$(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$.

$(a+b+c+d)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 = 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$, caet.

Ergo si s indicat Summam m numerorum, qui non omnes sunt inter se aequales, atque S Summam Quadratorum eorum, erit $mS > s^2$, vel $\sqrt{(mS)} > s$.

Animadv. De inaequalitatis theoria egerunt inprimis Cauchy, (*Cours d'Analyse de l'école royale Polytechnique*, Paris 1821. *Bulletin des sciences mathématiques par* Ferusak, Juillet 1826.) atque Navier (*Bulletin des sciences de la societé philomatique* 1825. *mense Maji et Junii*) Confer. Klügel, *Mathem. Wörterbuch*, T. V. edit. a Grunert, ad vocem *Ungleich.*

Du-

Ducibus autem illis legibus, quae §. 237. expositae sunt, solvitur sequens Problema, cujus Solutioni, quo magis utriusque convenientia perspiceretur, formam Solutionis Problematis §. 190. dedimus.

§. 239. *Definire, quid consequatur ex inaequalitate duorum Fractorum, sive Rationum* $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$; *ubi* a, b, c, d *sunt numeri positivi.*

Solutio.

Si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, erit

I. $ad > bc$; quae formula prodit, si Fracti per bd multiplicantur (§. 237. II. 3.). Quare *Productum terminorum extremorum majus est quam mediorum.*

Ex quo, si m est numerus positivus integer vel fractus, sequitur:

II. $a^m d^m > b^m c^m$ (§. 237. II. 4.); $a^{-m} d^{-m} < b^{-m} c^{-m}$ (§. 237. III. 2.).

III. $mad > mbc$ (§. 237. II. 3.); $-mad < -mbc$ (§. 237. III. 1.); $N^{\frac{a}{b}} > N^{\frac{c}{d}}$ si $N > 1$;

Log. $\frac{a}{b} >$ Log. $\frac{c}{d}$ ubi designantur Logarithmi, qui in usu sunt (§. 237. II. 5. 6.).

Ex his formulis I. II. III. sequitur, (§. 237.) si m et n sunt positivi.

IV. $a > \frac{bc}{d}$; $d > \frac{bc}{a}$; $b > \frac{ad}{c}$; $c > \frac{ad}{b}$.

V.

V. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$; $\frac{d}{c} > \frac{b}{a}$; $\frac{d}{b} > \frac{c}{a}$; (§. 237. II. 3.), id est:

1. *Signum > manet, si termini medii vel extremi locum inter se commutant.*
2. *Signum fit <, si invertuntur Fracti, id est: si termini medii in extremos, atque extremi in medios mutantur.*

VI. $\frac{a^m}{b^m} > \frac{c^m}{d^m}$; $\frac{a^m}{c^m} > \frac{b^m}{d^m}$; $\frac{d^m}{c^m} > \frac{b^m}{a^m}$; $\frac{d^m}{b^m} > \frac{c^m}{a^m}$ (§. 237. II. 4.).

VII. $\frac{ma}{nb} > \frac{mc}{nd}$; $\frac{ma}{mb} > \frac{c}{d}$; $\frac{ma}{b} > \frac{mc}{d}$; $\frac{ma}{b} > \frac{c}{d:m}$; $\frac{a}{mb} > \frac{c}{md}$;

$\frac{a}{mb} > \frac{c:m}{d}$, caet. (§. 237. II. 3.).

VIII. Quoniam $nad > nbc$ (§. 237. II. 3.) Additione et Subtractione nascitur (§. 237. II. 1.).

1. $a(mb + nd) > b(ma + nc)$;
2. $a(mc + nd) > c(ma + nb)$;
3. $a(mb - nd) < b.(ma - nc)$;
4. $a(mc - nd) < c(ma - nb)$;
5. $a(nd - mb) > b.(nc - ma)$;
6. $a(nd - mc) > c(nb - ma)$;

atque ita aliae formulae, si a in d et d in a mutatur.

IX. Ex quibus consequitur (§. 237. II. 1. 3.)

1. $\frac{a}{b} > \frac{ma+nc}{mb+nd}$ atque $> \frac{nc-ma}{nd-mb}$, sed $< \frac{ma-nc}{mb-nd}$
2. $\frac{a}{c} > \frac{ma+nb}{mc+nd}$ atque $> \frac{nb-ma}{nd-mc}$, sed $< \frac{ma-nb}{mc-nd}$,
3. $\frac{d}{b} > \frac{md+nc}{mb+na}$ atque $> \frac{nc-md}{na-mb}$, sed $< \frac{md-nc}{mb-na}$.
4. $\frac{d}{c} > \frac{md+nb}{mc+na}$ atque $> \frac{nb-md}{na-mc}$, sed $< \frac{md-nb}{mc-na}$.

5. $\frac{b}{a} < \frac{mb+nd}{ma+nc}$ atque $< \frac{nd-mb}{nc-ma}$, sed $> \frac{mb-nd}{ma-nc}$.

6. $\frac{c}{a} < \frac{mc+nd}{ma+nb}$ atque $< \frac{nd-mc}{nb-ma}$, sed $> \frac{mc-nd}{ma-nb}$.

7. $\frac{b}{d} < \frac{mb+na}{md+nc}$ atque $< \frac{na-mb}{nc-md}$, sed $> \frac{mb-na}{md-nc}$.

8. $\frac{c}{d} < \frac{mc+na}{md+nb}$ atque $< \frac{na-mc}{nb-md}$, sed $> \frac{mc-na}{md-nb}$.

Velut, si in locum *a*, *b*, *c*, *d*, *m*, *n* ponimus, 8, 6, 5, 4, 3, 2, erit $\frac{4}{3} > \frac{17}{13}$, sed $< \frac{7}{5}$; $\frac{8}{5} > \frac{36}{23}$, sed $< \frac{12}{7}$; caet.

In his observandum est:

1. *Ex singulis his formulis duae aliae oriuntur, mutato loco terminorum mediorum et extremorum* (§. 239. V.). Velut ex prima formula, mutato loco terminorum mediorum, prodit:

$$\frac{a}{ma+nc} > \frac{b}{mb+nd}; \ \frac{a}{nc-ma} > \frac{b}{nd-mb}; \ \frac{a}{ma-nc} < \frac{b}{mb-nd}.$$

2. *m et n possunt esse quilibet numeri, dummodo sint positivi.*

3. *Differentiae non debent esse negativae.* Quare si $mb > nd$, utendum est formula $\frac{a}{b} < \frac{ma-nc}{mb-nd}$, non vero $\frac{a}{b} > \frac{nc-ma}{nd-mb}$. Quodsi utraque formula simul uti velimus, in absurda dilabamur necesse est, quoniam $\frac{ma-nc}{mb-nd} = \frac{nc-ma}{nd-mb}$, atque igitur $\frac{a}{b}$ foret simul major et minor, quam eadem Quantitas.

4.

4. Quoniam $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{a}{c} \ldots$ sunt Fracti positivi, is Fractus, quo sunt minores, etiam est positivus, quia numerus negativus minor est positivo (§. 201. VI. §. 226.). *Quare uterque terminus hujus Fracti debet esse positivus.* Itaque, si $nd < mb$, etiam est $nc < ma$.

X. Universales hae formulae magis redduntur particulares et simplices, posita unitate in locum Coëfficientium m et n. Ex eo autem colligitur:

1. $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sunt $< \frac{a-c}{b-d}$ atque $> \frac{c-a}{d-b}$ (IX. 1. 8.).

2. $\frac{b}{a}$ et $\frac{d}{c}$ sunt $> \frac{b-d}{a-c}$ atque $< \frac{d-b}{c-a}$ (IX. 5. 4.).

3. $\frac{c}{a}$ et $\frac{d}{b}$ sunt $< \frac{d-c}{b-a}$ atque $> \frac{c-d}{a-b}$ (IX. 6. 3.).

4. $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ sunt $> \frac{b-a}{d-c}$ atque $< \frac{a-b}{c-d}$ (IX. 2. 7.).

5. $\frac{a+b}{c+d}$ est $> \frac{b}{d}$, sed $< \frac{a}{c}$ atque igitur $< \frac{a-b}{c-d}$ (IX. 2. 7.).

6. $\frac{b+d}{a+c}$ est $> \frac{b}{a}$, sed $< \frac{d}{c}$ . . . . . $< \frac{d-b}{c-a}$ (IX. 5. 4.).

7. $\frac{c+d}{a+b}$ est $> \frac{c}{a}$, sed $< \frac{d}{b}$ . . . . . $> \frac{c-d}{a-b}$ (IX. 6. 3.).

8. $\frac{a+c}{b+d}$ est $> \frac{c}{d}$, sed $< \frac{a}{b}$ . . . . . $< \frac{a-c}{b-d}$ (IX. 1. 8.).

In hisce animadvertendum est:

1. Ex singulis his formulis, ut in N°. IX. duae aliae oriuntur, mutato loco terminorum mediorum

et

et extremorum. Velut ex formula 5. 6. 7. 8. prodit

$$\frac{a+b}{a-b}<\frac{c+d}{c-d};\ \frac{d+b}{d-b}<\frac{c+a}{c-a};\ \frac{a+c}{a-c}<\frac{b+d}{b-d}.$$

2. *Differentiae non debent esse negativae.* Quare uterque terminus Fracti, qui est Differentia numerorum a, b, c, d, debet esse positivus.

XI. Si $\frac{P}{Q} > \frac{R}{S}$ patet: si $\frac{P}{Q} < 1$, erit etiam $\frac{R}{S} < 1$, atque si $\frac{R}{S} > 1$, erit $\frac{P}{Q} > 1$. Deinde si $Q = S$, erit $P > R$, atque si $P = R$, erit $Q < S$.

Ex his, collatis cum formulis V et VII, patet:

1. Si $b = d$, erit $a > c$.
2. Si $a = b$, erit $c < d$.
3. Si $a < b$, erit $c < d$.
4. Si $c > d$, erit $a > b$.
5. Si $b > d$, erit $a > c$.
6. Si $a < c$, erit $b < d$.
7. Si $ma < nb$, erit $mc < nd$.
8. Si $mc > nd$, erit $ma > nb$.
9. Si $ma < nc$, erit $mb < nd$.
10. Si $mb > nd$, erit $ma > nc$.
11. Si $md < nb$, erit $mc < na$.
12. Si $mc > na$, erit $md > nb$.
13. Si $md < nc$, erit $mb < na$.
14. Si $mb > na$, erit $md > nc$. (confer. IX. 4.).

XII. *Summa terminorum extremorum, si alteruter est maximus, alter autem minimus terminus, major est quam reliquorum Summa.*

Sit enim a maximus terminus et d minimus, ergo $\frac{a-b}{c-d} > \frac{b}{d}$, ergo > 1, unde $a-b > c-d$, vel $a+d > b+c$.

Si d est maximus atque a minimus terminus, idem valet, quoniam a in d, atque d in a mutare possumus (§. 239. V.).

§. 240.

§. 240. *Coroll.* 1.

Ex qualibet harum formularum sequitur formula fundamentalis $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; ergo etiam reliquae, quippe quae ex hac deriventur. Ex aliis etiam rationibus colligitur, esse $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ut

1. Si $a = b$ atque $c < d$, quoniam $\frac{a}{b} = 1$ et $\frac{c}{d} < 1$.

2. Si $a > b$ atque $c = d$, vel $c < d$, quoniam $\frac{a}{b} > 1$ atque $\frac{c}{d} = 1$, vel < 1.

3. Si $a > c$ atque $b = d$, vel $b < d$.
4. Si $a = c$, sed $b < d$, vel $b = d$ (1).
} quoniam tum $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, ergo $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

5. Si $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, vel si $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ atque $\frac{e}{f} > \frac{c}{d}$ (2).

6. Si $\frac{a}{e} > \frac{b}{f}$ atque $\frac{e}{c} > \frac{f}{d}$. Tum enim $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ atque $\frac{e}{f} > \frac{c}{d}$.

7. Si $\frac{c}{e} < \frac{d}{f}$ atque $\frac{e}{a} < \frac{f}{b}$. . . . . $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ atque $\frac{e}{f} < \frac{a}{b}$.

8. Si $\frac{a}{e} > \frac{c}{f}$ atque $\frac{e}{b} > \frac{f}{d}$. . . . . $\frac{a}{c} > \frac{e}{f} > \frac{b}{d}$.

9. Si $\frac{a}{f} = \frac{e}{d}$ atque $\frac{f}{c} > \frac{b}{e}$. . . . . $ad = fe$ atque $fe > cb$.

10. Si $\frac{a}{f} > \frac{e}{d}$ atque $\frac{f}{c} = \frac{b}{e}$, aut $\frac{f}{c} > \frac{b}{e}$. Nam $ad > fe$, atque $fe = cb$, vel $fe > bc$.

§. 241.

(1) Euclides. Lib. V. Prop. 8.
(2) Euclides. Lib. V. Prop. 13.

§. 241. Coroll. 2.

Ponamus $c = d$, ergo $\frac{a}{b} > 1$, id est, $a > b$. Quare, si $a > b$, atque c est numerus positivus quilibet, erit (§. 239. X.)

1. $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$. 4. $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$.

2. $\frac{a-c}{b-c} > \frac{a}{b}$ et > 1, si $b > c$. 5. $\frac{b-c}{a-c} < \frac{b}{a}$ et < 1, si $b > c$.

3. $\frac{c-a}{c-b} < \frac{a}{b}$ et < 1, si $a < c$. 6. $\frac{c-b}{c-a} > \frac{b}{a}$ et > 1, si $a < c$.

§. 242. Coroll. 3.

Quid consequatur, si $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$, aut, si termini medii aequales sunt, facile perspicitur, ut: $b < \sqrt{(ac)}$; $a > \frac{b^2}{c}$, $c > \frac{b^2}{a}$; $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{c}$ sunt $< \frac{a-b}{b-c}$ atque $> \frac{b-a}{c-b}$; $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{b}$ sunt $> \frac{b-c}{a-b}$ atque $< \frac{c-b}{b-a}$ caet. (§. 139. X.).

§. 243. Coroll. 4.

Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sunt $> \frac{s}{t}$, $\frac{a+c}{b+d}$ est $> \frac{s}{t}$.

Sit enim $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$, ergo $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$ (§. 239. X.), ergo $> \frac{s}{t}$.

Sit $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, ergo $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ (§. 190. X.), ergo $> \frac{s}{t}$.

§. 244. Coroll. 5.

Quare si Fracti singuli $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$; $\frac{g}{h}$; $\frac{i}{k}$ majores

res sunt, quam $\frac{s}{t}$, erit etiam $\frac{a+c+e+g+i\ldots}{b+d+f+h+k\ldots}$ major, quam $\frac{s}{t}$.

Nam $\frac{a+c}{b+d}$ atque $\frac{e}{f}$ sunt $> \frac{s}{t}$, (§. 243.) ergo etiam $\frac{a+c+e}{b+d+f} > \frac{s}{t}$; et quia $\frac{g}{h} > \frac{s}{t}$, erit $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} > \frac{s}{t}$, et ita deinceps. Quare cum Fracti $\frac{11}{12}$; $\frac{13}{14}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{17}{18}$ majores sint, quam $\frac{110}{121}$, etiam $\frac{14}{15} > \frac{110}{121}$.

§. 245. *Coroll. 6.*

At vero, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sunt $< \frac{s}{t}$, erit $\frac{a+c}{b+d} < \frac{s}{t}$. Nam sit $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ergo $\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$ (§. 239. X. 8.); ergo etiam $\frac{a+c}{b+d} < \frac{s}{t}$. Idem fit, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Tum enim $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$ (§. 190. X. 1.); ergo $< \frac{s}{t}$.

§. 246. *Coroll. 7.*

Quare, si Fracti singuli $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$; $\frac{g}{h}$; $\frac{i}{k}\ldots$ minores sunt, quam $\frac{s}{t}$, erit etiam $\frac{a+c+e+g+i}{b+d+f+h+k}\ldots$ minor, quam $\frac{s}{t}$. Nam $\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{e}{f}$ sunt minores, quam $\frac{s}{t}$ (§. 245.); ergo $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ minor

nor est, quam $\frac{s}{t}$, et quia etiam $\frac{g}{h}$ minor est, quam $\frac{s}{t}$, erit $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$ minor, quam $\frac{s}{t}$, et ita deinceps. Ita cum Fracti $\frac{11}{12}$; $\frac{13}{14}$; $\frac{15}{16}$; $\frac{17}{18}$ minores sint, quam $\frac{170}{179}$, erit etiam $\frac{14}{15} < \frac{170}{179}$.

§. 247. *Coroll.* 7.

Ex §. 236—239. concludimus omnino:

Si quis Fractus major vel minor est aliis Fractis singulis, etiam major vel minor est Fracto, cujus Numerator est Numeratorum, Denominator Denominatorum Summa: ut Fractus $\frac{51}{100}$ major est quam singuli Fracti $\frac{53}{107}$; $\frac{54}{109}$; $\frac{55}{111}$; $\frac{56}{113}$; $\frac{57}{115}$, quare $\frac{51}{100} > \frac{55}{111}$; sed Fractus $\frac{530}{1071}$ minor est, quam hi Fracti; quare $\frac{530}{1071} < \frac{55}{111}$.

§. 248. *Coroll.* 8.

Sit $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$; $\frac{g}{h}$ ... ejusmodi Series Fractorum, cujus quilibet terminus consequens minor est, quam antecedens. Quare

1. $\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$, sed $> \frac{c}{d}$ atque igitur $> \frac{e}{f}$ (§. 239. X. 8.).

2. $\frac{c+e}{d+f} < \frac{c}{d}$ atque igitur $< \frac{a}{b}$, sed $> \frac{e}{f}$ atque igitur $> \frac{g}{h}$.

Cum igitur sit $\frac{a}{b} > \frac{c+e}{d+f}$, erit

3. $\frac{a+c+e}{b+d+f} > \frac{c+e}{d+f}$; et eodem modo sequitur

4.

4. $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} > \frac{c+e+g}{d+f+h}$ et ita deinceps. Cum autem sit $\frac{a+c}{b+d} > \frac{e}{f}$ (1), erit

5. $\frac{a+c+e}{b+d+f} < \frac{a+c}{b+d}$, et eodem modo colligitur

6. $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} < \frac{a+c+e}{b+d+f}$. Ex quo efficitur:

Si est Series fractorum, cujus quilibet terminus consequens minor est quam antecedens, is Fractus, cujus Numerator et Denominator est Summa omnium Numeratorum atque Denominatorum, est major vel minor Fracto, cujus Numerator et Denominator est eadem Summa, sed sublatis terminis maximi vel minimi Fracti.

Sint propositi Fracti $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{8}{7}$; ergo $\frac{33}{27} > \frac{30}{25}$, sed $< \frac{25}{20}$; vel $\frac{11}{9} > \frac{6}{5}$, sed $< \frac{5}{4}$; ubi igitur $\frac{11}{9}$ inter duos terminos medios Seriei, $\frac{6}{5}$ et $\frac{5}{4}$, est interpositus.

Animadv.

De inaequalitate Rationum, atque de modo, quo Euclides Rationes investigavit, egerunt in primis Garz (*Allgemeine Grössenlehre*, Halle 1820), Pfleiderer (*Expositio et dilucidatio Libri V. Element. Euclidis*, Tubing. 1782.; atque ejusdem auctoris: *Deduction der Euclidischen Definitionen* 3. 4. 5. 7 *des* V *Buchs der Elemente*; quae dissertatio invenitur in Hindenburgs *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* Vol. 2.) Hau-

 ber

ber (*Propositionum de Rationibus inter se diversis demonstrationes, ex solis Lib. V. Elementorum definitionibus et propositionibus deductae*, Tub. 1793). Confer. Viri clarissimi J. Nieuwenhuis: *Wiskundig Leerboek*, Pars I. Sectio II. p. 197 seqq. atque etiam Klügel: *Mathematisch Wörterbuch*, Pars V. Vol. 2. (editum ab J. A. Grunert) *ad vocem Verhälltnisſ.* Nos aliam in Rationibus indagandis secuti sumus viam. Uberius cum hac de re, tum de aliis Arithmeticae locis egit K. Ch. F. Krause (*Grundlage eines philosophischen Systems der Mathematik*, Pars I. A. 1804); qui Theoriam Matheseos isti doctrinae philosophae, quam amplexus est, congruam reddere conatus fuit.

P. II. C. II. SECTIO V.

DE PROPORTIONE ET PROGRESSIONE HARMONICA.

§. 249. *Proportio harmonica. Definitio.*

Quatuor numeri a, b, c, d dicuntur esse in Proportione harmonica, si $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{d}$; id est: *si Differentia inter primum numerum et secundum est ad Differentiam inter tertium et quartum, ut primus numerus est ad quartum.* Hac igitur in re differunt Proportio geometrica et harmonica, quod

Frac-

Fractus $\frac{a-b}{c-d}$ in priore sit $=\frac{a}{b}$, sed in posteriore $=\frac{a}{d}$.

Utraque Proportio fit *continua*, si $b=c$. Sunt igitur tres numeri a, b, c in Proportione continua harmonica, si $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$. Proportio geometrica continua foret $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$.

§. 250. *Problema.*

Definire leges Proportionis harmonicae, sive exponere, quid ex aequatione $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d}$ *consequatur.*

Solutio.

Si $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d}$, erit

I. $ad-bd=ac-ad$ (§. 136.), id est: $2ad=ac+bd$ (§. 20.); unde

II. $a=\frac{bd}{2d-c}$; $b=\frac{(2d-c)a}{d}$; $c=\frac{(2a-b)d}{a}$;

$d=\frac{ac}{2a-b}$ (§. 136. §. 20.).

Non igitur ad libitum sumi possunt a et b vel c et d. Nam si $2a=b$, vel si $a=\frac{1}{2}b$, c evanescit. Si $2d=c$, vel si $d=\frac{1}{2}c$, b evanescit.

Numeri possunt esse negativi, ut: si $2a<b$, erit d negativus. Ponimus enim, a, b, c esse positivos.

III. Si $b=aq$, erit $d=\frac{ac}{2a-aq}=\frac{c}{2-q}$ (§. 133. 3.), atque quatuor termini sunt, a; aq; c; $\frac{c}{2-q}$.

IV.

IV. $\frac{ma-mb}{mc-md}=\frac{ma}{md}=\frac{a}{d}$ (§. 133. 3.); ubi m potest etiam esse fractus. Quare *termini, salva Proportione, per eundem numerum multiplicari, vel dividi possunt.* Velut, cum numeri 9; 6; 4; 3 sint in Proportione Harmonica, in eadem etiam sunt 18; 12; 8; 6 atque $\frac{9}{2}$; 3; 2; $\frac{3}{2}$.

V. *Si primus terminus est unitas, termini sunt* $1; q; c; \frac{c}{2-q}$.

§. 251. *Problema.*

Definire leges Proportionis harmonicae continuae.

Solutio.

Si a, b, c sunt in Proportione continua, erit $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$ (§. 249.); ergo $2ac=ab+bc$, unde $b=\frac{2ac}{a+c}$ et $c=\frac{ab}{2a-b}$ (§. 136. §. 20.). Non igitur ad libitum sumi possunt duo primi termini a et b. Nam si $2a=b$, c est infinitus.

§. 252. *Coroll.* 1.

Tres igitur termini sunt $a; b; \frac{ab}{2a-b}$, atque, si $a=1$, illi erunt $1; b; \frac{b}{2-b}$. Si $b=aq$, erunt $a; aq; \frac{aq}{2-q}$. Quare si $b<a$, erit *q fractus verus*, atque $2-q>1$. Ergo tum *primus terminus maximus, tertius vero minimus* est. Contra, *si q est fractus* spu-

spurius < 2, *primus terminus minimus, tertius maximus est. Si* $q > 2$ *vel* $b > 2a$, *tertius terminus fit negativus.* In hisce ponimus, a et q esse positivos.

§. 253. *Coroll.* 2.

Sit $a = \frac{1}{p}$, $b = \frac{1}{p+d}$, ergo $q = \frac{b}{a} = \frac{p}{p+d}$ (§. 165. 10.) $c = \frac{ab}{2a-b} = \frac{1}{2:b-1:a}$ (§. 133. 3.) $= \frac{1}{2.(p+d)-p}$ (§. 165. 6.) $= \frac{1}{p+2d}$.

Ergo tres termini sunt $\frac{1}{p}$; $\frac{1}{p+d}$; $\frac{1}{p+2d}$, atque si primus terminus est unitas, erunt 1; $\frac{1}{1+d}$; $\frac{1}{1+2d}$. *Denominatores igitur terminorum sunt in Proportione arithmetica continua.* Ipse numerus d, qui etiam potest esse negativus, est $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+d}\right) p . (p+d) = \frac{a-b}{ab}$, atque dici potest *Differentia harmonica;* quae igitur *aequalis est Differentiae duorum primorum terminorum, divisae per eorum Productum.*

Sit $a = 30$, $b = 24$, ergo $c = 20$; $q = \frac{4}{5}$, $p = \frac{1}{30}$, $d = \frac{1}{120}$. Termini sunt: $\frac{30}{1}$; $\frac{30}{1\frac{1}{4}}$; $\frac{30}{1\frac{1}{2}}$, vel $\frac{120}{4}$; $\frac{120}{5}$; $\frac{120}{6}$. (§. 133. 3.).

§. 254. *Coroll.* 3.

Numerorum a et c terminus medius proportionalis arithmeticus $\frac{a+c}{2}$ (§. 195.) geometricus $(ac)^{\frac{1}{2}}$ (§. 201.) atque harmonicus $\frac{2ac}{a+c}$ (§. 251.) ita sunt in Proportione geometrica continua, ut primus sit ad secundum, ut secundus est ad tertium. Nam $\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{2ac}{a+c}\right) = ac$ (§. 201. I.). Sit $a=2$, $c=8$, ergo $\frac{a+c}{2} = 5$; $(ac)^{\frac{1}{2}} = 4$; $\frac{2ac}{a+c} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$, atque $5:4 = 4:\frac{16}{5}$.

§. 255. *Coroll.* 4.

Si tres numeri sunt in Proportione arithmetica continua, Producta ex singulis binis horum numerorum sunt in Proportione harmonica continua. Nam sint termini α, $\alpha+\delta$, $\alpha+2\delta$; ergo Producta sunt $\alpha.(\alpha+\delta)$; $\alpha.(\alpha+2\delta)$; $(\alpha+\delta)(\alpha+2\delta)$. Sed in harmonica Proportione est $c = \frac{ab}{2a-b}$ (§. 251). Sit igitur $a = \alpha.(\alpha+\delta)$, $b = \alpha.(\alpha+2\delta)$, erit $c = \frac{\alpha^2.(\alpha+\delta)(\alpha+2\delta)}{2\alpha.(\alpha+\delta) - \alpha.(\alpha+2\delta)} = (\alpha+\delta)(\alpha+2\delta)$ (§. 133. 3.).

§. 256. *Animadv.*

Nomen ipsum, *Proportio harmonica*, a musica harmonia desumtum est. Nam si tres sunt chordae

dae tensae, quarum longitudines, quibus solis inter se differunt, sunt in Proportione continua harmonica, hae Chordae edunt sonos, qui sunt consoni, quamvis ad harmoniam gradibus inter se differant. Velut, si longitudines sunt, ut numeri $1 ; \frac{4}{5} ; \frac{2}{3}$, vel 30 ; 24 ; 20, hos edunt sonos: *sonum fundamentalem*, *Tertium majorem* atque *Quintum majorem*. Si longitudines sunt, ut $1 ; \frac{2}{3} ; \frac{1}{2}$, vel ut 30 ; 20 ; 15, edunt *Sonum fundamentalem*, *Quintum majorem atque Octavum;* si sunt, ut $1 ; \frac{3}{4} ; \frac{3}{5}$, vel ut 20 ; 15 ; 12, hi soni sunt: *fundamentalis*, *Quartus major* atque *Sextus major*. Sed numeri 30 ; 24 ; 20 et 30 ; 20 ; 15 atque 20 ; 15 ; 12 sunt in Proportione harmonica continua (§. 253.).

§. 257. *Progressio harmonica. Definitio.*

Progressio harmonica dicitur illa numerorum Series, in qua quilibet tres termini, sibi proxime succedentes, sunt in Proportione continua harmonica.

§. 258. *Coroll.* 1.

Ergo Progressio harmonica hanc habet formam

$$\frac{1}{p};\ \frac{1}{p+d};\ \frac{1}{p+2d};\ \frac{1}{p+3d};\ \frac{1}{p+4d};\ \frac{1}{p+5d}\ \ldots\ \frac{1}{p+(m-1)d},$$

ubi m terminus est $= \frac{1}{p+(m-1)d}$. Sumantur enim ad libitum ex hac Serie tres termini sibi succedentes $\frac{1}{p+3d}$; $\frac{1}{p+4d}$; $\frac{1}{p+5d}$, atque ponatur $p+3d=p'$; un-

unde termini fiunt $\frac{1}{p'}$; $\frac{1}{p'+d'}$; $\frac{1}{p'+2d'}$, qui sunt in Proportione harmonica continua (§. 253.).

§. 259. Coroll. 1.

Denominatores terminorum sunt in Progressione arithmetica, cujus primus terminus est p, secundus p + d. Quae causa est, cur haec Progressio etiam dicatur *Series arithmetica reciproca.*

§. 260. Coroll. 2.

Ex Multiplicatione vel Divisione omnium terminorum Progressionis per eundem numerum existunt novae Progressiones harmonicae. Etenim $\frac{m}{p}$; $\frac{m}{p+d}$; $\frac{m}{p+2d}$; ... etiam est Progressio harmonica. Nam si ponitur $p' = \frac{p}{m}$, $d' = \frac{d}{m}$, nascitur Progressio $\frac{1}{p'}$; $\frac{1}{p'+d'}$; $\frac{1}{p'+2d'}$ ... quae est harmonica.

§. 261. Coroll. 3.

Sit m terminus $= t$, atque $m+1$ terminus $= t'$; ergo $t = \frac{1}{p+(m-1)d}$, $t' = \frac{1}{p+md}$;

ergo $tt' = \frac{1}{(p+(m-1)d)(p+md)}$ (§. 137.).

$$t-t' = \frac{1}{(p+(m-1)d)} - \frac{1}{p+md} = \frac{d}{(p+(m-1)d)(p+md)}$$

$= d.\ tt'$ (§. 164. 4.); atque $d = \frac{t-t'}{tt'}$ (§. 136.). Quare

Dif-

Differentia harmonica aequalis est Differentiae duorum terminorum, qui sibi proxime succedunt, divisae per ipsorum Productum. Ergo regula, per quam reperitur d. (§. 253.) est generalis, atque refertur ad quoslibet terminos Progressionis sibi succedentes; unde Proportio $\frac{t-t'}{tt'} = \frac{a-b}{ab}$, ubi a et b, sunt duo primi termini.

Sit proposita Progressio, cujus primus terminus est 30, secundus 24; quae est hnjusmodi:

$$\frac{120}{4};\ \frac{120}{5};\ \frac{120}{6};\ \frac{120}{7};\ \frac{120}{8};\ \frac{120}{9}\ \ldots\ \frac{120}{3+m}$$

ubi $p = \frac{1}{30}$; $d = \frac{1}{120}$; $t = \frac{120}{3+m}$; $m = \frac{120}{t} - 3$.

Ex aequatione ultima reperiuntur omnes illi termini Progressionis, qui sunt numeri integri, quoniam sunt Divisores numeri 120 (§. 175 et §. 176.), ut:

$t = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 15;\ 20;\ 24;\ 30.$
$m = 117;\ 57;\ 37;\ 27;\ 21;\ 17;\ 12;\ 9;\ 7;\ 5;\ 3;\ 2;\ 1.$

Quod si autem ponitur $a = 24$, $b = 30$, erit

$$d = -\frac{1}{120};\ p = \frac{1}{24};\ t = \frac{1}{\frac{1}{24} - \left(\frac{m-1}{120}\right)} = \frac{120}{6-m}$$

(§. 187.) atque Progressio est:

$$\frac{120}{5};\ \frac{120}{4};\ \frac{120}{3};\ \frac{120}{2};\ \frac{120}{1};\ \frac{120}{0};\ \frac{120}{-1}\ \ldots$$

ubi sextus terminus est infinitus, atque formae $\frac{a}{0}$. (§. 162. 8.) qui est transitus ex statu positivo in negativum. Simplicissima fit forma Progressionis, si primus terminus est unitas, quoniam tum $p = 1$; ergo Progressio est:

$$1;\ \frac{1}{1+d};\ \frac{1}{1+2d};\ \frac{1}{1+3d};\ \frac{1}{1+4d}\ \ldots\ \frac{1}{1+(m-1)d}.$$

ut, si $d = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots$ erit

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5}\ \ldots\ \frac{1}{m}$$

$$1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{9}\ \ldots\ \frac{1}{2m-1}$$

$$1;\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{7};\ \frac{1}{10};\ \frac{1}{13}\ \ldots\ \frac{1}{3m-2}.$$

Difficilius est reperire Summam hujus Progressionis, quam vel geometricae vel arithmeticae. De hoc deinceps.

§. 262. *Coroll.* 3.

Progressionis harmonicae termini, per aequales saltus excerpti, novam constituunt Progressionem harmonicam.

Nam si unus continuo tollitur terminus, Progressio est:

$$\frac{1}{p};\ \frac{1}{p+2d};\ \frac{1}{p+4d};\ \frac{1}{p+6d}\ \ldots\ \frac{1}{p+2(m-1)d}$$

Si duo continuo tolluntur, prodit:

$$\frac{1}{p};\ \frac{1}{p+3d};\ \frac{1}{p+6d};\ \frac{1}{p+9d}\ \ldots\ \frac{1}{p+3(m-1)d},\ \text{caet.}$$

ubi pro d sumti sunt $2d$, $3d \ldots$

Ex quo etiam sequitur, *tres quoscunque terminos, ex Progressione harmonica per aequales saltus excerptos, esse in Proportione harmonica continua:*

ut $\frac{1}{p+2d};\ \frac{1}{p+5d};\ \frac{1}{p+8d}.$

Sit

Sit enim $p+2d=p'$, ergo tres termini sunt $\frac{1}{p'}$; $\frac{1}{p'+3d}$; $\frac{1}{p'+6d}$, qui sunt in ista Proportione.

§. 263. *Animadv.*

De Progressione harmonica egit J. H. van Swinden (*Grondbeginsels der Meetkunde* p. 115—125.) Petr. Horrebow (*opera mathematico-physica* Pars I. p. 176 seqq.) ejus varios usus ostendit in Geometria et Physica.

P. II. C. II. SECTIO VI.

DE PROPORTIONE INTER QUANTA CUJUSQUE GENERIS.

§. 264. *De natura hujus Proportionis.*

Ut aliqua possit esse Ratio inter duo Quanta, ejusdem debent esse generis (§. 46.). Inter pondus aliquod et lineam et horam nulla omnino est Ratio. Ut autem definiatur Exponens Rationis inter duo Quanta A et B, ad communem aliquam mensuram sive unitatem sunt referenda, quae igitur ejusdem est generis atque Quanta, quae metitur (§. 55. Proleg. §. 6.). Sit haec mensura $=M$, atque $A=a.M$; $B=b.M$, ubi a et b sunt quilibet numeri, erit $\frac{a}{b}$ Exponens Rationis,

at-

atque oritur Proportio $A : B = \frac{a}{b} : 1 = a : b$ (§. 50—54.). Ita si A et B sunt lineae rectae, ex quibus A continet 6 metra, B autem 5 metra, *metrum* est communis mensura; $\frac{6}{5}$ est *Exponens Rationis*, unde Proportio $A : B = 6 : 5$. Si B est metrum, *ipsum B est mensura Quanti A*, atque *b fit unitas*, unde $A : B = a : 1$, vel $A = a . B$.

Saepe autem accidit, ut Quanta A et B duabus diversis unitatibus, quae tamen sunt ejusdem generis, definita sint. Ratio tum reperitur mutando, Multiplicationis vel Divisionis ope, alterutram unitatem in alteram. Velut si A continet 5 metra atque B 6 decimetra, unitates eaedem redduntur, ponendo $5 . 10 = 50$ decimetra in locum 5 metrorum, quoniam metrum continet 10 decimetra, adeo ut Proportio fiat $A : B = 50 : 6$. Ex quo patet, *duo Quanta esse ejusdem generis, si alterum alteri, vel augendo, vel diminuendo, aequale potest reddi.* Sunt omnino 7 diversa genera Quantorum, in quibus versatur Mathesis pura et mixta, quae enumerata sunt §. 129. Reliqua enim ad haec referri possunt, ut v. c. *celeritas* ad lineam, quam dato tempore punctum percurrit; *massa* ad volumen dati ponderis vel ad pondus dati voluminis, caet. Caeterum, quae (§. 190—201. atque §. 236—248.) exposita sunt de Fractorum aequalitate et inaequalitate, fundamenta constituunt omnis Proportionis Quantorum, cujuscunque sint generis; quibus omnia, quae ad

aequa-

aequalitatem et inaequalitatem Rationum pertinent, superstrui possunt.

Sit M communis mensura Quantorum A et B; M' autem Quantorum C et D, ita quidem, ut $A = aM$; $B = bM$; $C = cM'$; $D = dM'$. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erit $A : B = C : D$, quod ita notare possumus: $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right)$. Rursus si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right)$, erit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atque quodcunque ex horum Fractorum aequalitate colligitur, atque expositum est §. 190, seqq.

Si autem $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, erit $\left(\frac{A}{B}\right) > \left(\frac{C}{D}\right)$, atque rursus, si $\left(\frac{A}{B}\right) > \left(\frac{C}{D}\right)$, erit $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, atque quodcunque ex horum Fractorum inaequalitate colligitur, atque expositum est §. 236, seqq.

Neque tamen ex lubitu in iis aequationibus et formulis pro a, b, c, d ponere licet A, B, C, D. Etenim

1. Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right)$, atque igitur $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sed M et M' non sunt ejusdem generis, perverse ponatur $\left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{D}\right)$, quamvis vere sit $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Idem colligitur, si $\left(\frac{A}{B}\right) > \left(\frac{C}{D}\right)$, vel $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Falsum est $\left(\frac{A}{C}\right) > \left(\frac{B}{D}\right)$, quamvis vere sit $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. Ut si A et B sunt lineae 2 et 6 metrorum, C et D pon-

de-

dera mercis cujusdam, 3 et 9 librarum, vere est $\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{C}{D}\right)$, sed absurde dicatur $\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)$.

Si D est 10 librarum, vere est $\left(\frac{A}{B}\right)>\left(\frac{C}{D}\right)$, sed falso $\left(\frac{A}{C}\right)>\left(\frac{B}{D}\right)$.

Si M non est $=M'$, sed ejusdem generis est, ponatur $M'=mM$, ergo $A=aM$; $B=bM$; $C=cM'=mcM$; $D=dM'=mdM$; ergo $\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{a}{b}$; $\left(\frac{C}{D}\right)=\frac{mc}{md}=\frac{c}{d}$; $\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{a}{mc}$; $\left(\frac{B}{D}\right)=\frac{b}{md}$. Quapropter, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, erit $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{C}{D}\right)$; $\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)$. Si $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, erit $\left(\frac{A}{B}\right)>\left(\frac{C}{D}\right)$, atque $\left(\frac{A}{C}\right)>\left(\frac{B}{D}\right)$.

2. Si $\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{C}{D}\right)$, erit $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ atque $\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}$ non vero $\left(\frac{A\pm C}{B\pm D}\right)=\left(\frac{A}{B}\right)$, nisi M et M' fuerint ejusdem generis. Idem valet, si $\left(\frac{A}{B}\right)>\left(\frac{C}{D}\right)$. Quanta enim, quae non sunt homogenea, neque addi, neque subtrahi alterum alteri possunt.

3. *Numeri, non Quanta, inter se multiplicari atque ad aliquam Potestatem integram vel fractam evehi possunt.* Ita quamvis vere sit $ad=bc$ atque $a^m\, d^m=b^m\, c^m$ falsum est $A.D=B.C$ atque $A^m\, D^m=B^m\, C^m$.

4.

4. Idem valet in Divisione. Vere est $d = \frac{bc}{a}$ sed falsum est $D = \frac{B.C}{A}$. Quare etiam Rationes $A:B$ et $C:D$ ita designamus $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{C}{D}\right)$ ne confundantur cum Fractis. Haec magis perspicuuntur ex Solutione hujus Problematis.

§. 265. *Problema.*

Definire, quid consequatur ex aequalitate Rationum $\left(\frac{A}{B}\right)$ *et* $\left(\frac{C}{D}\right)$; *qualiacumque sunt Quanta.*

Solutio.

Sit $A = aM$; $B = bM$; $C = cM'$; $D = dM'$. Ergo, si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right)$, erit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atque

1. *quodcunque ex horum Fractorum aequalitate vere colligitur*, atque expositum est §. 190—201.

2. $\left(\frac{B}{A}\right) = \left(\frac{D}{C}\right) = \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; id est: *rationes inversae etiam aequales sunt.* Si praeterea M et M' ejusdem sunt generis, atque $M' = mM$, erit etiam $\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{a}{mc}$; $\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{b}{md}$; $\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{mc}{a}$; $\left(\frac{D}{B}\right) = \frac{md}{b}$; ergo $\left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{D}\right)$; $\left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{D}{B}\right)$.

3. $B = \frac{b}{a}\ A = \frac{d}{c}\ A$; $D = \frac{d}{c}\ C = \frac{b}{a}\ C$, caet.

Si

Si praeterea M et M' sunt homogenea, atque $M' = mM$, erit $B = \frac{b}{md} D = \frac{a}{mc} D$; $D = \frac{md}{b} B = \frac{mc}{a} D$. caet.

Termini horum Fractorum ad libitum per eundem numerum multiplicari possunt vel dividi, atque in ipsorum locum etiam poni Fracti, ipsis aequales (§. 190. IX et X.), ut $A = \frac{ma \pm nc}{mb \pm nd} . B$, caet.

$\left(\frac{mA+nB}{mA-nB}\right) = \left(\frac{mC+nD}{mC-nD}\right)$; $\left(\frac{A+B}{A-B}\right) = \left(\frac{C+D}{C-D}\right)$ et ita plures aliae aequationes, Si M et M' ejusdem sunt generis, erit etiam

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A \pm C}{B \pm D}\right); \left(\frac{A+C}{A-C}\right) = \left(\frac{B+D}{B-D}\right).$$

4. Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right)$ atque M et M' ejusdem sunt generis, valent enunciationes §. 194. G. H. J. Si autem non sunt homogenea, prior tantum valet pars enunciationis §. 194. G.

§. 266. *Coroll.* 1.

De Quantis A, B, C, D, E, F ... si sunt homogenea, valet enunciatio (§. 196. I.), ubi b, d, f, h, k possunt etiam esse numeri. Quare, quod de partiendo Toto dictum est §. 196. II. III, de omni valet Quanto. Partes enim atque Totum sunt homogenea Quanta.

§. 267. *Coroll.* 2.

Neque *A*, *B*, *C*, *D* possunt efficere Proportionem arithmeticam, vel harmonicam, neque *A*, *B*, *C* Proportionem geometricam continuam, nisi sunt homogenea. Quare sola Quanta, quae omnia inter se sunt homogenea, Progressionem arithmeticam, geometricam vel harmonicam constituere possunt.

§. 268. *Animadv.*

Facile ex his positis principiis colligitur, quaenam eorum, quae de Fractorum aequalitate et inaequalitate conclusimus, referri possint ad Quanta cujusque generis. Quare in iis diutius morari non opus esse videtur. Magis ad rem videtur esse accommodatum, si usum Proportionum nonnullis exemplis ostendimus.

§. 269. *De usu Proportionum geometricarum.*

Usus Proportionum geometricarum, cum ex mensura ipsa prodeant, maximus est et uberrimus in tota Mathesi mixta et pura. Ita in Geometria pura, practica, in Opticis artibus caet. ubique reperiuntur Proportiones, quae ex similitudine figurarum et corporum nascuntur; tum in doctrina de motu et aequilibrio, in Astronomia, Technologia, Proportiones inter celeritatem motus et tempus, spatium, quod corpus percurrit, vires, quae motum excitant, impediunt, vel aequilibrium consti-

stituunt. Sed cum exempla, ex his disciplinis petita, ut accurate intelligantur, Quantorum, in quibus versantur, cognitionem requirant, tantum ex Arithmetica practica, disciplina omnibus fere cognita, nonnulla exempla, quae earum usum illustrent, hauriemus. Ea autem sunt hujusmodi.

§. 330. *Problemata Arithmeticae vulgaris, quae ad Proportiones geometricas referuntur.*

Huc referenda sunt: (1)

1. Problemata, quorum solutio fit per *regulam*, quae vulgo dicitur *trium*, sive *auream*, atque non alia est, nisi, *qua Proportionis quartus terminus ex tribus reliquis terminis cognitis reperitur*. Nam si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right)$ atque, ut antea posuimus, $A = aM$; $B = bM$; $C = cM'$; $D = dM'$, erit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ atque $d = \frac{bc}{a}$. Quare $D = \frac{bc}{a} \cdot M'$; vel $D = \frac{b}{a} \cdot C$, sive M et M' sunt ejusdem, sive diversi generis. Infinita sunt Problemata hujus generis, cum in aliis disciplinis mathematicis, tum in Arithmetica practica. Ita si pecunia, quae pro aliqua merce solvitur, est in Ratione Quantita-

(1) De his Problematibus confer. J. de Gelder V. cl. *Grondbeginselen der Cyferkunst* p. 640 seqq. ubi uberius exposita sunt. A. G. Kästner. *Fortsetzung der Rechenkunst* Götting. 1786.

titatis hujus mercis v. c. in Ratione ponderis, atque A et B sunt hujus mercis a et b librae, C et D autem c et d floreni, pro iis solvendi; erunt M, *una libra* mercis, M', *unus florenus* atque $D = \frac{bc}{a}$ floreni; id est: *si a librae hujus mercis emuntur c florenis, b librae ejusdem mercis emuntur* $\frac{bc}{a}$ *florenis.* Hujus etiam generis est: *Si singulis annis foenus 100 florenorum est 4 floreni; foenus 2000 florenorum est 80 floreni.* Nam $100 : 2000 = 4$ flor. : x flor. ergo x floreni $= \frac{2000}{100} \cdot 4$ floreni $= 80$ flor. In hoc Problemate M et M' ejusdem sunt generis.

2. *Problemata, quorum solutio efficitur per regulam inversam trium.* Saepe enim fit, ut qua ratione B augetur vel diminuitur, eadem ratione D diminuatur vel augeatur; unde Proportio $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{D}{C}\right)$, ubi $\frac{A}{B}$ est aequalis rationi $\left(\frac{C}{D}\right)$, sed inversae, ita ut D sit $= \frac{ac}{b} M' = \frac{a}{b} C$; velut, si ad aliquod opus perficiendum, requiruntur t dies, atque n operarii, perspicuum est, si diminuitur numerus dierum, augendum esse operariorum numerum, atque si diminuitur operariorum numerus, augendum esse numerum dierum, adeo ut, si t fit t', atque n fit n', semper sit $tn = t'n'$, aut $t : t' = n' : n$. Ergo si quaeritur, quot operariis (n') opus sit, ut idem opus t' diebus

bus absolvatur, erit $n' = \frac{tn}{t'}$; sed si quaeritur, quot diebus (t') opus sit, ut idem opus n' operariis absolvatur, erit $t' = \frac{nt}{n'}$.

Quare ad propositam Quaestionem: *si centum* (n) *operarii opus aliquod absolvere possunt* 12 (t) *diebus, quot operarii* (n') *requiruntur, qui id absolvant* 8 (t') *diebus*, Responsio est $n' = \frac{12}{8} \cdot 100 = 150$.

Si autem quaeritur *numerus dierum* (t'), *quibus* 150 (n') *operarii id opus absolvere possint*, erit $t' = \frac{100 \cdot 12}{150} = 8$.

3. *Problemata, quorum solutio fit per Rationes compositas, quam dicunt fieri per regulam trium compositam*. Hujus generis haec est quaestio; 120 *operarii tribus diebus aggerant molem terrae, cujus longitudo est* 125, *latitudo* 52, *altitudo* 6 *metrorum: quaeritur, quot requirantur, qui uno die aggerent molem, cujus longitudo sit* 460, *latitudo* 45 *et altitudo* 4 *metrorum?*

Soliditas prioris molis est $125 \cdot 52 \cdot 6$ metra cubica; posterioris autem $460 \cdot 45 \cdot 4$ metra cubica. Sumatur numerum operariorum augeri in eadem ratione, qua augeatur soliditas molis, si opus per idem tempus absolvendum sit. Quare si idem est tempus, erit $125 \cdot 52 \cdot 6 : 460 \cdot 45 \cdot 4 = 120$ oper.: x oper., ubi $x = \frac{460 \cdot 45 \cdot 4}{125 \cdot 52 \cdot 6} 120 = 254 \frac{10}{13}$. Quoniam autem posterius opus absolvitur uno die, prius au-

autem tribus diebus, numerus x est triplicandus, quo fit $764\frac{4}{13}$, ita ut requirantur 765 operarii.

Ergo solutio fit multiplicatione terminorum duarum Proportionum:

$$\begin{array}{l} 125 \cdot 52 \cdot 6 : 460 \cdot 45 \cdot 4 = 120 : x \\ \quad\quad 1 \quad : \quad 3 \quad\quad = x : y \\ \hline 125 \cdot 52 \cdot 6 : 460 \cdot 45 \cdot 12 = 120 : y. \end{array}$$ (1)

ubi y est numerus operariorum, qui quaeritur.

Eodem modo solvitur hoc Problema: *foenus* 100 *florenorum in unum annum est* 4 *floreni, quantum est foenus* 2000 *florenorum in* 6 *annos.* Nascitur proportio numerorum $100 : 2000 = 4 : x$, ubi mensura sive unitas est *unus florenus*, ergo $x = \frac{4 \cdot 2000}{100}$, est florenorum numerus, qui designat foenus 2000 florenorum in unum annum. Ergo $6x = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2000}{100} = 480$ floreni, est foenus in 6 annos. Ejusdem generis est Problema: *foenus* 7000 *florenorum in* 12 *annos est* 4000 *floreni, quantum est foenus* 13000 *florenorum in* 9 *annos;* quod ita etiam, ope duarum Proportionum, solvitur:

$$\begin{array}{l} 7000 : 13000 = 4000 : x \\ \;\; 12 \;\; : \;\; 9 \;\;\; = \; x \; : y \\ \hline \end{array}$$

ergo $7000 \cdot 12 : 13000 \cdot 9 = 4000 : y$ ergo $y = 5571\frac{3}{7}$, ubi $x \left(= \frac{13000 \cdot 4}{7} = 7428\frac{4}{7} \right)$ indicat foenus 13000 flo-

(1) De regulis, quas in his praescripserunt **Basedow** et **K. F. van Rees**, vide **Klügel** Mathem. Lexicon T. V. p. 748. atque **Kästner** *Fortsetzung der Rechenkunst* p. 27 seqq.

florenorum in 12 annos; 7 idem, sed in 9 annos.

4. Problemata, quorum forma universa haec est: *Dividere Quantum juxta certas quasdam Proportiones numerorum.* Regula, qua solvuntur, dici solet *regula societatis*, quoniam plurimum referuntur ad jacturam et lucrum; ad accepta et expensa, ad fructus et sumtus, inter diversos homines consociatos dividenda.

Haec autem Problemata *duplicis sunt generis. Prius* est hujusmodi: *Totum aliquod T ita dividere in partes A, B, C, D, E ... ut hae partes sint in eadem ratione, qua numeri a, b, c, d, e ..*; id est, ut sit:

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = \frac{E}{e} \ldots$$

Solutio Problematum hujus generis exposita est §. 196. II. Nam si $s = a + b + c + d + e \ldots$ atque $\frac{T}{s} = t$, erit $A = at$, $B = bt$, $C = ct \ldots$

Sint 2000 *floreni ita dividendi inter quatuor homines, ut partes A, B, C, D, quas accipiant, sint, ut numeri* 2 . 3 . 5 . 6. Ergo $s = 2 + 3 + 5 + 6 = 16$; $t = \frac{T}{s} = \frac{2000}{16} = 125$, ergo $A = 2t = 250$ fl.; $B = 3t = 375$ fl.; $C = 5t = 625$ fl.; $D = 6t = 750$.

Haec regula etiam adhibetur *ad res, compositas ex partibus, quae sunt in certa quadam ratione.* Sit v. c. componendus pulvis pyrius ex 75 partibus nitri, 10 partibus sulphuris, atque 15 parti-

tibus carbonis. Totum debet esse 1200 librarum. Ergo $s = 100$, $\frac{T}{s} = 12$ libras $= t$; Quantitas nitri est 900, sulphuris 120, carbonis 180 librarum.

Alterum genus horum Problematum hanc habet formam: *Totum aliquod T ita dividere in partes* $A, B, C, D, E \ldots$ ut $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$; $\frac{B}{\beta} = \frac{C}{c}$; $\frac{C}{\gamma} = \frac{D}{d}$; $\frac{D}{\delta} = \frac{E}{e} \ldots$ ubi b et β; c et γ; d et $\delta \ldots$ *non sunt inter se aequales.*

Efficiendum est, ut Proportiones eandem acquirant formam, quam habent Proportiones prioris generis Problematum, quod fit, multiplicando terminos Fractorum per eundem numerum, ut

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{a}{b} = \frac{a\beta\gamma\delta}{b\beta\gamma\delta}\ ;\ \left(\frac{C}{D}\right) = \frac{\gamma}{d} = \frac{bc\gamma\delta}{bcd\delta}$$

$$\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{\beta}{c} = \frac{b\beta\gamma\delta}{bc\gamma\delta}\ ;\ \left(\frac{D}{E}\right) = \frac{\delta}{e} = \frac{bcd\delta}{bcde} \text{ caet.}$$

ergo $\frac{A}{a\beta\gamma\delta} = \frac{B}{b\beta\gamma\delta} = \frac{C}{bc\gamma\delta} = \frac{D}{bcd\delta} = \frac{E}{bcde}$.

$$T = A + B + C + D + E.$$

$$s = a\beta\gamma\delta + b\beta\gamma\delta + bc\gamma\delta + bcd\delta + bcde.$$

Sit $t = \frac{T}{s}$, unde $A = a\beta\gamma\delta \,.\, t$; $B = b\beta\gamma\delta \,.\, t$

$C = bc\gamma\delta \,.\, t$; $D = bcd\delta \,.\, t$, caet.

Sint v. c. 1000 floreni in quinque partes A, B, C, D, E ita dividendi, ut $\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{4}{5}$; $\left(\frac{C}{D}\right) = \frac{6}{7}$; $\left(\frac{D}{E}\right) = \frac{8}{9}$;

ergo $s = 2.4.6.8 + 2.4.6.8 + 3.5.6.8 + 3.5.7.8 + 3.5.7.9.$

$= 384$

$= 384 + 576 + 720 + 840 + 945 = 3465$, ergo $t = \frac{T}{s}$

$= \frac{1000}{3465} = \frac{200}{693}$;

atque $A = 384 . t = 110 \frac{570}{693}$; $B = 576 . t = 166 \frac{162}{693}$;

$C = 720 . t = 207 \frac{549}{693}$; $D = 840 . t = 242 \frac{294}{693}$;

$E = 945 . t = 272 \frac{504}{693}$.

5. Problemata, *quorum solutio versatur in definienda Ratione inter duo Quanta, ope Rationum intermediarum.* Ita si

Ratio $\left(\frac{A}{E}\right)$ est definienda per has Rationes:

$\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{b}{a}$

$\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{d}{c}$

$\left(\frac{C}{D}\right) = \frac{f}{e}$

$\left(\frac{D}{E}\right) = \frac{h}{g}$

---

erit $\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{bdfh}{aceg}$. Nam $A = \frac{b}{a} . B = \frac{b}{a} . \frac{d}{c} . C$

$= \frac{b}{a} . \frac{d}{c} . \frac{f}{e} . D = \frac{b}{a} . \frac{d}{c} . \frac{f}{e} . \frac{h}{g} . E$.

Quod etiam per Producta repraesentari potest, ut:

$x . E = mA$

$a . A = bB$

$c . B = dC$

$e . C = fD$

$g . D = hE$.

---

ergo $x . aceg = mbdfh$, ergo $x = \frac{mbdfh}{aceg}$.

Quae-

Quaeritur, *quot pedes Rhenanos contineant* 100 *pedes Anglici, si* 81 *pedes Anglici sunt* 76 *pedes Parisienses et* 29 *pedes Parisienses sunt* 30 *pedes Rhenani*. Quod hoc modo proponitur:

$$30 . R = 29 P$$
$$76 . P = 81 A$$
$$100 . A = x R$$

$$30 . 7600 = 29 . 81 . x, \text{ ergo } x = 97 \frac{49}{783}.$$

§. 271.

Posuimus in hac Sectione, Quanta esse commensurabilia, sive eorum Rationem posse indicari per numerum finitum. In loco de numerorum Radicibus demonstrabitur, hoc idem, quod explicatum est, valere de numeris non commensurabilibus.

P. II. C. II. SECTIO VII.

DE FRACTIS DECIMALIBUS.

§. 272. *De natura Fractorum decimalium.*

Si quis numerus (ut 8345) designatus est notis Systematis decadici, quaelibet nota consequens (ut 3), si a sinistra ad dextram regredimur, indicat unitates decies minores, quam antecedens nota (8), ita ut postrema nota (5) designet unitates simplices (§. 41.). Nihil autem impedit, quominus in hac Serie ultra has unitates simplices progrediamur, dummodo comma, vel punctum, vel

aliud signum post unitates simplices positum sit, ut distinguantur numeri integri a fractis. Quod si facimus, *notae post hoc signum indicabunt unitates fractas, quae sunt decimae, centesimae, millesimae, decies millesimae, centies millesimae ... partes unitatis integrae, seu fractos numeros, quorum Denominatores sunt* 10, 100, 1000, 10000, caet.

Itaque 24,587436 indicat 24 unitates integras, 5 decimas, 8 centesimas, 7 millesimas, 4 decies millesimas, 3 centies millisimas, 6 millies millesimas partes unitatis; sive hanc seriem:

$$24 + \frac{5}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \frac{6}{10^6}.$$

Ergo *hi Fracti, post comma positi, habent Denominatores omnes formae* 10^m, ubi m est numerus integer positivus; unde etiam dicuntur *Fracti decimales. Eorum autem Numeratores sunt numeri integri.* Quare Fractus $\frac{1\frac{2}{7}}{100}$ in Fractorum decimalium numero non est ponendus. *Exponens m simul designat ultimum locum Fracti post comma.*

§. 273. *Coroll.* 1.

Quilibet numerus N, mixtus ex unitatibus integris et fractis decimalibus, hac serie repraesentari potest:

$$N = a \cdot 10^m + b \cdot 10^{m-1} \ldots + l \cdot 10^2 + m \cdot 10^1 + n \cdot 10^0 + p \cdot 10^{-1} + q \cdot 10^{-2} + r \cdot 10^{-3} + s \cdot 10^{-4} \ldots,$$

ubi notae a, b, c ... s ... repraesentant numeros

ros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; ita ut etiam possint esse cifrae, id est, 0. Fracti decimales habent Exponentes negativos. Si numerus est 24, 587463, *a*, *b*, *c* . . . *l* sunt 0, *m* est $= 2$, $n = 4$, $p = 5$, $q = 8$, $r = 7$, caet. Si numerus non habet unitates integras, *a*, *b*, *c* . . . *n* sunt 0, idque indicatur posita cifra ante comma, ut: $0,0043 = 4 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}$.

§. 274. *Coroll.* 2.

Numerus fractus decimalis quantitate non mutatur, si ad finem ipsi adscribuntur cifrae, ut: $0,43 = 0,430000 \ldots$

§. 275. *Coroll.* 3.

Si Fractus decimalis multiplicatur per 10, 10^2, 10^3 . . . 10^m, *comma uno, duobus, tribus . . . m locis, dextram versus regreditur. Si ad postremam notam pervenit, atque ulterius regredi debeat, numero, qui totus jam redditus est integer, ad finem adjiciuntur cifrae* (§. 98.), ut:

$4,2345 \times 10 = 42,345$	$4,2345 \times 10000 = 42345$
$4,2345 \times 100 = 423,45$	$4,2345 \times 100000 = 423450$
$4,2345 \times 1000 = 4234,5$	$4,2345 \times 10^9 = 4234500000$.

§. 276. *Coroll.* 4.

Contra est in Divisione. Nam *si Fractus decimalis, vel numerus integer dividitur per* 10, 10^2, 10^3 . . . 10^m, *comma uno, duobus, tribus . . . m locis sinistram versus progreditur. Si ad primum numerum, qui jam designat simplices uni-*

unitates pervenit, *atque ulterius progredi debeat*; *ipsi numero anteponuntur cifrae*, ut:

$$\frac{4234500}{100000}=4234500,10^{-5}=42,345 \cdot \frac{0,42345}{100}=0,0042345$$

$$\frac{42,345}{100}=42,345 \cdot 10^{-2}=0,42345;\quad 4235 \cdot 10^{-8}=0,00004235;$$
$$0,4235 \cdot 10^{-8}=0,000000004235.$$

§. 277. *Coroll. 5.*

Omnis Fractus decimalis hac forma repraesentari potest, $\frac{A}{10^m}$, *ubi* 10^m *designat Denominatorem ultimae notae decimalis*. Nam si a, b, c ... repraesentant decimas, centesimas, millesimas ... partes unitatis, erit

$$N=\frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1000}\ldots=a.10^{-1}+b.10^{-2}+c.10^{-3}+d.10^{-4}\ldots$$
$$+p.10^{-m}=\frac{a.10^{m-1}+b.10^{m-2}+c.10^{m-3}+d.10^{m-4}\ldots+p.}{10^m};$$

ubi Numerator designat numerum integrum A, ut: $0,2438$ $=\frac{2}{10}+\frac{4}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{8}{10000}=\frac{2438}{10000}$.

§. 278. *Coroll. 6.*

Quoniam Fractorum decimalium, atque numerorum integrorum, juxta Systema Decadicum designatorum, eadem est ratio, Additio et Subtractio utrorumque eadem est (§. 42.), ut:

1,356	0,14793	81,3400
2,511	0,00623	67,8964
0,122	0,00324	Residuum est 13,4436
Summa est 3,989	0,00006	
	Summa est 0,15746	

Sit

Sit Minuendus $p = 13,5678$
Sint Subtrah. $a = 0,4698$
$b = 0,3575$
$c = 1,2567$
Residuum est $= p - (a+b+c) = 11,4838$. (§. 43.)

§. 279. *Problema.*

Reperire Productum Factorum, qui sunt vel Fracti decimales, vel mixti ex numeris integris et Fractis decimalibus.

Solutio.

Factores sint $\frac{A}{10^p}$ et $\frac{B}{10^q}$; ergo $\frac{A}{10^p} \cdot \frac{B}{10^q} = \frac{AB}{10^{p+q}}$ (§. 137 et §. 91.) $= AB \cdot 10^{-(p+q)}$ (§. 142.).

Ergo *numeri sunt inter se multiplicandi, tanquam si essent integri. Comma autem ita est collocandum, ut sit ante $p+q$ notas decimales.* Idem valet de quotlibet Factoribus, ut: $\frac{A}{10^p} \cdot \frac{B}{10^q} \cdot \frac{C}{10^r} = ABC \cdot 10^{-(p+q+r)}$.

Ergo *in Producto ex duobus aut pluribus Factoribus tot notae decimales ab integra parte per comma separantur, quot sunt in Factoribus. Si ita desunt notae, supplentur per cifras, positas post comma ante reliquas notas. Quare si alteruter Factor fuerit integer, in Producto erunt tot decimales, quot fuerint in altero Factore.* Nam $A \cdot \frac{B}{10^q} = AB \cdot 10^{-q}$. (§. 142.)

Exem-

Exempla sunt hujusmodi:

$2,46 \times 4,83 = 11.8818$; $0,2005 \times 0,6003 = 0,12036015$

$246 \times 0,483 = 118,818$; $0,002005 \times 0,006003 = 0,000012036015$

$2,345 \times 0,000008 = 0,00001876$.

§. 280. *Problema.*

Quotum $\frac{A}{B}$, cujus duo termini A et B, vel alteruter eorum est Fractus decimalis purus aut mixtus, mutare in Quotum, cujus termini sint numeri integri.

Solutio.

Quotus sit $\frac{P.10^{-p}}{Q.10^{-q}} = \frac{A}{B}$, ergo $\frac{A}{B} = \frac{P}{Q}.10^{q-p} = \frac{P}{Q.10^{p-q}}$. (§. 143.).

Ergo *comma deleatur, sed adjiciantur Dividendo $q-p$ cifrae, si $q > p$, atque Divisori $p-q$ cifrae, si $p > q$.*

Ergo si $q = o$, id est: si Divisor est integer, ei adjiciuntur p cifrae. Si autem $p = o$, id est, si Dividendus est integer, Dividendo adjiciuntur q cifrae. (§. 275.).

§. 281. *Problema.*

Quotum $\frac{A}{B}$ reperire, cujus duo termini, vel alteruter eorum est Fractus decimalis aut mixtus.

Solutio.

Secundum antecedentis Problematis solutionem, ita Quoti formam muta, ut termini ejus reddantur integri, atque ipsorum perage Divisionem. Si tum accidit, ut Divisor m notis major sit,

sit, quam Dividendus, oritur Fractus decimalis, ubi $m - 1$ cifrae sequuntur post comma, si primae notae Dividendi majores sunt quam Divisoris, sed m cifrae, si minores sunt, ut:

$$\frac{0{,}01728}{1{,}2} = \frac{1728}{120000} = 0{,}0144, \text{ ubi } m = 6 - 4 = 2, \text{ atque } 17 > 12.$$

$$\frac{0{,}01728}{2{,}4} = \frac{1728}{240000} = 0{,}0072, \text{ ubi } m = 6 - 4 = 2, \text{ atque } 17 < 24.$$

Exempla.

1. Ubi $p = q$; $\frac{0{,}00064}{0{,}00004} = \frac{64}{4} = 16$; $\frac{118{,}818}{0{,}246} = \frac{118818}{246} = 483.$

2. Ubi $q > p$; $\frac{0{,}64}{0{,}00004} = \frac{64000}{4} = 16000$; $\frac{118818}{0{,}246} = \frac{118818000}{246} = 483000.$

3. Ubi $p > q$; $\frac{0{,}00064}{0{,}04} = \frac{64}{4000} = 0{,}016$; $\frac{1{,}18818}{0{,}246} = \frac{118818}{24600} = 4{,}83.$

§. 282. *Coroll.* 1.

Si quid est residui ex Divisione (§. 152. §. 159.), adjectis Dividendo cifris post comma (§. 274.), in Divisione progredi possumus. Ita $\frac{34}{15} = \frac{34,000000\ldots}{15} = 2,266666\ldots$, ubi Fractus decimalis continua repetitione numeri 6 progreditur ad infinitum. Ex quo patet, quo plures notae decimales (si postrema non est 0) in ejusmodi Fracto post comma sequantur, eo magis accedi ad veram ejus Quantitatem, ut: si ponitur $\frac{34}{15} = 2{,}2666$, supplementum, quod seriei addi debet, minus est, quam

quam 0,0001; si autem ponitur $\frac{34}{15} = 2,2666666$, minus est, quam 0,0000001.

Si autem Denominator, postquam Quotus, sive Fractus ad minimos terminos reductus est (§. 180.) constat ex solis numeris 2 et 5 eorumve Potestatibus, Residuum tandem fit $= 0$, atque Divisio est completa, ut: $\frac{34}{25} = 1,36$; $\frac{75}{32} = 2,34375$.

Exempla, ubi numeri redeuntes uncis inclusi sunt.

$\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{2.3} = \frac{1}{6} = 0,1(6)\ldots$; $\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{24} = 0,041(6)\ldots$

$\frac{1}{2.3.4.5} = \frac{1}{120} = 0,008(3)\ldots$; $\frac{1}{2.3.4.5.6} = \frac{1}{720} = 0,0013(8)$.

$\frac{1}{2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{5040} = 0,0001(984126)$.

$\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} = \frac{1}{40320} = 0,0000248(015873)$.

$\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{1}{362880} = 0,0000027(557319223985890652)$.

$\frac{1}{2,302585092994\ldots} = 0,4342944819 03\ldots$

$\frac{38076}{137} = 277,927(00729927)$.

$\frac{8,2356}{17} = 0,4844(470588235294117 6)$.

§. 283. *Coroll.* 2.

Explicatum fuit §. 153, quomodo numerorum, quorum posteriores notae sunt cifrae, Divisio per 5, 25, 125 ... reddatur facilior. Sed ope Fracto-

torum decimalium quemlibet numerum, quamvis non desinat in cifram, eodem faciliore modo per hos numeros dividere possumus, id est, per Potestates numeri quinarii. Nam $10^p = 2^p\, 5^p$. (§. 94.); ergo $5^p = \frac{10^p}{2^p}$ (§. 136.). Unde $\frac{N}{5^p} = \frac{N \cdot 2^p}{10^p}$ (§.165.6).

Ergo si p ponitur $= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$ erit $\frac{N}{5} = \frac{2N}{10}$;
$\frac{N}{25} = \frac{4N}{100}$; $\frac{N}{125} = \frac{8N}{1000}$; $\frac{N}{625} = \frac{16N}{10^4}$; $\frac{N}{3125} = \frac{32N}{10^5}$;
$\frac{N}{15625} = \frac{64N}{10^6}$; $\frac{N}{78125} = \frac{128N}{10^7}$ seqq. (confer. Tab. p. 83);

ut: $\frac{643}{5} = \frac{2.643}{10} = 128{,}6$; $\frac{643}{25} = \frac{4.643}{10^2} = 25{,}72$;
$\frac{643}{125} = \frac{8.643}{10^3} = 5{,}144$; $\frac{643}{15625} = \frac{64.643}{10^6} = 0{,}041152$.

Quare, si Divisor cujusdam numeri N est formae $A \cdot 5^p$, N primum dividi potest per 5^p, deinde per A (§. 159. p. 168.), ut in his exemplis, ubi (similiter atque §. 282.) numeri, qui continuo redeunt, uncis inclusi et designati sunt.

$\frac{643}{15} = \frac{(64{,}3)2}{3} = \frac{128{,}6}{3} = 42{,}8\ (6)$.

$\frac{643}{35} = \frac{(64{,}3)2}{7} = \frac{128{,}6}{7} = 18{,}3(714285)$.

$\frac{643}{45} = \frac{128{,}6}{9} = 14{,}2\ (8)$; $\frac{643}{75} = \frac{(6{,}43)4}{3} = \frac{25{,}72}{3} = 8{,}57\ (3)$.

$\frac{643}{375} = \frac{(0{,}643)8}{3} = \frac{5{,}144}{3} = 1{,}714\ (6)$.

$\frac{643}{28125} = \frac{(0{,}00643)32}{9} = \frac{0{,}20576}{9} = 0{,}02286\ (2)$.

§. 284. *Coroll.* 3.

Rursus, si numerus N multiplicatur per 5^p, Productum est $N.5^p = \frac{N.10^p}{2^p}$, ut, $(0,20576)\,3125 = \frac{(0,20576)10^5}{2^5} = \frac{20576}{32} = 643$, caet.

§. 285. *Coroll.* 4.

Quomodo Fractio vulgaris $\frac{a}{b}$ *per decimalem* c *multiplicetur et dividatur per se patet.* Nam $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$, atque $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ (§. 165.). Eodem modo, si Fractio decimalis c est multiplicanda vel dividenda per vulgarem $\frac{a}{b}$, fit $c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$, atque $c : \frac{a}{b} = \frac{bc}{a}$ (§. 165.). Si Fractiones decimales et vulgares sunt inter se addendae vel subtrahendae, vulgares in decimales mutandae sunt.

§. 286. *De contracta Multiplicatione Fractionum decimalium.*

Productum duarum Fractionum decimalium, in quarum alterutra sunt m, in altera n notae decimales, quarum postrema non est cifra, habet $n+m$ notas, ita ut ultima nota decimalis a designet $a.10^{-(n+m)}$. At vero, si sufficit, ut p solae notae decimales sint in Producto, id est, ut ultima designet a^{-p}, postremae $m+n-p$ decimales in calculo omitti possunt; ex quo oritur *Multiplicatio decimalium contracta et facilior*, cujus natura haec est:

In

In multiplicandis cum numeris integris, tum decimalibus, possumus uti secundo schemate, §. 102. exposito, *ubi Multiplicatio non incipit a minima, sed a maxima unitate Multiplicatoris*, ita ut schema sit hujusmodi:

```
  7,65340958
  2,56307
-------------
 15,30681916
  3,826704790
    4592045748
     2296022874
       5357386706
-------------
```

Productum est 19,61622449221106.

At vero si sufficit, ut in Producto sint *quinque* decimales, octavae, nonae ... decimales omitti possunt; non vero sextae et septimae, quoniam summa decimalium sextarum et nonnunquam etiam septimarum notarum potest suppeditare unitatem aut duas et plures, quae, sint quinti ordinis. Ergo incipimus Multiplicationem ab ea nota decimali Multiplicandi, quae multiplicata per primam notam Multiplicatoris, efficit septimam aut saltem sextam aliquam decimalem. Ita in sequenti exemplo prima nota (2) Multiplicatoris multiplicat septimam decimalem (6) Multiplicandi, deinde secunda nota (5) sextam decimalem (9); tertia nota (6) quintam decimalem (0), et ita deinceps eodem ordine, hoc modo, ubi pro 58 posuimus 6, quoniam $\frac{8}{10} > \frac{5}{10}$.

```
  7,6534096      aut     76534096
  2,56307                  703652
------------            ----------
 15,3068192             153068192
  3,8267045              38267045
    4592040               4592040
     229602                229602
       5355                  5355
------------            ----------
 19,6162234             19,6162234.
```

ubi Productum verum est usque ad quintam notam decimalem. Quoniam in Multiplicatione a dextra ad sinistram progredi insuevimus, calculus fit commodior, si hunc morem servamus. Tum autem series notarum Multiplicatoris invertenda est, ut in secundo schemate fecimus. Hoc etiam id habet commodum, quod tum perspicue apparet, a quibusnam notis incipiendae sint singulae Multiplicationes partiales; ut 6 est per 2; 9 per 5; caet. multiplicandus, ita ut negligantur omnes numeri, qui ad dextram sint.

Si prima nota Multiplicatoris est formae $a \cdot 10^m$, atque quaeruntur decimales usque ad p Potestatem, id est, usque dum ultima Producti nota sit formae 10^{-p}, Multiplicatio per $a \cdot 10^m$ incipere debet ab $m+p+2$ nota decimali Multiplicandi; cui, si tot non habet notas quot sufficiunt, adjiciendae sunt cifrae. Si autem m est Exponens negativus, id est, si prima nota Multiplicatoris est $m$tima nota decimalis, Multiplicatio per a^{-m} incipere debet ab hac $p+2-m$ nota Multiplicandi. Velut si 7,6534096 multiplicandus est per 0,00256307, atque quaeritur, ut Productum verum sit usque ad quartam decimalem, Multiplicatio incipienda est a $p+2-m=6-3$, id est, a tertia nota Multiplicandi. Tum etiam omittuntur notae Multiplicatoris ad dextram, quae non multiplicant. Ergo calculus fit hujusmodi:

```
  7,653        aut     7,653
  0,002563              3652
 ---------            -------
  15306                15306
   3825                 3825
    456                  456
     21                   21
 ---------            -------
 0,019608             0,019608,
```

quod Productum usque ad quartam decimalem verum est.

Exemplum sumatur ex Geometria. Haec docet, peripheriam circuli inveniri, si radius circuli multiplicatur per 6,283185307178 ... Sit radius 2345,61 metrorum, atque quaeratur peripheria usque ad pollices, id est, usque ad secundas decimales; rejectis partibus, quae minores sunt. Multiplicandus sit prior numerus, Multiplicator posterior, quod fieri licet (§. 75.). Ergo Multiplicatio incipienda est a septima nota decimali Multiplicandi, quoniam $m = 3$, $p = 2$, ergo $3 + 2 + 2 = 7$. Inverso igitur Multiplicatore, calculus ita instituitur:

```
 6,2831853
    165432
 ----------
 125663706
  18849555
   2513272
    314155
     37698
       628
 ----------
 14737,9014
```

quod Productum verum est vel usque ad tertiam decimalem.

Si idem numerus *N* est Factor plurium Productorum, quae reperiunda sunt, commodum est, antea componere tabulam, indicantem Producta hujus numeri atque numerorum 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9; quae tabula simplici Additione reperitur. Si *N* ita decies sumitur, perspicitur, utrum haec Additio accurate instituta fuerit, ut in Exemplo proposito:

$N = 6$

1	$N = 6{,}2831853$
2	$N = 12{,}5663706$
3	$N = 18{,}8495559$
4	$N = 25{,}1327412$
5	$N = 31{,}4159265$
6	$N = 37{,}6991118$
7	$N = 43{,}9822971$
8	$N = 50{,}2654824$
9	$N = 56{,}5486677$
10	$N = 62{,}8318530.$

Ex hac Tabula sumuntur Producta partialia, quae sunt in Multiplicatione et Divisione computanda. Tota Multiplicatio tum in Additionem mutatur.

§. 287. *De contracta Divisione numerorum integrorum et decimalium.*

Ex his facile perspicitur haec *regula Divisionis contractae numerorum integrorum*, quae tota nititur contracta Multiplicatione.

Si solummodo requiritur, ut Quotus verus sit usque ad ptimam decimalem, atque reliquarum decimalium non habetur ratio, ita agendum est:

Si Divisor habet m notas, aufer Dividendo $m-(p+2)$ notas ad dextram, atque perage Divisionem. Sed si $m < p+2$ adjice Dividendo et Divisori $p+2-m$ cifras. Si quid est residui ex Divisione, unam aufer notam Divisori, atque quaere novum Quotum partialem; aufer iterum notam et quaere tertium Quotum, atque eodem modo progredere in singulis sequentibus Quotis partialibus. Si autem Dividendus, sublatis his $m-(p+2)$ notis, fit minor Divisore, Divisori etiam tot sunt auferendae notae, quot requiruntur, ut Dividendo minor reddatur, atque ita Divisio peragi possit.

Er-

Ergo *si solae unitates quaeruntur in Divisione, atque decimalium non habetur ratio, Dividendo* $m-2$ *notae auferendae sunt.*

Quinam in Quoto sint numeri integri, quinam decimales, facile perspicitur, ita ut nulla admonitione opus sit.

Hoc etiam animadvertendum est: *Si notae decimales omittuntur, ultima quae restat unitate augenda est, si consequens nota, id est, si prima nota omissa, aequalis est numero 5 vel major est eo;* (ut fecimus §. 286.) cujus rei ratio per se patet. Si una sola nota omissa est, eaque est 5, ultima ad libitum unitate augetur, vel non augetur.

§. 288. *Explicatio regulae contractae Divisionis.*

I. Ut haec regula, quae in calculo multum saepe affert commodum, illustretur, spectemus primum exemplis, quomodo agendum sit, *si quaeruntur solae unitates integrae.* Ex praescriptis Dividendo auferuntur $m-2$ notae. Si igitur habet n notas, servat $n-(m-2)=n+2-m$ notas. Per se intelligitur, hujus regulae non esse usum, si $m=1$, id est, si Divisor unam solam habet notam.

a. Sit 1728009 dividendus per 144; ergo $m=3$ atque Dividendo una nota (9) est auferenda. Est autem $\frac{172800}{144}=1200$, et, quoniam una nota est sublata, cifra adjicitur Quoto. Ergo hic Quotus est 12000, si

si unitatum fractarum non habetur ratio. Quod per se patet, quoniam $\frac{9}{144}$ multo minor est, quam unitas.

b. Proponatur $\frac{518721824425o}{709625} = 7309802$. Si dividimus juxta regulam praescriptam, Dividendus servat 9 notas. Nam $m=6$, $n=13$, ergo $n+2-m=9$. Haec Divisio eundem Quotum prodit:

```
          51872l8 24.  Quotus 7309802.
709625.   4967375
          -------
           2198432
           2128875
           -------
             695574
 70962.      638658
             ------
              56916
  7096.       56768
              -----
                148.
```

c. Quo autem numero Divisor multiplicatur, eodem numero Quotus dividitur (§. 135.). Ergo, si Divisor multiplicatur per 10^2, 10^4, 10^6, Quotus fit 73098, 02; 730, 9802; 7, 309802 (§. 276.) id est 73098; 731; 7, si solae unitates integrae quaeruntur. Idem invenimus, si praescriptam sequimur regulam.

Nam si Divisor fit 70962500, *m* est 8 atque *n* est 13. Ergo Dividendus servat $n+2-m$, id est, 7 notas, atque Divisor 6 notas, ut Divisio peragi possit; quae ita est:

```
            | 5187218 | Quotus 73098
709625.     | 4967375 |
              219843
   70962.     212886
      7096.     6957
       710.     6390
                 567
        71.      568
                 —1.
```

Omnino sumendus est 8, quoniam Productum 568 una sola unitate differt a 567.

Si Divisor fit 7096250000, *m* est 10 atque *n* est 13. Ergo Dividendus servat 5, et Divisor 4 notas. Quare haec est Divisio:

```
      | 51872 | Quotus 731.           | 51872 | Quotus 730,98
7096. | 49672 |   aut ita       7096. | 49672 |
         2200                            2200
  710.   2130                      710.  2130
           70                              70
   71.     71                              —    = 0,98.
           —                               71
          —1
```

Tandem si Divisor fit 709625000000, *m* est 12. Ergo Dividendus servat 3, atque Divisor 2 notas:

```
   | 519 | Quotus 7,3.
71 | 497 |
      22
   7. 21
       —
       1.
```

II. Eodem numero, quo multiplicatur Dividendus, eodem multiplicatur Quotus. Ergo Quotus, qui habet *p* decimales, fit numerus integer, si Dividendus per 10^p multiplicatur, atque Problema: *quaerere Quotum usque ad p deci-*

 cima-

cimales, idem est atque: *quaerere Quotum usque ad integras unitates, si Dividendus multiplicatus fuerit per* 10^p. At vero tum Dividendus acquirit $n+p$ notas, atque ipsi auferendae sunt $m-2$ notae. Sed, auferre $m-2$ notas ab $n+p$ notis, idem est, atque auferre $m-(p+2)$ notas ab n notis. Ergo ex regula: *si quaeritur Quotus usque ad integras unitates, Dividendo auferendae sunt* $m-2$ *notae*, sequitur: *si quaeritur Quotus usque ad p decimales, Dividendo auferendae sunt* $m-(p+2)$ *notae*. Quapropter, si prior regula vera est, posterior etiam vera est. Ex quo etiam sequitur, si $p+2>m$, ipsi Dividendo esse adjiciendas $p+2-m$ cifras.

Quare, ut hic iisdem, quibus usi sumus, utamur Quotis, si quaeritur, ut verus sit $\frac{518721824425}{709625000}$ usque ad *quartam* decimalem, n est $=12$, m est $=9$ atque $p=4$: ergo Dividendo auferuntur $m-(p+2)=3$ notae. Conservat igitur 9 notas. Ergo Divisio eadem est, atque antea:

709625 | 518721824 | Quotus 730,9802.

Si quaeritur, ut verus sit $\frac{518721824425}{70962500000}$ usque ad secundam decimalem, n est 12, m est 11, atque $p=2$; ergo Dividendo auferuntur $11-4=7$ notae. Ergo servat 5 notas, et Divisor 4. Divisio eadem est, atque antea:

7096 | 51872 | Quotus 7,31.

§. 289.

§. 289. *Coroll.* 1.

Si Dividendus et Divisor, vel alteruter eorum sunt Fracti decimales, ante Divisionem mutari possunt in numeros integros (§. 280.), atque Divisio contracta fieri potest secundum regulam praescriptam.

Ut hoc exemplis illustretur, peripheria alicujus circuli contineat 14737,9022715 metra. Quaeritur radius hujus circuli. Ut reperiatur radius, peripheria, ex rationibus Geometricis, dividenda est numero 6,2831853. Est igitur reperiundus Quotus $\frac{147379022715}{62831853}$; ubi $n = 12$, $m = 8$. Quapropter si quaeritur Quotus usque ad pollices, id est, usque ad secundam notam decimalem, p est 2, atque Dividendus servat 8 notas et Divisor 7, atque haec est Divisio contracta:

```
6283185 | 14737902 |   Quotus 2345,61.
        | 12566370 |
          --------
           2171532
 628319.   1884957
           -------
            286575
   62832.   251328
            ------
             35247
     6283.   31415
             -----
              3832
      628.    3768
              ----
                64
       63.      63
                --
                 1
```

Si quaeruntur solummodo metra, atque palmarum et pollicum non habetur ratio, Divisio haec est:

```
62832 | 147379 |   Quotus 2345,6
      | 125664 |
        ------
         21715
 6283.   18849
         -----
          2866
  628.    2512
          ----
           354
   63.     315
           ---
    6.      39.
```

Si

Si quaeritur radius usque ad sextam decimalem, nullae notae Dividendo auferuntur, quoniam $m-(p+2)=8-(6+2)=0$. Ergo Divisio haec est:

$$\begin{array}{r|l|l} 6283185{\dot 3} & 147379022715 & \text{Quotus } 2345,6100000. \\ & 147340695285 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 6283185. & 38327430 \\ & 37699110 \\ \hline 628319. & 628320 \\ & 628319 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{628319}=0,000001\ldots.$$

Si ex his quaeritur Ratio inter radium et peripheriam circuli *usque ad septimam decimalem*, quaerendus est Quotus $\frac{14737,9022715}{2345,61}$. Haec Quaestio etiam in hanc mutari potest: quaerere Quotum $\frac{147379022715}{2345,61}=\frac{14737902271500}{234561}$ usque ad unitates integras. Cum igitur sit $n=14$, $m=6$, auferendae sunt Dividendo $m-2=4$ notae. Ergo Divisio est:

$$\begin{array}{r|l|l} 234561 & 1473790227 & \text{Quotus } 628318{5}3 \\ & 1473746763 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 43464 \\ 23456. & 23456 \\ \hline & 20008 \\ 2346. & 18768 \\ \hline & 1240 \\ 235. & 1175 \\ \hline & 65 \\ 23. & 69 \\ \hline & -4. \end{array}$$

ergo verus est Quotus 6,2831853. usque ad septimam decimalem.

§. 290.

§. 290.

De convertendis Fractis vulgaribus formae $\frac{A}{2^m}$ et $\frac{A}{5^m}$ in Fractos decimales.

Fracti vulgares cujusque formae convertuntur in Fractiones decimales, adjiciendo cifras Numeratori post comma, et dividendo per Denominatorem, ut $\frac{3}{4} = \frac{3,00}{4} = 0,75$.

Hac autem commutatione duo oriuntur harum Fractionum genera, quorum alterum constat ex finito numero notarum decimalium; alterum ex numero non finito, cujus exempla vidimus (§. 282 et 283). Prioris generis sunt omnes, eaeque solae, quae nascuntur ex Fractionibus vulgaribus formae $\frac{A}{2^m}$ et $\frac{A}{5^m}$, id est, quarum Denominatores sunt Potestates numeri binarii et quinarii.

Exempla formae $\frac{1}{2^m}$ et $\frac{1}{5^m}$ hujusmodi sunt:

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$ $\qquad$ $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = 0,2$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 0,25$ $\qquad$ $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 0,04$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 0,125$ $\qquad$ $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 0,008$

$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 0,0625$ $\qquad$ $\frac{1}{625} = \frac{1}{5^4} = 0,0016$

$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 0,03125$ $\qquad$ $\frac{1}{3125} = \frac{1}{5^5} = 0,00032$

$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 0,015625$ $\qquad$ $\frac{1}{15625} = \frac{1}{5^6} = 0,000064$

$\frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} = 0,0078125$ $\qquad$ $\frac{1}{78125} = \frac{1}{5^7} = 0,0000128$

atque similiter alia.

§. 291.

§. 291. *Coroll.* 1.

Fractio igitur $\frac{1}{2^m} = 0, 0 \ldots 5^m$ constat ex *m* notis decimalibus, quarum posteriores designant Potestatem 5^m; priores autem sunt cifrae. Quare harum cifrarum numerus est $m-n$, si Potestas 5^m indicatur *n* notis, sed $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ non habent has cifras.

Similiter Fractio $\frac{1}{5^m} = 0, 0 \ldots 2^m$ constat ex *m* notis decimalibus, quarum posteriores efficiunt Potestatem 2^m; priores autem sunt cifrae. Quare harum cifrarum numerus est $m-n$, si Potestas 2^m indicatur *n* notis, sed Fractio $\frac{1}{5}$ has cifras decimales non habet.

Tabulae p. 81 et p. 83. monstrant posteriores decimales usque ad 30 Potestatem, idest, ubi $m = 30$.

§. 292. *Coroll.* 2.

$\frac{A}{2^m}$ et $\frac{B}{5^m}$ habent etiam *m* notas decimales, qualescunque fuerint Numeratores *A* et *B*; dummodo *A* et 2^m atque *B* et 5^m sint *numeri inter se primi*, id est, tales sint, ut *A* non contineat Factorem 2, neque *B* Factorem 5 (§. 177.). Hoc ex natura rei patet, si $A < 2^m$ atque $B < 5^m$.

Si $A > 2^m$ et $B > 5^m$, oritur Fractio mixta ex numero integro et fracto decimali *m* notarum.

Sit

Sit enim $\frac{A}{2^m} = s + \frac{r}{2^m}$, ubi s est integer, atque r, qui est residuus ex Divisione, minor est, quam 2^m. Ergo $\frac{r}{2^m}$ constat ex m notis decimalibus. Idem dicendum est de $\frac{B}{5^m}$.

Exempla rem illustrabunt:

$\frac{3}{4}=0,75$		$\frac{2}{5}=0,4$	
$\frac{3}{8}=0,375$	$\frac{7}{16}=0,4375$	$\frac{3}{5}=0,6$	$\frac{6}{25}=0,24$
$\frac{5}{8}=0,625$	$\frac{9}{16}=0,5625$	$\frac{4}{5}=0,8$	$\frac{7}{125}=0,056$
$\frac{7}{8}=0,875$	$\frac{11}{16}=0,6875$	$\frac{2}{25}=0,08$	$\frac{9}{125}=0,072$
$\frac{3}{16}=0,1875$	$\frac{13}{16}=0,8125$	$\frac{3}{25}=0,12$	$\frac{11}{125}=0,088$
$\frac{5}{16}=0,3125$	$\frac{15}{16}=0,9375$	$\frac{4}{25}=0,16$	$\frac{13}{125}=0,104$

atque si $A > 2^m$ et $B > 5^m$.

$\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8} = 1,375$ $\quad \frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1,4$ $\quad \frac{759}{125} = 6 + \frac{9}{125} = 6,072.$

$\frac{53}{16} = 3 + \frac{5}{16} = 3,3125$ $\quad \frac{126}{25} = 5 + \frac{1}{25} = 5,04$

In Fractionibus formae $\frac{A}{2^m 5^n}$, tria esse possunt:

1. Sit $m = n$. Ergo $\frac{A}{2^m 5^n} = \frac{A}{10^m} = A(0,00\ldots1)$ ubi in secundo Factore sunt $m-1$ cifrae post comma.

2.

2. Sit $m > n$, ita ut $m = n + p$. Ergo $\frac{A}{2^m 5^n}$
$= \frac{A}{2^n 5^n . 2^p} = \frac{A}{10^n 2^p} = \frac{A(0,00 \ldots 1)}{2^p}$, ubi sunt $n - 1$ cifrae post comma.

3. Sit $n > m$, ita ut $n = m + p$. Ergo $\frac{A}{2^m 5^n}$
$= \frac{A}{2^m 5^m 5^p} = \frac{A}{10^m . 5^p} = \frac{A(0,00 \ldots 1)}{5^p}$, ubi sunt $m - 1$ cifrae post comma.

Exempla sunt hujusmodi:

$\frac{1}{2^4 5^4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$; $\frac{1}{2^3 5^4} = \frac{1}{10^3 . 5} = 0,0002$;
$\frac{1}{2^5 5^2} = \frac{1}{10^2 . 2^3} = 0,00125$; $\frac{9}{1600} = 0,005625$;
$\frac{3}{250000} = 0,000012$, et ita alia.

§. 293.

De convertendis Fractionibus vulgaribus formae $\frac{A}{B}$, in Fractiones decimales; ubi B aut est numerus primus diversus a 2 et 5, aut continet Divisorem numerum primum, diversum ab his numeris.

Si Denominator est alius numerus primus, quam 2 et 5, vel continet Divisorem, qui sit numerus primus ab his numeris diversus, Fractio decimalis, ex tali Fractione orta, constat ex notis decimalibus numero infinitis; quoniam nulla Potestas numeri 10 per alium numerum dividi potest, nisi per 2^m et 5^m.

Ho-

Harum autem Fractionum decimalium id proprium est, ut constent aut ex una nota, continuo recurrente, aut ex pluribus, quarum Totum continuo redit. Id Totum dicunt *Periodum Fracti*, quae igitur aut unius notae, aut plurium notarum esse potest. Quare hae Fractiones constant ex Periodis aequalibus; cujus causa in promtu est. Nam si pergit Divisio, idem Residuum, quod antea fuerat, citius vel tardius recurrit; quod igitur eandem referre debet Periodum.

§. 294.

De Fractionibus decimalibus, ortis ex Fractionibus vulgaribus formae $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\alpha^m}$; ubi α est numerus primus diversus a numeris 2 et 5.

Quod ad Periodos, inprimis contemplandae sunt illae Fractiones decimales, quae sunt formae $\frac{1}{\alpha}$, atque $\frac{1}{\alpha^m}$; ubi α est numerus primus diversus a numeris 2 et 5. Reliquarum enim Periodi per harum Periodos definiendae sunt.

Id jam statim apparet, Periodum Fractionis $\frac{1}{\alpha}$ non posse esse plurium, quam $\alpha - 1$ notarum. Residua enim debent esse minora, quam α; quare Fractio $\frac{1}{\alpha}$, ubi plurimum, habet solummodo $\alpha - 1$

Residua. Quapropter, si jam ex Divisione prodierunt haec $\alpha - 1$ Residua, necesse est, aliquod eorum redire in sequenti Divisione partiali.

Praecipuae autém Periodi hujus generis hae sunt:

Periodos

1 notae habet $\frac{1}{3} = 0,(3)$.

2 notarum . . $\frac{1}{11} = 0,(09)$.

3 . . . $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 0,(037)$, et $\frac{1}{37} = 0,(027)$.

4 . . . $\frac{1}{101} = 0,(0099)$.

5 . . . $\frac{1}{41} = 0,(024\;39)$, et $\frac{1}{271} = 0,(003\;69)$.

6 . . . $\frac{1}{7} = 0,(142\;857)$, et $\frac{1}{13} = 0,(076\;923)$.

7 . . . $\frac{1}{239} = 0,(004\;1841)$, et $\frac{1}{4649} = 0,(000\;2151)$.

8 . . . $\frac{1}{73} = 0,(013\;698\;63)$, et $\frac{1}{137} = 0,(007\;299\;27)$.

9 . . $\frac{1}{333667} = 0,(000\;002\;997)$, et $\frac{1}{81} = 0,(012\;345\;679)$

10 . . . $\frac{1}{9091} = 0,(000\;109\;9989)$.

11 . . . $\frac{1}{111\;111\;111\;11} = 0,(000\;000\;000\;09)$.

12 . . . $\frac{1}{9901} = 0,(000\;10c\;999\;899)$.

Pe

Periodos

13 notar. habet $\frac{1}{79}=0,(012\ 658\ 227\ 848\ 1)$.

$\frac{1}{53}=0,(018\ 867\ 924\ 528\ 3)$.

$\frac{1}{265371653}=0,(000\ 000\ 000\ 376\ 83)$.

14 . . . . $\frac{1}{909091}=0,(000\ 001\ 099\ 999\ 89)$.

15 . . . $\frac{1}{31}=0,(032\ 258\ 064\ 516\ 129)$.

$\frac{1}{2906161}=0,(000\ 000\ 344\ 096\ 559)$.

16 . . . . $\frac{1}{17}=0,(058\ 823\ 529\ 411\ 764\ 7)$.

$\frac{1}{5882353}=0,(000\ 000\ 169\ 999\ 998\ 3)$.

18 . . . $\frac{1}{19}=0,(052\ 631\ 578\ 947\ 368\ 421)$.

$\frac{1}{52579}=0,(000\ 019\ 018\ 999\ 980\ 981)$.

20 . . . $\frac{1}{99009901}=0,(000\ 000\ 010\ 099\ 999\ 998\ 99)$.

21 . . . $\frac{1}{43}=0,(023\ 255\ 813\ 953\ 488\ 372\ 093)$.

22 . . . $\frac{1}{23}=0,(043\ 478\ 260\ 869\ 565\ 217\ 391\ 3)$.

$\frac{1}{11^2}=\frac{1}{121}=0,008\ 264\ 462\ 809\ 917\ 355\ 371\ 9$.

24 . . . . $\frac{1}{99990001}=0,(000\ 000\ 010\ 000\ 999\ 999\ 989\ 999)$.

28 . . . $\frac{1}{29}=0,(034\ 482\ 758\ 620\ 689\ 655\ 172\ 413\ 793\ 1)$.

. . . $\frac{1}{281}=0,(003\ 558\ 718\ 861\ 209\ 964\ 412\ 811\ 3879)$.

Pe-

Periodi Fractionum, quarum Denominatores sunt numeri primi, plures habent notas, quas hoc alii loco describere non videtur esse necessarium. Velut, si α est Denominator Fractionis, atque numerus p declarat, ex quot notis constent Periodi:

Si α est = 47,	p est = 46.	Si α est = 131,	p est = 130
49 . .	42	139 . . .	46
59 . .	58	149 . . .	148
61 . .	60	151 . . .	75
67 . .	33	157 . . .	78
71 . .	35	163 . . .	81
83 . .	41	167 . . .	166
89 . .	44	173 . . .	43
97 . .	96	179 . . .	58
103 . .	34	181 . . .	180
107 . .	53	191 . . .	95
109 . .	108	193 . . .	192
113 . .	112	197 . . .	98
127 . .	42	199 . . .	99

Numerus notarum periodicarum Fractionum, quarum Denominatores sunt Producta ex numeris primis, facile ex his cognitis reperitur. Quod quomodo fiat, docent theoremata, quae sequuntur; quibus etiam natura harum Periodorum et ratio magis illustrabitur.

§. 295. *Theorema.*

Fractio formae $\frac{1}{10^p - 1}$, *ubi p est numerus integer positivus, convertitur in Fractionem decimalem periodicam, cujus Periodus continet p notas.*

Demonstratio.

Fractionem decimalem, in quam convertitur $\frac{1}{10^p - 1}$, esse periodicam ex eo patet, quod $10^p - 1$ major est,

est, quam 2 et 5; atque nulli horum numerorum Potestati aequalis esse potest. Omnis enim Potestas numeri 2 *par* est numerus, atque omnis Potestas numeri 5 desinit in 5. Sed $10^p - 1$ desinit in 9, atque est numerus *impar*. Quare haec Fractio est periodica (§. 293.)

Hanc autem Fractionem decimalem habere Periodos p notarum, sequitur ex iis, quae §. 215. dicta sunt de Progressione geometrica infinita. Nam si s est Summa terminorum, q Exponens Progressionis atque a primus terminus, erit $s = \frac{a}{1-q}$. Ponatur $a = q = 10^{-p}$, ergo $s = \frac{a}{1-a} = \frac{10^{-p}}{1-10^{-p}}$ $= \frac{1}{10^p - 1}$ (§. 133. 3 et §. 142). Cum autem Progressionis termini sint 10^{-p}; 10^{-2p}; 10^{-3p} ... erit $s = \frac{1}{10^p - 1}$ $= 10^{-p} + 10^{-2p} + 10^{-3p} \ldots = \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} \ldots$ ad infinitum; ubi primum membrum aequationis est *Fractio vulgaris*, secundum autem membrum *Fractio decimalis periodica, in quam mutatur.*

Haec aequatio, quae etiam continuata Divisione reperitur, id ipsum indicat, quod enunciatum est in Theoremate. Nam si p est 1, 2, 3, 4, 5 ... necesse est, Periodos totidem habere notas, ut:

Sit $p = 1$ ergo $\frac{1}{10-1} = \frac{1}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} \ldots = 0,1111\ldots$ $= 0,(1)$.

$p = 2$ . . $\frac{1}{10^2-1} = \frac{1}{99} = \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000}$ $= 0,01\ 01\ 01 \ldots = 0,(01)$.

Sit

Sit $p=3$ . . $\frac{1}{10^3-1}=\frac{1}{999}=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000000}+\frac{1}{1000000000}$ . .
$=0{,}001\ 001 \ldots =0{,}(001)$

$p=4$ . . $\frac{1}{10^4-1}=\frac{1}{9999}=\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{10^{12}}$. $=0{,}0001\ 000$
$=0{,}(000$

$p=4$ . . $\frac{1}{10^5-1}=\frac{1}{99999}=\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^{10}}+\frac{1}{10^{15}} \ldots =0{,}(000$

et universe:

$$\frac{1}{10^p-1}=99\ldots9=\frac{1}{10^p}+\frac{1}{10^{2p}}+\frac{1}{10^{3p}}\ldots=0{,}(00000\ldots$$

ubi sunt p notae 9, atque quaelibet Periodus constat $p-1$ cifris, adjecta ad finem unitate.

§. 296. *Coroll.* 1.

Ut $\frac{A}{2^m}$; $\frac{B}{5^m}$; $\frac{1}{2^m}$; $\frac{1}{5^m}$ eundem habent numerum notarum decimalium (m notas) (§. 292.), ita etiam $\frac{A}{10^p-1}$ atque $\frac{1}{10^p-1}$ eundem habent numerum notarum Periodicarum, id est, p notas. Universe $\frac{A}{\alpha}$ totidem habet notas Periodicas, quot habet $\frac{1}{\alpha}$. Sed haec ita vera sunt, ut Fracti ad minimos terminos sint reducti (§. 180.) velut:

$\frac{1}{3}=0,\ (3)$; ergo $\frac{2}{3}=0,\ (6)$; $\frac{7}{3}=2,\ (3)$.

$\frac{1}{11}=0,\ (09)$; ergo $\frac{2}{11}=0,\ (18)$; $\frac{10}{11}=0,\ (90)$; $\frac{25}{11}=2,\ (27)$.

$\frac{1}{37}=0,(027)$; ergo $\frac{2}{37}=0,(054)$; $\frac{36}{37}=0,(972)$; $\frac{221}{37}=5,(972)$

$\frac{1}{101}=0,(0099)$; ergo $\frac{100}{101}=0,(9900)$; $\frac{187}{101}=1,(8514)$.
$\frac{1}{41}=0,(02439)$; ergo $\frac{7}{41}=0,(17073)$; $\frac{81}{41}=1,(97560)$.

§. 297. *Coroll.* 2.

Si $\frac{10^p-1}{m}$ est numerus integer, Fractus formae $\frac{1}{(10^p-1):m}$ habet etiam Periodos p notarum. Etenim $\frac{1}{(10^p-1):m}=\frac{m}{10^p-1}$. Sed posterior Fractus habet p notas periodicas (§. 295 et §. 296.), ergo etiam prior.

§. 298. *Coroll.* 3.

Omnes Fracti, ad minimos terminos reducti, formae $\frac{A}{10^p-1}$, quorum Denominatores sunt α, β, γ, δ ... vel Producta ex iis $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, $\alpha b\gamma$, $\alpha\beta\delta$ ... habent Periodos p notarum, quae Periodi sunt vel simplices, vel compositae ex pluribus Factoribus.

Ut igitur cognoscatur, quot notas Periodicas habeat Fractus $\frac{A}{10^p-1}$, quaerendi sunt Divisores numeri 10^p-1, cui inservit hoc specimen.

Sit $p=1$ ergo $10^p-1=9=3.3$ ergo $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{3}$ unam habent notam Periodicam.

$p=2$ . . . $=99=9.11$ ergo $\frac{1}{99}$; $\frac{1}{33}$; $\frac{1}{11}$ duas habent notas periodicas.

Sit

Sit $p=3$ . . . $=999=37.27$ ergo $\frac{1}{37}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{333}$; $\frac{1}{999}$ tr
habent notas perio

Quoniam 3 et 9 sunt Factores numerorum 99 et 999, eorum Periodi etiam habent 2 et 3 notas. Tum autem intelligendae sunt *Periodi compositae ex binis, et ternis Fractorum* $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{1}{9}$ *Periodis*, quoniam ipsorum Periodi simplices *unius* sunt notae. Similiter de aliis.

Cum igitur omnis Divisor numeri $10^p-1=99\ldots$ sit Denominator Fracti, cujus numerus notarum Periodi, sive simplicis sive compositae, est p, sufficit notare Divisores, qui sint numeri primi: ex quorum Multiplicatione reliqui Denominatores reperiuntur. Sit igitur:

$p=1$; ergo $10^p-1=9=3.3$.
$p=2$ . . . $=99=3^2.11$.
$p=3$ . . . $=999=3^3.37$.
$p=4$ . . . $=9999=3^2.11.101$.
$p=5$ . . . $=9..9=3^2.41.271$.
$p=6$ . . . $=9..9=3^3.7.11.13.37$.
$p=7$ . . . $=9..9=3^2.239.4649$.
$p=8$ . . . $=9..9=3^2.11.73.101.137$.
$p=9$ . . . $=9..9=3^4.37.333667$.
$p=10$ . . . $=9..9=3^2.11.41.271.9091$.
$p=11$ . . . $=9..9=3^2.111\,111\,111\,11$.
$p=12$ . . . $=9..9=3^3.7.11.13.37.101.9901$.
$p=13$ . . . $=9..9=3^2.53.79.265371653$.
$p=14$ . . . $=9..9=3^2.11.239.4649.909091$.
$p=15$ . . . $=9..9=3^3.31.37.41.271.2906161$.

$p=1$

$p=16$; ergo $10^p-1=9 \,..\, 9=3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 5882353$.
$p=18$ . . . $=9 \,..\, 9=3^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 52579 \cdot 333667$.
$p=20$ . . . $=9 \,..\, 9=3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 101 \cdot 271 \cdot 9091 \cdot 9900990 1$.
$p=21$ . . . $=9 \,..\, 9=3^3 \cdot 37 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot 9009\,0099\,0991$.
$p=22$ . . . $=9 \,..\, 9=3^2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 395\,256\,917 \cdot 111\,111\,111\,11$.
$p=24$ . . . $=9 \,..\, 9=3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 9901 \cdot 9999\,0001$.
$p=25$ . . . $=9 \,..\, 9=3^2 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 100001\,00001\,00001\,00001$.
$p=26$ . . . $=9 \,..\, 9=3^2 \cdot 11 \cdot 53 \cdot 79 \cdot 265\,371\,653 \cdot 9090\,90\,90901$.
$p=27$ . . . $=9 \,..\, 9=3^5 \cdot 37 \cdot 333\,667 \cdot 333\,333\,333\,666\,666\,667$.
$p=28$ . . . $=9 \,..\, 9=3^2 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 101 \cdot 239 \cdot 281 \cdot 4649 \cdot 909\,091 \cdot 121\,499\,449$.

et ita deinceps. Quod convenit cum Periodis notatis §. 294.

§. 299. *Coroll.* 4.

Quoniam, ut dictum est, plures Periodi in unam conjungi possunt, ut v. c. $\frac{1}{11}=0,(09) = 0,(0909) = 0,(090909) = 0,(09090909) \ldots$, sequitur, Fractum $\frac{1}{d}$, qui habet Periodos simplices p notarum, habere Periodos compositas $2p$, $3p \ldots mp$ notarum. Cujus specimen hoc est:

Numerus notarum Periodicarum Fractionum.

$\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{27}$ et $\frac{1}{37}$	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{271}$ et $\frac{1}{41}$	$\frac{1}{13}$ et $\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4649}$ et $\frac{1}{239}$	$\frac{1}{137}$ et $\frac{1}{73}$	$\frac{1}{81}$ et $\frac{1}{333667}$	$\frac{1}{9091}$	$\frac{1}{111\,111\,111\,11}$	$\frac{1}{9901}$	$\frac{1}{53}.\frac{1}{79}$ et $\frac{1}{265371653}$	$\frac{1}{909091}$
1													
2	2												
3		3											
4	4		4										
5				5									
6	6	6			6								
7						7							
8	8		8				8						
9		9						9					
10	10			10					10				
11										11			
12	12	12	12		12						12		
13												13	
14	14					14							14
15		15		15									
16	16		16				16						
17													
18	18	18			18			18					
19													
20	20		20	20					20				
21		21				21							
22	22									22			
23													
24	24	24	24		24		24				24		
25				25									
26	26											26	
27		27						27					
28	28		28			28							28

Ex ejusmodi Tabula, si ulterius progreditur, perspiciuntur continuo Factores primi, per quos numerus, designatus per *m* notas 9, dividi potest. Ita numerus, qui designatur 24 notis 9, dividi potest per $3^2 . 11 . 37 . 101 . 13 . 7 . 137 . 73 . 9901$. Reliqui Divisores reperiri possunt Multiplicatione horum numerorum, atque Divisione numeri 9...9 per hos numeros, et per Producta ipsorum.

§. 300. *Coroll.* 5.

Si Fractus periodicus $\frac{1}{a}$ cujus Periodus est $a-1$ notarum (ex quo genere sunt $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{29}, \frac{1}{47}, \frac{1}{59}, \frac{1}{61}, \frac{1}{97}, \frac{1}{109}, \frac{1}{113}, \frac{1}{131}, \frac{1}{149}, \frac{1}{167}, \frac{1}{181}, \frac{1}{193}$ ...) per *A* multiplicatur, hac Multiplicatione non modo non mutatur numerus notarum Periodicarum, sed ne notae quidem, ita ut mutatio ad solum ordinem referatur. Cujus rei ratio apparet, si notantur Residua Divisionis, ut:

$\frac{1}{7}=0,(1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7)$; $\frac{2}{7}=0,(2\ 8\ 5\ 7\ 1\ 4)$; $\frac{3}{7}=0,(4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1)$.

Residua 3,2,6,4,5,1 ; ... 6,4,5,1,3,2 ; ... 2,6,4,5,1,3.

$\frac{4}{7}=0,(5\ 7\ 1\ 4\ 2\ 8)$; $\frac{5}{7}=0,(7\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5)$; $\frac{6}{7}=0,(8\ 5\ 7\ 1\ 4\ 2)$.

Residua 5,1,3,2,6,4 ; ... 1,3,2,6,4,5 ; ... 4,5,1,3,2,6.

Quodlibet Residuum in his Fractionibus minus est quam 7; quare est ex numeris 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6. Simulac autem ad aliquam notam in singulis Fractionibus

bus $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ idem est Residuum atque ad aliquam notam Fractionis $\frac{1}{7}$, sequentes notae in utraque Fractione eaedem sint necesse est. Ita cum singula *prima* Residua Fractionum $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ sint 6, 2, 5, 1, 4, atque haec sint Residua Fractionis $\frac{1}{7}$ ad *tertiam*, *secundam*, *quintam*, *sextam* et *quartam* notam, Periodus ipsarum incipit ad hanc ipsam tertiam, secundam .... quartam notam periodicam Fractionis $\frac{1}{7}$.

§. 301. *Coroll.* 6.

Ope Fractionum periodicarum facile reperitur Quotus $\frac{A}{10^p-1} = A\left(\frac{1}{10^p}+\frac{1}{10^{2p}}+\frac{1}{10^{3p}} \ldots\right)$. (§. 295).

Sit $A = 7328476$, atque ponatur

$p=2$; ergo $\frac{A}{99} = A\,0,(01) =$

$$\begin{array}{r} 73284,76 \\ 732,8476 \\ 7,328476 \\ 73284 \\ 732 \\ \hline 74025,(01). \end{array}$$

$p=3$; ergo $\frac{A}{999} = A.0,(001) =$

$$\begin{array}{r} 7328,476 \\ 7,3284 \\ 73 \\ \hline 7335,(811). \end{array}$$

$p=4$; ergo $\frac{A}{9999} = A.0,(0001) =$

$$\begin{array}{r} 732,8476 \\ 73284 \\ \hline 732,(9208). \end{array}$$

S.

$p=5$; ergo $\frac{A}{9..9}=A.0,(00001)=$ 73,28476
732
73,(28549).

$p=6$; ergo $\frac{A}{9..9}=A.0,(000001)=$ 7,328476
7
7,(328483).

$p=7$; ergo $\frac{A}{9..9}=A.0,(0000001)=$ 0,(7328476).

$p=8$ . . . . 0,(07328476).

$p=9$ . . . . 0,(007328476).

et ita deinceps.

§. 302. *Theorema.*

Fractio formae $\frac{1}{10^p+1}$ *habet Periodos* $2p$ *notarum.*

Demonstratio.

$\frac{1}{10^p+1}\cdot\frac{1}{10^p-1}=\frac{1}{10^{2p}-1}$. Ergo $\frac{1}{10^p+1}=\frac{10^p-1}{10^{2p}-1}$ atque igitur Fractio $\frac{1}{10^p+1}$ habet Periodos $2p$ notarum (§. 295.).

§. 303. *Coroll.* 1.

Ex his, eodem modo quo §. 298. haec colligimus:

Sit $p=1$; ergo $10^p+1=11$.

$p=2$ . . . $=101$.

$p=3$ . . . $=1001 = 7.11.13$.

$p=4$ . . . $=10001 = 73.137$.

$p=5$ . . . $=100001 = 11.9091$.

Sit

Sit $p = 6$ . . . $= 1000001 = 101 . 9901$.
$p = 7$ . . . $= 10 \ldots 1 = 11 . 909\,091$.
$p = 8$ . . . $= 10 \ldots 1 = 17 . 588\,2353$.
$p = 9$ . . . $= 10 \ldots 1 = 7 . 11 . 13 . 19 . 52579$.
$p = 10$ . . . $= 10 \ldots 1 = 101 . 990\,099\,01$.
$p = 11$ . . . $= 10 \ldots 1 = 11 . 23 . 395\,256\,917$.
$p = 12$ . . . $= 10 \ldots 1 = 73 . 137 . 999\,900\,01$.
$p = 14$ . . . $= 10 \ldots 1 = 29 . 101 . 281 . 121\,499\,4$.

Ergo Fractio $\frac{1}{11}$ *duas* habet notas Periodicas, $\frac{1}{101}$ *quatuor*; $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{13}$ *sex*; $\frac{1}{73}$ et $\frac{1}{137}$ habent *octo*, et ita deinceps; quod convenit cum Periodis notatis §. 294 et 298.

§. 304. *Coroll.* 2.

Ergo Fractio formae $\frac{A}{10^p + 1}$, ad minimos terminos reducta, habet etiam Periodos $2p$ notarum (§. 296.)

§. 305. *Coroll.* 3.

Si Denominatores a et b Fractionum $\frac{A}{a}$ et $\frac{B}{b}$ tales sunt, ut a sit Divisor numeri $10^p - 1$, et b Divisor numeri $10^p + 1$, $\frac{A}{a}$ habet Periodum p notarum, $\frac{B}{b}$ Periodum $2p$ notarum. Ergo $\frac{B}{b}$ habet duplo plus notarum periodicarum quam $\frac{A}{a}$; velut, cum sit $\frac{10^6+1}{9901} = 101$ atque $\frac{10^6-1}{7} = 142857$. $\frac{A}{7}$ habet 6 notas et $\frac{B}{9901}$ habet 12 notas. Similiter $\frac{A}{142857}$ habet 6 notas,

tas, atque $\frac{B}{101}$ habet 12 notas, ubi tamen sunt *Periodi compositae ex tribus simplicibus.*

§. 306. *Theorema.*

Si Periodus Fractionis $\frac{1}{P}$ fuerit p notarum; Fractionis autem $\frac{1}{P'}$ fuerit p' notarum, erunt p' Periodi Fractionis $\frac{1}{P}$ per P', atque p Periodi Fractionis $\frac{1}{P'}$ per P divisibiles. Si p et p' inter se non sunt primi, sed maximum communem Factorem habent e, ita ut sit $p = e\pi$ et $p' = e\pi'$, unde $\frac{p}{p'} = \frac{\pi}{\pi'}$; in locum numerorum p et p' substitui possunt π et π'.

Ponimus in hisce, *P* et *P'* esse duos numeros primos quoslibet, praeter 2 et 5.

Demonstratio.

Quo facilius res intelligatur, primum exemplis utamur expositis §. 294.

Sit $P = 37$ atque $P' = 11$. Cum sit $\frac{1}{37} = 0,(027)$ atque $\frac{1}{11} = 0,(09)$, erit $p = 3$ et $p' = 2$. Ergo si enunciata in Theoremate vera sunt, duae Periodi Fractionis $\frac{1}{37}$ per 11, atque tres Periodi Fractio-

tio-

tionis $\frac{1}{11}$ per 37 sunt divisibiles. Quod ita esse hoc modo perspicitur.

Ex natura Fractionis decimalis est $\frac{1}{37} = 0,027027 + \frac{1}{10^6 . 37}$; $\frac{1}{11} = 0,090909 + \frac{1}{10^6 . 11}$. Si prior aequatio per $10^6 . 37$, posterior per $10^6 . 11$ multiplicatur, nascuntur aequationes $10^6 = 10^6 . 37 . (0,027027) + 1$; $10^6 = 10^6 . 11 . (0,090909) + 1$, ergo $10^6 - 1 = 10^6 . 37 . (0,027027) = 10^6 . 11 . (0,090909)$; unde $27027 . 37 = 90909 . 11$ (§. 82 et 134.), atque $90909 = \frac{27027 . 37}{11}$. Quoniam prius membrum aequationis est numerus integer, posterius etiam est numerus integer. Cum autem 37 et 11, sint numeri primi, nullum habent Divisorem communem (§. 177.); quare 27027 divisibilis esse debet per 11, atque revera ex Divisione prodit 2457 (1). Eodem modo demonstratur 90909 esse divisibilem per 37, quoniam $27027 = \frac{90909 . 11}{37}$.

Sit $P = \frac{1}{13}$ atque $P' = \frac{1}{7}$, ergo $p = p' =$ unde

$\pi =$

(1) *Animadv.* Enunciatio: si $\frac{a . b}{c}$ est Quotus integer, atque si b et c sunt numeri inter se primi, a divisibilis est per c, in loco de Congruentia numerorum demonstrabitur. Cum autem ejus veritas per se liqueat, hanc nobis damus veniam, ut ea hoc loco tanquam demonstrata utamur.

$\pi = \pi' = 1$. Quare una Periodus Fractionis $\frac{1}{13}$ per 7, atque una periodus Fractionis $\frac{1}{7}$ per 13 divisibilis est. Cujus rei veritas eodem modo demonstrari potest.

Etenim $\frac{1}{13} = 0,076923 + \frac{1}{10^6 . 13}$; atque $\frac{1}{7} = 0,142857 + \frac{1}{10^6 . 7}$; unde $10^6 - 1 = (0,076923)\, 10^6 . 13 = (0,142857)\, 10^6 . 7$: id est, $(76923)\, 13 = (142857)\, 7$. Ergo, similiter atque antea, colligitur, 142857 esse divisibilem per 13, atque 76923 per 7.

Sit $P = 13$ atque $P' = 101$, ergo $p = 6$ et $p' = 4$; $\frac{p}{p'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, unde $\pi = 3$ et $\pi' = 2$. Ergo tres Periodi Fractionis $\frac{1}{101}$ divisibiles sunt per 13, atque duae Periodi Fractionis $\frac{1}{13}$ per 101. Quod aequali modo cogitur.

Etenim $\frac{1}{101} = 0,0099\,0099\,0099 + \frac{1}{10^{12} . 101}$; $\frac{1}{13} = 0,076923\,076923 + \frac{1}{10^{12} . 13}$. Ergo $(990099\,0099)\, 101 = (76923076\,923)\, 13$, atque 9900990099 divisibilis est per 13; atque 769 230 769 23 per 101.

His praemissis, facile intelligitur, qualis debeat esse demonstratio universalis.

 Quo-

Quoniam $\frac{p}{p'} = \frac{\pi}{\pi'}$, ubi π et π' sunt inter se primi, erit $p\pi' = p'\pi$. Sint a, b, c, d ... Fractionis $\frac{1}{p}$, atque a', b', c', d' ... Fractionis $\frac{1}{p'}$ notae decimales. Sit g postrema nota Periodi Fractionis prioris, atque g' posterioris. Ex natura Fractionum decimalium est:

$$\frac{1}{p} = a \cdot 10^{-1} + b \cdot 10^{-2} .. + g \cdot 10^{-p} .. + g \cdot 10^{-2p} .. + g \cdot 10^{-\pi' p} + \frac{1}{P \cdot 10^{\pi' p}}.$$

$$\frac{1}{p'} = a' \cdot 10^{-1} + b' \cdot 10^{-2} .. + g' \cdot 10^{-p'} .. + g' \cdot 10^{-2p'} .. + g' \cdot 10^{-\pi p'} + \frac{1}{P' \cdot 10^{\pi p'}}.$$

Ponatur $a \cdot 10^{-1} + b \cdot 10^{-2} \ldots + g \cdot 10^{-p} \ldots + g \cdot 10^{-\pi' p} = \frac{s}{10^{\pi' p}}$.

Atque $a' \cdot 10^{-1} + b' \cdot 10^{-2} \ldots + g' \cdot 10^{-p'} \ldots + g' \cdot 10^{-\pi p'} = \frac{s'}{10^{\pi p'}}$,

ubi s indicat Summam π' Periodorum Fractionis $\frac{1}{p}$, atque s' Summam π Periodorum Fractionis $\frac{1}{p'}$, si pro numeris integris habentur.

His positis, erit $\frac{1}{p} = \frac{s}{10^{\pi' p}} + \frac{1}{P \cdot 10^{\pi' p}}$; $\frac{1}{p'} = \frac{s'}{10^{\pi p'}} + \frac{1}{P' \cdot 10^{\pi p'}}$.

Multiplicetur prior aequatio per $P \cdot 10^{\pi' p}$; posterior per $P' \cdot 10^{\pi p'}$. Tum prodit $10^{\pi' p} = P \cdot s + 1$, atque $10^{\pi p'} = P' \cdot s' + 1$; et cum sit $\pi p' = \pi' p$, erit $P \cdot s = P' s'$, ergo $s = \frac{P' s'}{P}$, atque $s' = \frac{P \cdot s}{P'}$.

Cum igitur s' sit *integer*, etiam $\frac{P' s'}{P}$ *est integer numerus*. Sed P' et P, cum sint nu-

numeri primi, nullum habent Divisorem communem; quare s', id est, π Periodi Fractionis P', sunt divisibiles per P. Eodem modo colligitur s, id est, π' Periodos Fractionis $\frac{1}{p}$, esse divisibiles per P'.

§. 307. *Coroll.* 1.

Si p et p' sunt inter se primi, *tot Periodi alterutrius Fractionis sunt divisibiles per Denominatorem alterius Fractionis, quot notas periodicas habet haec secunda Fractio*; veluti 2 Periodi Fractionis $\frac{1}{37}$ divisibiles sunt per 11, atque 3 Periodi Fractionis $\frac{1}{11}$ per 37.

§. 308. *Coroll.* 2.

Si $p = p'$, erit $\pi = \pi' = 1$. Ergo *quaelibet Periodus simplex alterutrius Fractionis divisibilis est per Denominatorem alterius Fractionis, si utriusque Fractionis Periodi aequalem habent numerum notarum*: quales sunt Fractionum $\frac{1}{13}$ et $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{41}$ et $\frac{1}{271}$; $\frac{1}{73}$ et $\frac{1}{137}$; $\frac{1}{4649}$ et $\frac{1}{239}$ seqq. (§. 294.).

§. 309.

§. 309. *Coroll.* 3.

Omnis Periodus Fractionis periodicae $\frac{A}{\alpha}$ *divisibilis est per* 3. Fractio enim $\frac{1}{3}$ habet Periodos unius solius notae.

Duae autem Periodi ejusdem Fractionis $\frac{A}{\alpha}$ per 11, *tres* per 27 et 37, *quatuor* per 101, *quinque* per 41 et 271, *sex* per 13 et 7, *septem* per 239 et 4649, *octo* per 73 et 137, seqq. divisibiles sunt; ubi tamen ipse α, quod per se patet, ex hoc numero excludendus est; veluti, si $\alpha = 37$, Periodus Fractionis est (027), atque Quoti $\frac{27}{3} = 9$; $\frac{27027}{11} = 2457$; $\frac{270\,270\,270\,27}{101} = 267594327$ sunt numeri integri.

§. 310. *Coroll.* 4.

$\frac{1}{p} = s.10^{-\pi' p} + s.10^{-2\pi' p} + s.10^{-3\pi' p} + s.10^{-4\pi' p} + \ldots$ (§. 306.).

Quoniam s divisibilis est per P', sit $\frac{s}{P'} = t$, ergo

$\frac{1}{PP'} = t.10^{-\pi' p} + t.10^{-2\pi' p} + t.10^{-3\pi' p} + t.10^{-4\pi' p} + \ldots$

Ergo Fractus $\frac{1}{PP'}$ constat ex Periodis t, quae sunt

$\pi' p$

$\pi' p = \pi p'$ notarum aut pp' notarum, si p et p' sunt inter se primi.

Quare cum Fracti $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{37}$; $\frac{1}{101}$; $\frac{1}{41}$; $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{13}$; $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{19}$
habeant 2; 3; 4; 5; 6; 16; 18 notas periodicas, Fractionis

$\frac{1}{11 \cdot 13} = \frac{1}{143} = 0{,}(006\ 993)$, notae sunt $6 = \frac{2 \cdot 6}{2}$

$\frac{1}{11 \cdot 101} = \frac{1}{1111} = 0{,}0009$. ...... $4 = \frac{2 \cdot 4}{2}$

$\frac{1}{11 \cdot 41} = \frac{1}{451} = 0{,}(002\ 217\ 2949)$. ..... $10 = \frac{2 \cdot 5}{1}$

$\frac{1}{11 \cdot 17} = \frac{1}{187} = 0{,}(005\ 347\ 593\ 5828\ 877)$. .... $16 = \frac{2 \cdot 16}{2}$

$\frac{1}{11 \cdot 19} = \frac{1}{209} = 0{,}(004\ 784\ 688\ 995\ 215\ 311)$. .... $18 = \frac{18 \cdot 2}{2}$

$\frac{1}{7 \cdot 37} = \frac{1}{259} = 0{,}003\ 861$. .... $6 = \frac{3 \cdot 6}{3}$

$\frac{1}{7 \cdot 13} = \frac{1}{91} = 0{,}010\ 989$. .... $6 = \frac{6 \cdot 6}{6}$

$\frac{1}{7 \cdot 101} = \frac{1}{707} = 0{,}(001\ 414\ 427\ 157)$. .... $12 = \frac{4 \cdot 6}{2}$

$\frac{1}{13 \cdot 19} = \frac{1}{247} = 0{,}(004\ 048\ 582\ 995\ 951\ 417)$. .... $18 = \frac{6 \cdot 18}{6}$

§. 311. *Coroll.* 5.

Ergo *non augetur numerus notarum Fractionis* $\frac{A}{\alpha}$, *si Denominator v. c. multiplicatur:*

1. *Per*

1. *Per* 3 *vel* 9, *dummodo* a *ipse non habeat Divisorem* 3.

2. *Per* 11, *dummodo numerus notarum periodicarum, quas* a *habet, sit numerus par*, atque a *ipse non habeat Divisorem* 11.

3. *Per numerum primum, qui eundem habet numerum notarum periodicarum*, ut $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{37}$ atque $\frac{1}{27 \cdot 37}$ habent 3 notas.

§. 312. *Coroll.* 6.

In demonstrando theoremate §. 306, posuimus P et P' esse inaequales. Quare, quae inde conclusa sunt, non referenda sunt ad Fractionem formae $\frac{A}{a^m}$, ubi Denominator est Potestas alicujus numeri primi, veluti Fractiones $\frac{1}{49}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{243}$ habent 42, 3, 18, 27 notas periodicas.

§. 313. *Coroll.* 7.

Si numeri p, p', p'' indicant, quot notas periodicas habeant Fractiones $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{P'}$, $\frac{1}{P''}$, *Fractio* $\frac{1}{PP'P''}$ *habet tot notas periodicas, quot unitates habet numerus minimus, cujus Divisores sunt* p, p', p''. Sit enim e communis Divisor numerorum p et p', ita ut sit $\frac{p}{p'} = \frac{e\pi}{e\pi'} = \frac{\pi}{\pi'}$. Sit $PP' = Q$, ergo $\frac{1}{Q}$ ha-

habet $p\pi'$ notas periodicas. Si d est communis Divisor numerorum $p\pi'$ et p'', ita ut sit $\frac{p\pi'}{p''} = \frac{d\pi'''}{d\pi''} = \frac{\pi'''}{\pi''}$, Fractio $\frac{1}{QP''} = \frac{1}{PP'P''}$ habet $p\pi'\pi''$ notas periodicas §. 306. Hujus numeri Divisores sunt p, p', p'', quoniam $p\pi'\pi'' = \pi p'\pi'' = p''\pi'''$. Ita $\frac{1}{11.101.7} = \frac{1}{7777} = 0,(000\ 128\ 584\ 287)$ habet 12 notas periodicas, quoniam 2, 4, 6 sunt Divisores numeri 12.

§. 314. *Coroll.* 8.

Similiter definitur numerus notarum periodicarum Fractionis, cujus Denominator est Productum ex pluribus, quam 3 numeris primis.

§. 315. *Theorema.*

Si $\frac{1}{\alpha}$ est Fractio periodica, atque Q est prior Quotus ex Divisione 10^m per α; et r est Residuum ex ista Divisione, erit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{Q}{10^m} + \frac{rQ}{10^{2m}} + \frac{r^2Q}{10^{3m}} + \frac{r^3Q}{10^{4m}} \dots + \frac{r^{q-1}Q}{10^{qm}} + \frac{r^q}{10^{qm}\alpha},$$

ubi q indicat, quot sint Quoti.

De-

Demonstratio.

Ut magis perspicuum fiat, quod enunciatum est, sit $\alpha = 17$. Est autem $\frac{1}{17} = 0{,}0588 + \frac{4}{10^4 . 17}$; ergo $Q = 588$, $m = 4$ et $r = 4$. Sit $q = 5$.

Ergo $\frac{1}{17} = \frac{588 + \frac{4'}{17}}{10^4}$, $\frac{4}{17} = \frac{4 . 588 + \frac{4^2}{17}}{10^4}$, $\frac{4^2}{17} = \frac{4^2 . 588 + \frac{4^3}{17}}{10^4}$.

Si ita progredimur, prodit $\frac{1}{17} = \frac{588}{10^4} + \frac{4 . 588}{10^8} + \frac{4^2 . 588}{10^{12}}$ $+ \frac{4^3 . 588}{10^{16}} + \frac{4^4 . 588}{10^{20}} + \frac{4^5}{10^{20} . 17} = \frac{588}{10^4} + \frac{2352}{10^8} + \frac{9408}{10^{12}} + \frac{37632}{10^{16}}$ $+ \frac{150528}{10^{20}} + \frac{1024}{10^{20} . 17} = \frac{588}{10^4} + \frac{2352}{10^8} + \frac{9411}{10^{12}} + \frac{7647}{10^{16}} + \frac{0528}{10^{20}}$ $+ \frac{1024}{10^{20} . 17} = 0{,}0588\ 2352\ 9411\ 7647 + \frac{0528 + \frac{1024}{17}}{10^{20}}$. Sed

$$\frac{0528 + \frac{1024}{17}}{10^{20}} = \frac{17 . 528 + 1024}{10^{20} . 17} = \frac{10000}{10^{20} . 17} = \frac{1}{10^{16} . 17}$$

Quod indicat, eosdem redire numeros, atque igitur Fractionem $\frac{1}{17}$ habere 16 notas periodicas, quae sunt 0,(0588 2352 9411 7647).

Hisce illustratis, qualis sit demonstratio, facile perspicitur. Etenim per Hypothesin est $\frac{1}{\alpha} = \frac{Q}{10^m} + \frac{r}{10^m \alpha}$. Si hanc aequationem deinceps

per

per $\frac{r}{10^m}$; $\frac{r^2}{10^{2m}}$; $\frac{r^3}{10^{3m}}$ ...... multiplicamus, prodit (§. 195. 7. §. 91.) $\frac{r}{10^m\alpha} = \frac{rQ}{10^{2m}} + \frac{r^2}{10^{2m}\alpha}$; $\frac{r^2}{10^{2m}\alpha} = \frac{r^2Q}{10^{3m}} + \frac{r^3}{10^{3m}\alpha}$; $\frac{r^3}{10^{3m}\alpha} = \frac{r^3Q}{10^{4m}} + \frac{r^4}{10^{4m}\alpha}$; et ita deinceps. Ergo $\frac{1}{\alpha} = \frac{Q}{10^m} + \frac{rQ}{10^{2m}} + \frac{r^2Q}{10^{3m}} + \frac{r^3Q}{10^{4m}} \ldots\ldots + \frac{r^{q-1}Q}{10^{qm}} + \frac{r^q}{10^{qm}\alpha}$; ubi q est terminorum numerus.

§. 316. *Coroll.* 1.

Ex iis, quae ad hoc Theorema illustrandum diximus, intelligitur ejus usus in reperiundis notis periodicis alicujus Fractionis. Nam ita multo facilior redditur calculus, si magnus est earum numerus; quoniam, si in Divisione ad Residuum parvum pervenimus, reliquae notae sola Multiplicatione per hoc Residuum reperiuntur. Si est $r < 10$, erit $r^q < 10^q$ (§. 237. II. 4.); ergo $\frac{r^q}{10^{qm}\alpha} < \frac{10^q}{10^{qm}\alpha}$ (§. 237. II. 3.), atque igitur $\frac{r^q}{10^{qm}\alpha} < \frac{1}{10^{qm-q}\alpha}$ (§. 133. 3.). Quapropter, si Fractio $\frac{1}{\alpha}$ habet p notas periodicas, atque $qm-q$ est aut $= p$ aut $> p$, Fractio $\frac{r^q}{10^{qm}\alpha}$ nihil efficit in notis periodicis definiendis, quoniam prima nota se-

quentis Periodi est $\frac{1}{10^{q}.\alpha}$; quae Fractio aut major est quam $\frac{1}{10^{qm-q}\alpha}$, aut ipsi aequalis. Quare tum nulla ratio habenda est ultimi termini $\frac{r^q}{10^{qm}\alpha}$.

Quam facilis sit haec Methodus, hoc exemplum docet:

$\frac{1}{61} = 0{,}016\ 393\ 442\ 622\ 95 + \frac{5}{61}$; ergo $\alpha = 61$, $m = 14$, $r = 5$

Efficiendum igitur est, ut $qm - q = 14q - q = 13q$ major sit quam 60, quoniam $\frac{1}{61}$ habet 60 notas periodicas. Id efficitur si $q = 5$.

$$\text{Ergo } \frac{1}{61} = \frac{Q}{10^{14}} + \frac{5Q}{10^{28}} + \frac{25Q}{10^{42}} + \frac{125Q}{10^{56}} + \frac{625Q}{10^{70}}.$$

$Q =$	016	393	442	622	95	
$5Q =$	081	967.	213	114	75	
$25Q =$	409	836	065	573	75	
$125Q =$	2049	180	327	868	75.	
$625Q =$	10245	9.				

Ergo, si in unam Summam congregantur 5 et 2 = 7, atque 75 et 10 = 85, oritur Periodus Fractionis $\frac{1}{61} = 0{,}(016\ 393\ 442\ 622\ 950\ 819\ 672\ 131\ 147\ 540\ 983\ 606\ 557\ 377\ 049\ 180\ 327\ 868\ 852\ 459)$.

§. 317. *Coroll.* 2.

Ex his etiam perspicitur, *quomodo ope Residuorum periculum facere possimus Divisionis*, *utrum*

utrum fuerit rite peracta, nec ne. Nam si, post *m*tinam notam, Residuum est r, post $2m$ notam erit r^2; post $3m$ notam r^3, et ita deinceps. Veluti in Fractione $\frac{1}{61}$, post 14 notam, Residuum est 5; quare consequentes notae sunt $0{,}081967 \ldots = \frac{5}{61}$; post 28 notam Residuum est 25, unde consequentes notae sunt $0{,}409836 \ldots = \frac{25}{61}$, post 42 notam Residuum est 125 vel potius 3, cum sit $\frac{125}{61} = 2 + \frac{3}{61}$, atque consequentes notae sunt $0{,}049180 \ldots = \frac{3}{61}$.

§. 318. *Animadv.*

Haec regula commode saepe adhibetur in mutandis Fractionibus vulgaribus in decimales, si major notarum decimalium numerus requiritur. Magnus etiam hac in conversione potest esse usus Divisionis contractae (§. 287 seqq.).

Per se patet, si Denominator etiam continet Factorem 2^m vel 5^p vel utrumque, locum Periodi mutari, non vero numerum notarum periodicarum. Ergo, si hi Factores Denominatori insunt, primum fiat Divisio per ipsos; ut $\frac{37}{15} = \frac{7{,}4}{3} = 2{,}4(6)$; $\frac{38}{15} = \frac{7{,}6}{3} = 2{,}5(3)$, $\frac{41}{56} = \frac{5{,}125}{7} = 0{,}732(142857)$.

§. 319.

§. 319. *Problema.*

Mutare Fractionem decimalem in Fractionem vulgarem.

Solutio.

1. Si Fractio est formae $\frac{A}{2^m\,5^m}$, adeoque est finita, non periodica, conversio in hoc solo consistere potest, ut ad minimos terminos reducatur (§. 181). Quare, si neque 2, neque 5 est Divisor numeri A, nulla fit conversio. Sed si alteruter numerus est hujus Numeratoris Divisor, conversio ita institui potest:

$$\frac{A}{10^m} = \frac{A}{2^m\,5^m} = \frac{A}{2^{m-p}\,2^p\,5^{m-p}\,5^p} = \frac{A}{10^{m-p}\,2^p\,5^p},$$
(§. 91. 94.)

Quare $\frac{A}{10^m} = \frac{A:2^p}{10^{m-p}\,5^p} = \frac{A:5^p}{10^{m-p}\,2^p}$.

Veluti $0{,}0625 = \frac{5^4}{10^4} = \frac{1}{2^4}$; $0{,}000064 = \frac{2^6}{10^6} = \frac{1}{5^6}$;

$$0{,}8125 = \frac{13 \cdot 5^4}{10^4} = \frac{13}{2^4} = \frac{13}{16}.$$

2. *Fractio vera decimalis, quae constat ex solis Periodis m notarum, mutatur in Fractionem vulgarem, cujus Numerator est ipsa Periodus, Denominator autem numerus constans ex* m *notis* 9. Ratio ejus patet ex §. 294. Sit enim, (similiter atque p. 350.) $\frac{N}{P} = a \cdot 10^{-1} \ldots + g \cdot 10^{-m} + \frac{N}{P \cdot 10^m}$; ubi $\frac{N}{P}$ est Fractio vulgaris, atque $a \ldots g$ notae sunt Periodi; erit $\frac{N}{P}\left(1 - \frac{1}{10^m}\right) = a \cdot 10^{-1} \ldots + g \cdot 10^{-m}$ et

N

$$\frac{N}{P}(10^m - 1) = a \,.\, 10^{m-1} + b \,.\, 10^{m-2} \ldots + g = s;$$

ubi s est Periodus, habita pro numero integro. Ergo

$$\frac{N}{P} = \frac{s}{10^m - 1} = \frac{s}{999\ldots9}.$$

Velut $0,(001287) = \frac{1287}{999999} = \frac{1}{777}$;

$0,(0033) = \frac{33}{9999} = \frac{1}{303}$; $0,(001414427157) = \frac{1414427157}{999999999999} = \frac{1}{707}$.

3. *Si autem Periodus ante se habet notas, Fractio constat ex duabus Fractionibus, quae in unam Summam conjunguntur*, juxta praecepta §. 184. exposita, ut

1. $0,41\,(6) = \frac{41+\frac{6}{9}}{100} = \frac{41+\frac{2}{3}}{100} = \frac{125}{300} = \frac{5}{12} = \frac{1}{2,4}$ (§. 133 3).

2. $4,1\,(6) = \frac{41+\frac{6}{9}}{10} = \frac{41+\frac{2}{3}}{10} = \frac{125}{30} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$.

3. $0,1\,(6) = \frac{1+\frac{2}{3}}{10} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

4. $0,00(150) = \frac{150}{99900} = \frac{1}{666}$.

5. $0,50(571428) = \frac{50}{100} + \frac{571428}{99999900} = \frac{50}{100} + \frac{4}{700} = \frac{354}{700} = \frac{3,54}{7}$.

Ejusmodi Fractiones mixtae faciliore via mutantur in vulgares, quoniam $9 = 10 - 1$; $99 = 100 - 1$; $999 = 1000 - 1$, velut:

6. $0,492\,(68) = \dfrac{492 + \frac{68}{99}}{1000} = \dfrac{492 + \frac{68}{100-1}}{1000} = \frac{49200 - 492 + 68}{99000}$
$= \frac{48776}{99000}$.

7.

$$7.\ 0{,}0013(113) = \frac{13 + \frac{113}{999}}{10000} = \frac{13 + \frac{113}{1000-1}}{10000} = \frac{13000 - 13 + 113}{10000 \cdot 999}.$$

$$= \frac{131}{99900}.$$

§. 320. *Coroll.* I.

Ex hisce prodit $0,(9) = 1$; $0,0(9) = 0,1$; $0{,}00(9) = 0{,}01$; $9{,}7(9) = 9{,}8$; $3{,}83(9) = 3{,}84$.

§. 321. *De addendis et subtrahendis Fractionibus vulgaribus.*

Ut Fractioni decimali addantur et subtrahantur Fractiones vulgares, commode antea convertuntur in Fractiones decimales. Tum enim Additio et Subtractio facile instituitur (§. 278.). Idem fit universe, si plurium Fractionum diversae Denominationis Summa est computanda, atque paucae notae decimales sufficiunt (§. 184.): velut, si quaerenda est Summa Fractionum $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{4}{11}, \frac{1}{3}, \frac{7}{41}$, calculus ita instituitur:

$$\frac{3}{7} = 0{,}428\,571$$
$$\frac{2}{5} = 0{,}4$$
$$\frac{4}{11} = 0{,}363636$$
$$\frac{1}{3} = 0{,}333\,333$$
$$\frac{7}{41} = 0{,}170\,731$$

Summa est $1{,}69627\ldots$

Ita etiam invenitur Differentia, sive Summa Fractionum, quae diversa habent signa, velut $\frac{3}{7} + \frac{2}{5} + \frac{4}{11} - \frac{1}{3} - \frac{7}{41} = 0{,}688143$, si quatuor notae decimales sufficiunt.

§. 322. *De Logarithmis Fractionum decimalium.*

Si numeri integri et Fractiones decimales easdem habent notas, et eodem ordine compositas, eorum Logarithmi non Mantissa, sed Characteristica sola inter se differunt (§. 233.); ut Logarithmi numerorum 179 ; 17,9 ; 1,79 ; 0,179 ; 0,0179 ; 0,00179, caet. Sunt enim

$$\text{Log. } 17{,}9 = \text{Log. } \frac{179}{10} = -1 + \text{Log. } 179.$$

$$\text{Log. } 1{,}79 = \text{Log. } \frac{179}{100} = -2 + \text{Log. } 179.$$

$$\text{Log. } 0{,}179 = \text{Log. } \frac{179}{1000} = -3 + \text{Log. } 179.$$

$$\text{Log. } 0{,}0179 = \text{Log. } \frac{179}{10000} = -4 + \text{Log. } 179.$$

$$\text{Log. } 0{,}0000179 = \text{Log. } \frac{179}{10000000} = -7 + \text{Log. } 179.$$

Ut, cum sit Log. 179 = 2,25285 ... ; est Log. 17,9 = 1,25285 ... ;
Log. 1,79 = 0,25285 ... ; Log. 0,179 = 0,25285 ... — 1 ;
Log. 0,0179 = 0,25285 . . . — 2 ;
Log. 0,0000179 = 0,25285 . . . — 5.

Mathematici enim Characteristicam negativam *post Mantissam* ponere solent. Ex quo patet, Characteristicam Fractionis decimalis verae esse $-n$, si hujus Fractionis prima nota realis est $n$timo loco post comma.

§. 323. *Problema.*

Divisionem Totius, quae non est decimalis, mutare

tare in decimalem, atque decimalem in aliam Divisionem.

Solutio.

Hoc Problema re non differt a Problematibus §. 290. 293 seqq. et §. 319. solutis. Quare solummodo exemplis est illustrandum.

1. *Quaeritur convertere* 49′ 11″ 29‴ *in partes decimales unius gradus.* Satis enim cognitum est, gradum, id est $\frac{1}{360}$ partem peripheriae circuli, secundum veterem Divisionem dividi in 60 minuta, singula minuta denuo dividi in 60 minuta secunda, atque singula minuta secunda in 60 minuta tertia. Signa o, I, II, III designant hos gradus, minuta prima, secunda et tertia.

Ergo $49' \; 11'' \; 29''' = \frac{49}{60} + \frac{11}{60^2} + \frac{29}{60^3}$ gradus $= \frac{49 \cdot 3600 + 11 \cdot 60 + 29}{216000} = \frac{177{,}089}{216} = \frac{22{,}136125}{27}$ 0,8198564(814) partibus unius gradus.

Rursus, ut 0,8198564(814) pars unius gradus mutetur in minuta prima, secunda et tertia, numerus multiplicandus est primum per 60; prodit 49′+0,1913(8). Si Fractio 0,1913(8) per 60 multiplicatur, prodit 11″,48(3). Tandem si 0,48(3) per 60 multiplicatur, Productum est 28‴, (9) = 29‴.

Animadv.

De Fractionibus decimalibus periodicis imprimis conferatur J. Bernouilli: *sur les Fractions de-*

decimales periodiques (Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des sciences et belles lettres de Berlin 1771. p. 273 seqq.); quibus etiam nonnulla addidit C. F. Gauss (*Disquisitiones Arithmeticae* Lips. 1801. §. 312 — §. 318.).

§. 325. *De Divisione decimali diversorum generum Quantorum, atque de Systemate metrico.*

Ex iis, quae dicta sunt de natura Fractionum decimalium, perspicitur, Systema decadicum duabus consistere ex partibus, quarum altera, cujus rationem explicavimus §. 40 — §. 44. *numeris integris*, altera, quam nunc tractavimus, *Fractionibus decimalibus* constituitur. Maxima autem convenientia, quae est inter utramque partem, efficit, ut integrorum numerorum calculus fere non differat a calculo decimali. Propter hanc convenientiam, Fractionum decimalium computatio, ut rei naturae maxime est congruens, ita multo facilior est, quam aliarum Fractionum; quae causa est, cur in universa Mathesi pura earum usus vigeat maxime. In extrahendis radicibus, in evehendis numeris ad diversas Potestates, in logarithmicis, goniometricis, trigonometricis, multisque aliis calculis, fere solae decimales adhibentur Fractiones. In vita autem sociali earum usus maxime increvit apud eas gentes, ubi *novum*, quod dicunt, *Systema*

 men-

mensurarum et ponderum, cujus omnes Divisiones sunt decimales, receptum fuit; ut factum est in nostris regionibus, ubi id, anno 1816, ex decreto regio substitutum fuit in locum veterum mensurarum; quae maxime diversae, mutabiles, atque arbitrariae cum multa pepererunt incommoda, tum doli et fallaciae amplam saepe praebuerunt materiam. Quare hoc loco non alienum erit, ejus principia obiter perstringere.

Hoc Systema praeter illa commoda, quae ipsa affert Divisio decimalis, eo etiam insigniter se commendat, *quod una eademque mensura sit fundamentum omnium mensurarum*; quibus distantiae, superficies, corpora et pondera indicantur; deinde, *quod haec mensura sit fixa et constans*; quippe quae ex ipsius telluris nostrae magnitudine petita sit, atque igitur restitui omni tempore possit, si forte deperdita sit. Haec enim mensura, quae dicitur *metrum* (μέτρον, *mensura* per excellentiam), definita est metiendo arcum Meridiani terrestris, qui est fere 10°, per eam mensuram Gallicam, quam dicunt Toise; quod opus sane laboriosum, multisque pressum et impeditum difficultatibus, feliciter peregerunt Astronomi Gallici celebres, Mechain et Delambre (1). Ita autem

(1) Conf. Delambre: *Methodes Analytiques pour la determination d'un arc du Meridien*; atque *Base du Systeme Metrique decimal, ou mesure de l'arc du Meridien entre Dunkerque et Barcelone, executée en 1792. et*

tem *in Gallia ex publica auctoritate Metrum definitum fuit* Anno 1795, *ut esset pars quadragies millies millesima peripheriae Meridiani terrestris*, vel *pars decies millies millesima arcus Meridiani* 90° *graduum*, id est, arcus inter Polum et Aequatorem ducti atque Parisios transeuntis.

§. 326. *Comparatio Metri cum aliis mensuris. Ejus Divisio.*

Si hoc Metrum confertur cum aliis mensuris distantiarum, patet unum Metrum continere (1):

I. 0,5130740 sexpedes Parisienses (Toise) (2), ergo 3,078444 pedes, vel 36,94133 pollices, vel 443,2959 lineas Parisienses.

II.

et années suivantes, par Mechain *et* Delambre, tria volum.

(1) Non deest copia librorum, in quibus agitur de mensuris, quae in diversis regionibus receptae sunt: inter quos praecipue memorandi sunt J. T. Mayer *Practische Geometrie*, 1792, Vol. I. p. 56 seqq. atque A. G. Kästner: *Fortsetzung der Rechenkunst.* 1786; Lucas Oling, *Rekenkundige voorstellen:* in quo libro egregio cum de aliis Quantis Arithmeticis, tum de mensuris multa notatu digna reperiuntur: G. K. Chelius, *Mass- und Gewichtkunde.* 1830. J. Jäckel, *Neueste Münz- Mass- und Gewichtkunde.* 1828. Quod ad comparationem cum Metro, conferatur van Swinden, *Verhandeling over volmaakte maten en gewigten*, 1811. Lobatto, Jaarboek, A. 1829, et seqq. *Les Tables de* Martin, ou *le Regulateur universel*, Paris. 1821, et alios multos.

(2) Ut postea definitum fuit. Prius statuebatur metrum continere 0,51324 sexpedes, ergo 3,07944 pedes, vel 36,953 pollices, vel 443,44 lineas.

II. 0,265438 Duodecimpedes Rhenanos (Rhijnlandsche Roeden) (1), id est, 3,185256 pedes, vel 38,22307 pollices, vel 458,677 lineas Rhenanas. In utraque mensura pes est 12 pollicum, et pollex est 12 linearum.

III. 0,2716853 Tredecimpedes Amstelaedamenses (Amsterdamsche Roede 13 pedum), id est, 3,531909 pedes, vel 38,851 pollices, 466,212 lineas Amstelaed.; ubi pes continet 11 pollices, atque pollex 12 lineas.

IV. 1,4538583 ulnas Amstelaedamenses.

Ex quo sequitur:

I. *Sexp. Paris.* cont. 1,9490366 metra; *pes* aut. 0,3248394 met.
pollex . . . 0,0270699 . . . *linea* . . 0,0022558. . .
II. *Duod. ped. Rhen.* .. 3,767358 . . . *pes* . . 0,313946 . .
pollex . . . 0,026162 . . . *linea* . . 0,002180. . .
III. *Tred. ped. Amst.* .. 3,680729 . . . *pes* . . 0,283133 . .
pollex . . . 0,025739 . . . *linea* . . 0,002145 . .
ulna Amstel. . . 0,687815.

Hujus metri, quod nostrates appellant *nieuwe Nederlandsche el*, partes *Latinis*, multipla autem *Graecis* vocibus designantur.

Ita *decimetrum* (Palm) est *decima*; *centimetrum* (duim) est *centesima*; *millimetrum* (streep) est *millesima* pars metri. Sed *decametrum* (roede) con-

(1) Regia auctoritate hoc constitutum fuit, adeo ut Duodecimpedes Rhenani contineant 3,767358 metra. Ex instituta comparatione van Swinden invenerat 3,7658592 metra, ita ut metrum sit = 0,2655436 Duod. ped. Rhen.

continet 10 metra; *hectometrum* (10 roeden) 100 metra; *kilometrum* (nieuwe mijl) 1000 metra; *myriametrum* 10000 metra.

Quot pedes, pollices, lineas Parisienses, Rhenanas, Amstelaedamenses contineant hae partes et multipla metri, facillime reperitur, quoniam in numeris expositis, solus locus commatis mutandus est (§. 275 et 276.), veluti: Pollex Parisiensis continet 27,0699 millimetra = 2,70699 centimetra = 0,270699 decimetra = 0,00270699 decametra = 0,000270699 hectometra, et ita deinceps.

§. 327. *Mensura superficierum.*

Mensurae, quae metiendis agris, figuris, corporumque superficiebus inserviunt, sunt *Quadrata Metri*, *ejusque partium et multiplorum*. Est autem *Quadratum* figura rectilinea quadrilatera, cui latera sunt aequalia, atque anguli recti. *Quadratum metri*, sive *metrum quadratum* (vierkante El), est Quadratum, cujus latera sunt *unius metri; centimetrum Quadratum*, cujus latera sunt *unius centimetri.* Eadem ratio est *Millimetri quadrati*, *decametri quadrati*, etc. Ex rationibus geometricis patet, *metrum quadratum* continere 100 *decimetra quadrata; decimetrum quadratum* 100 *centimetra quadrata; decametrum quadratum* 100 *metra quadrata; hectometrum quadratum* 100 *decametra quadrata*, et ita deinceps.

De-

Decametrum quadratum (vierkante Roede) dicitur *Area*, atque inservit mensurae agrorum. *Hectometrum* quadratum, id est centum Areae vel 10000 metra quadrata, dicitur *Hectarea* (Bunder). *Metrum quadratum*, cum sit centesima pars Areae, vocatur *Centiarea*. Si hae mensurae comparantur cum pedibus et duodecimpedibus quadratis Rhenanis et cum jugeribus Rhenanis, continent:

Met. quadr.	10,1459 ped. quad. Rh. vel	0,0704573	duod. p. q. Rh.
Decam. quadr.	1014,5879	7,04573	. . . .
Hect. quadr.	101458,79	704,573	. . . .

Pes quadr. Rh. 0,0985 metra quadrata.
Duodec. imped. quadr. Rh. 14,192986 metra quadrata.
Kilometrum quadr. (100 Bunders) 117,4289 jugera Rhenana.
Jugerum Rhenanum 0,8516 Hectareas.

§. 328. *Mensurae spatii, a corporibus occupati.*

Mensurae, quae inserviunt definiendae soliditati corporum, id est, spatio quod occupant, sunt *Cubi metri ejusque partium et multiplorum*. Est autem *Cubus* corpus geometricum, sex Quadratis aequalibus inclusum. *Cubus metri*, sive *metrum cubicum* est cubus inclusus sex metris quadratis; *cubus decimetri*, sive *decimetrum cubicum* est cubus inclusus sex decimetris quadratis, et similiter de caeteris. Ex rationibus geometricis patet, *metrum cubicum* continere 1000 *decimetra cubica*; *decimetrum cubicum* 1000 *millimetra cubica*, *decametrum cubicum* 1000 *metra cubica*, caet. Quare

re metrum cubicum continet 32,317151 pedes cubicos Rhenanos, atque pes cubicus 30,943322 decimetra cubica. Metrum Cubicum dicunt Stereum (στέρεος solidus); quod, si lignis metiendis inservit, a Nostratibus vocatur Wisse.

Si definiendum est spatium, quod occupant merces fluidae et aridae vasis inclusae, adhibetur *cylindrus*, cujus soliditas est *decimetrum cubicum*, qui dicitur *litra* (λίτρα idem quod Lat. libra). Nostrates eam vocant *kan*, si *merces fluidas*, sed *kop*, si *merces aridas* metitur. Ejus partes sunt *decilitra*, seu decima pars litrae (maatje), *centilitra*, seu centesima pars litrae (vingerhoed).

Multipla litrae sunt *decalitra* (schepel); *hectolitra* (mudde, zak, vat, 100 kannen, 100 koppen).

Earum autem Ratio ad alias mensuras haec est: hectolitra continet 3,59531 ejus mensurae, quam vocant *Amsterdamsche schepel*, quae igitur est = 0,27814 hectolitrae = 2,7814 decalitrae etc.

§. 329. *Mensurae ponderum.*

Mensura ponderum est pondus aquae chymice prorsus excoctae, quae continetur in *litra* atque maximam habet densitatem, id est, calorem $39\frac{1}{4}$ graduum in scala Fahrenheitii. Haec mensura dicitur *kilogramma* (nieuw Nederlandsch pond), ejus pars decima est *hectogramma* (ons); centesima *decagramma* (Lood); millesima *gramma* (Wigtje); pars decima grammatis dicitur *decigramma* (Kor-

(Korrel). Quare vox *kilogramma*, mille grammata et *myriogramma* decies mille grammata significat. *Kilogramma* continet 2,023921 *libras Amstelaedamenses;* ergo una libra Amstelaed. est 0,494090 kilogr.

Cum his non convenit *pondus Medicinale*. Nam, ex decreto regio anni 1817, libra medica est $\frac{3}{8}$ pars kilogrammatis, atque igitur continet 375 *Grammata*.

Ergo *Uncia* sive $\frac{1}{12}$ pars Librae continet 31,25 Grammata.
Drachma sive $\frac{1}{8}$ pars Unciae . . . 3,906 Grammata.
Scrupulus vel $\frac{1}{3}$ pars Drachmatis . . . 1,302 Grammata.
Granum vel $\frac{1}{20}$ pars Scrupuli . . . 0,065 partem Grammatis.

§. 380. *Animadv.*

Nonnulli Mathematici, inprimis Galli, diem etiam dividunt in *decimas* partes, quas *horas novas* appellant; quaelibet ejusmodi hora dividitur in 100 *minuta*, quodlibet *minutum* in 100 *minuta secunda*.

Dividunt etiam peripheriam circuli in 400 partes, vel quartam ejus partem in 100 partes, quas *novos* appellant *gradus*. Singuli ejusmodi gradus in decimas partes, vel in 100 *minuta* et 10000 *minuta secunda* dividuntur. Ergo si calculus instituitur secundum ea, quae exposita sunt §. 323., gradus vulgaris est $1^\circ,1111111\ldots$ vel 1, (1) gradus novus; minutum vulgare est $0^\circ,0(185)$; secundum vulgare est $0^\circ,000(308641975)$

Ita $57^\circ,9467$ gradus novi sunt $52^\circ 9' 7'',308$ vulgares, atque $43^\circ 6' 20''$ vulgares sunt $47^\circ,895$ novi.

CA-

P. II. CAPUT IV.

DE CONVERTENDIS FUNCTIONIBUS FRACTIS IN SERIES, ATQUE DE SERIEBUS ARITHMETICIS MAJORIS ORDINIS.

SECTIO I.

De convertenda Fractione formae $\frac{a}{a+bx}$ *in Seriem infinitam. De convergentia et divergentia Serierum.*

§. 330. *De convertenda Fractione in Seriem finitam.*

Fractio vel Ratio inter duo Quanta variis modis converti potest in Series sive *finitas*, sive *infinitas*. *Seriei finitae* exemplum suppeditat §. 128. Etenim

1. $\frac{x^m - y^m}{x - y} = x^{m-1} + x^{m-2}\, y + x^{m-3}\, y^2 \ldots + xy^{m-2} + y^{m-1}$ (§. 128. 5); unde

2. $\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^m}{1 - x}$ (§. 134. 4.) $= x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} \ldots + x + 1$,

3. $\frac{a \cdot (x^m - 1)}{x - 1} = a\frac{(1 - x^m)}{1 - x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 \ldots + ax^{m-1}$,

ubi m est *numerus integer positivus*. Series constat ex m terminis, qui omnes sunt *positivi*; ut $\frac{100^3 - 2^3}{100 - 2}$ $= \frac{999992}{98} = 10204. = 100^2 + 2 \cdot 100 + 2^2$.

Posteriores duae Series sunt *Progressiones Geo-*

 me-

metricae, quarum *Summa* indicatur priore membro Aequationis; quod convenit cum §. 204. 1.

4. $$\frac{x^{2m+1}+y^{2m+1}}{x+y} = x^{2m} - x^{2m-1}y + x^{2m-2}y^2 - x^{2m-3}y^3 \ldots - xy^{2m-1} + y^{2m}$$ (§. 128. 11.).

5. $$\frac{x^{2m+1}+1}{x+1} = x^{2m} - x^{2m-1} + x^{2m-2} - x^{2m-3} \ldots - x + 1;$$

ubi m est *numerus integer positivus*, atque igitur $2m+1$ *numerus impar*. Series constat ex $2m+1$ terminis, qui *per vices sunt positivi et negativi*, sed primus et ultimus terminus sunt *positivi*.

6. $$\frac{x^{2m}-y^{2m}}{x+y} = \frac{(x^m+y^m)(x^m-y^m)}{x+y} \text{ (§. 127. 1.) } = x^{2m-1} - x^{2m-2}y + x^{2m-3}y^2 \ldots + xy^{2m-2} - y^{2m-1}$$ (128. 10.).

7. $$\frac{x^{2m}-1}{x+1} = \frac{(x^m+1)(x^m-1)}{x+1} = x^{2m-1} - x^{2m-2} + x^{2m-3} \ldots + x - 1;$$

ubi $2m$ est *numerus integer par*. Series constat ex $2m$ terminis, qui *per vices sunt positivi et negativi*. Primus est *positivus*, ultimus *negativus*.

Exempla sunt

8. $$\frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y; \quad \frac{x^2-y^2}{x+y} = x-y.$$

9. $$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+xy^2+y; \quad \frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2-xy+y^2.$$

10. $$\frac{x^4-y^4}{x-y} = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x-y} = (x^2+y^2)(x+y) \text{ (8) } = x^3+x^2y+xy^2+y^3.$$

$$\frac{x^4-y^4}{x+y} = \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x+y} = (x^2+y^2)(x-y) \text{ (8) } = x^3-x^2y+xy^2-y^3.$$

11. $$\frac{x^5-y^5}{x-y} = x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4; \quad \frac{x^5+y^5}{x+y} = x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$$

12.

$$\frac{x^6-y^6}{x-y}=\frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}{x-y}=(x^2+xy+y^2)(x^3+y^3)\ (9)$$
$$=x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5.$$

$$\frac{x^6-y^6}{x+y}=\frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}{x+y}=(x^2-xy+y^2)(x^3-y^3)\ (9)$$
$$=x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5.$$

Ex his aliae facile derivantur formulae, ut:

$$\frac{x^{2m+3}+1}{x+1}=\frac{x^{2m+1}+1+x^{2m+1}(x^2-1)}{x+1}=\frac{x^{2m+1}+1}{x+1}+x^{2m+1}(x-1).$$

$$\frac{x^{2m+2}-1}{x+1}=\frac{x^{2m}-1}{x+1}+x^{2m}(x-1);$$ ut, si $x=10$, erit

$$\frac{x^3+1}{x+1}=\frac{1001}{11}=91;\ \frac{x^5+1}{x+1}=\frac{100001}{11}=91+9.10^3=9091.$$

$$\frac{x^7+1}{x+1}=\frac{10000001}{11}=9091+9.10^5=909091;$$ et ita deinceps conf. §. 298.

§. 331. *Coroll.* 1.

Ergo quodlibet Quantum formae x^m-y^m divisibile est per $x-y$. Similiter $x^{2m+1}+y^{2m+1}$, atque $x^{2m}-y^{2m}$ per $x+y$ sunt divisibilia. Ex quo sequitur, esse x^m-1 per $x-1$, atque $x^{2m+1}+1$ et $x^{2m}-1$ esse per $x+1$ divisibilia; in quibus tamen omnibus formis m est *numerus integer positivus*. Velut

$$\frac{100^3+2^3}{100+2}=\frac{1000008}{102}=9804=100^2-2.100+2^2;$$

$$\frac{100^4-2^4}{100+2}=\frac{99999984}{102}=980392=100^3-2.100^2$$
$$+4.100-2^3.$$

§. 332.

§. 332. *De convertenda Fractione in Seriem infinitam.*

Majoris autem momenti est conversio Fractionis in Seriem infinitam, quam in hoc Capite, quantum id per fundamenta adhuc jacta licet, contemplaturi sumus. Species hujus conversionis illa est, de qua praecedenti Capite III. actum est, qua Fractio $\frac{A}{\alpha}$ in Fractionem decimalem mutatur. Mutatur autem Fractio $\frac{A}{\alpha}$ *in Seriem finitam*, si α non alios habet Factores minimos, nisi 5 et 2, sed, si alios habet, *in Seriem infinitam* (§. 290. §. 293.)

Ut in hac mutatione explicanda ab ea, quae est simplicissima, ordiamur, proponamus Fractionem formae $\frac{1}{1+x}$ convertendam in Seriem infinitam, quae juxta potestates ipsius x progrediatur. De hac Serie, cujus usus magnus est in Arithmetica universali, paulo uberius est agendum, eo inprimis consilio, ut accurata acquiratur notio *convergentiae* et *divergentiae* Serierum.

§. 333. *Problema.*

Convertere Fractionem $\frac{1}{1-x}$ *in Seriem infinitam.*

Solutio.

Divisio unitatis per $1-x$, ita institui potest (§. 157.).

Di-

Dividendus $= 1$. Divisor $= 1 - x$.

$$\begin{array}{l} \underline{1 - x} \quad \text{Quotus} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots \\ \quad x \\ \quad \underline{x - x^2} \\ \qquad x^2 \\ \qquad \underline{x^2 - x^3} \\ \qquad\quad x^3 \ldots \end{array}$$

Non opus est in dividendo pergamus. Manifestum enim est, *Progressionem oriri geometricam, eamque infinitam*, cujus primus terminus est unitas, et cujus Exponens est x; de qua dictum est §. 215 et §. 295. Summa hujus Progressionis est $\frac{1}{1-x}$. Ergo idem ostendit Divisio, quod didicimus *ex contemplatione Progressionis geometricae infinitae*.

§. 334. *Coroll. 1. De Supplemento hujus Seriei; de ejus Summa, si $x > 1$.*

In aequatione $y = \frac{1}{1-x}$ quemlibet numerum in locum ipsius x ponere possumus. Tum autem dubium aliquod oriri videtur, quotiescunque x est unitate major, atque igitur Progressio Geometrica est adscendens. Ponamus v. c. $x = 2$, erit $y = \frac{1}{1-2} = -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \ldots$ ad infinitum. Qui autem fieri possit, ut hujus Seriei ad infinitum usque progredientis Summa sit $= -1$, cum, quo plures sint termini, eo magis ab unitate discrepet, omnesque praeterea termini sint positivi,

tivi, quorum igitur Summa numquam potest fieri positiva. Ergo posterius aeqnationis membrum videtur esse inaequale priori, quod sibi repugnat.

At vero considerandum est, quantuscumque sit terminorum numerus, semper esse aliquod Residuum, quod Seriei addendum vel subtrahendum sit; quod *Supplementum seriei* dicere possumus. Veluti

$$y = \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}$; et ita deinceps. Ergo, si numerus terminorum est 1, 2, 3, 4 ... m, Supplementum est $\frac{x}{1-x}$, $\frac{x^2}{1-x}$, $\frac{x^3}{1-x}$, $\frac{x^4}{1-x}$ ... $\frac{x^m}{1-x}$ atque ita universe:

$y = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^{m-1} + \frac{x^m}{1-x}$; ubi m est numerus terminorum.

Itaque si $x = 2$, series est: $y = \frac{1}{1-x} = -1 = 1 + \frac{2}{1-2}$

$= 1 - 2 = 1 + 2 - 4 = 1 + 2 + 4 - 8 = 1 + 2 + 4 + 8 - 16.$

Si $x = 3$, Series est: $y = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{1-3} = 1 - \frac{3}{2}$

$= 1 + 3 - \frac{9}{2} = 1 + 3 + 9 - \frac{27}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 - \frac{81}{2}.$

Quapropter, si $x > 1$, Quotus $\frac{1}{1-x}$ hac Serie nequaquam innotescit, nisi post $m$timum terminum addatur Supplementum $\frac{x^m}{1-x}$. Tum autem

tem Series cessat esse infinita. Quare si $x > 1$, non vere dicitur, Fractionem $\frac{1}{1-x}$ *aequalem esse Seriei* $1+x+x^2+x^4$ ... *ad infinitum usque extensae.*

§. 335. *Coroll. 2. De Summa hujus Seriei si $x < 1$.*

Non est ita, si x est minor unitate. Tum enim oritur *Progressio decrescens*, in qua quilibet terminus consequens minor est antecedente (§. 203.), atque Supplementum $\frac{x^m}{1-x}$ eo minus est, quo major est m. Quare, quo plures sumuntur termini, eo magis ad verum Quotum accedit Summa terminorum. Ponamus enim $x = \frac{1}{b}$ ubi $b > 1$. *Supplementum* est $\frac{1}{b^m\left(1-\frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{b^{m-1}(b-1)}$, quod minus est unitate, eoque minus, quo m, sive terminorum numerus major est. Sit $x = \frac{1}{2}$, ergo $b = 2$, atque Supplementum est $\frac{1}{2^{m-1}}$; ergo $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $= 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{16} \ldots + \frac{1}{2^{m-1}}$.

Sit $x = \frac{1}{10}$, ergo $b = 10$, atque Supplementum est $\frac{1}{9 \cdot 10^{m-1}}$, ergo $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{90}$ $= 1$

$$= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{900} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \dots + \frac{1}{9.10^{m-1}}$$

Confer. §. 295.

§. 336. *Coroll.* 3.

Id nos conducit ad aliam Seriem, in quam converti possit Fractio $\frac{1}{1-x}$. Ponatur enim $\frac{1}{x}$ in locum ipsius x. Prodit aequatio

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \dots + \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{1}{x^m\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x-1}$$

ex qua, divisa per $-x$, haec oritur:

$$\frac{1}{1-x} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \dots + \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x^m(1-x)}\right).$$

Idem invenimus, si, eodem modo, quo §. 333, dividimus unitatem per $-x+1$.

In hac igitur Serie si $x > 1$, Progressio est decrescens, ergo terminus consequens minor est antecedente (§. 203.), atque Supplementum $\frac{1}{x^m(1-x)}$ $= -\frac{1}{x^m(x-1)}$, eo minus est quo major est m, atque est negativum, si x est positivus.

Sit $x = 2$, erit

$$-1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \text{ etc.}$$

Contrarium fit, si $x < 1$.

§. 337. *Coroll. 4. Series divergens et convergens.*

Series est convergens, cujus Supplementum eo magis diminuitur, quo major fit numerus terminorum. Divergens est, si id Supplementum eo magis increscit, quo magis terminorum numerus augetur. Quare, *quo major est terminorum numerus, eo magis ipsorum Summa accedit ad verum Quotum, si Series est convergens; sed, si Series est divergens, quo major est terminorum numerus, eo magis a vero Quoto haec discrepat Summa.*

Quapropter $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$ est *divergens*, si $x > 1$; sed convergens, si $x < 1$. Contra $\frac{1}{1-x} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \ldots\right)$ est *convergens* si $x > 1$, sed *divergens*, si $x < 1$. Conf. §. 215.

Fractio decimalis, in quam convertitur Fractio formae $\frac{1}{10^p - 1}$ est *infinita Series convergens* (§. 295).

§. 338. *Coroll. 5.*

Alia Series magis quam alia convergit, si, post eundem numerum terminorum, Supplementum ejus minus est, quam hujus Seriei. Ita, proposita aequatione:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + \frac{x^m}{1-x}$, atque $x = 0,1$ et $x = 0,01$, oriuntur duae Series, quae sunt

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1+0,1+0,01+0,001+0,0001 \ldots + \frac{1}{9.10^{m-1}}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99} = 1 + 0,01 + 0,0001 + 0,000001 + 0,00000001 \ldots + \frac{1}{99.100^{m}}$$

Quoniam $\frac{1}{99.100^{m-1}} = \frac{1}{9.10^{m-1}} \cdot \frac{1}{11.10^{m-1}} < \frac{1}{9.10^{m-1}}$ (§. 94. §. 165. 7.), posterior Series magis convergit quam prior.

Rursus alia Series magis, quam alia divergit, si post eundem numerum terminorum Supplementum ejus majus est quam hujus Seriei. Velut si x est 10 et 100, oriuntur duae Series, quae sunt:

$$\frac{1}{1-10} = -\frac{1}{9} = 1 + 10 + 100 + 1000 \ldots - \frac{10^{m}}{9}.$$

$$\frac{1}{1-100} = -\frac{1}{99} = 1 + 100 + 10000 \ldots - \frac{100^{m}}{99}.$$

Quoniam $\frac{100^{m}}{99} = \frac{10^{m}}{9} \cdot \frac{10^{m}}{11}$, atque $\frac{10^{m}}{11} > 1$, si m, ut hic ponitur, est > 1, erit $\frac{100^{m}}{99} > \frac{10^{m}}{9}$, quare posterior Series magis divergit, quam prior. Quod si autem $m = 1$, id est, si Supplementum *primo* jam termino additur, id minus est in posteriore, quam in priore Serie, quoniam $\frac{10}{11} < 1$. Aequationes enim tum sunt:

$-\frac{1}{9} = 1 - \frac{10}{9}$, atque $-\frac{1}{99} = 1 - \frac{100}{99}$; ubi $\frac{100}{99} < \frac{10}{9}$.

Ex his intelligitur, quid significet, si dicitur Series aliqua *admodum*, *celeriter*, *maxime*, *tarde*, *lente convergere vel divergere.*

§. 339. *Cor. 6. Summa seriei, si $x = 1$.*

Si $x = 1$, oritur singularis Seriei species. Nam per aequationem §. 334. fit $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{0} = 1+1+1+1 \ldots + \frac{1}{0}$. Fractus est ejus generis, de quo diximus §. 162, 8. *Neque est convergens neque divergens*, quoniam Supplementum permanet infinitum, quantuscunque finitus numerus terminorum fuerit. Plures sunt Series hujus generis.

Ita, ut postea demonstrabitur:

$$\text{Logn.}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$-\text{Logn.}(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \ldots$$

Quare si $x = 1$, Series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = \text{Logn. } 2$. est convergens, ejusque valor est finitus. Sed *Series* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots = -\text{Logn. } 0$, *neque est convergens neque divergens*, quoniam valor est infinitus, ergo Supplementum semper manet

per infinitum. Idem dicendum est de Serie
$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\ldots=\frac{1}{2}\text{ Log. }\left(\frac{1+1}{1-1}\right)$.

§. 340. *Coroll. 7. Series Fractionis* $\frac{1}{1+x}$

Ponatur x negativus. Duae Series §. 334 et §. 336. in has mutantur, quoniam $(-x)^{2m}=x^{2m}$ sed $(-x)^{2m+1}=-x^{2m+1}$ (§. 101.).

$$(1)\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\ldots\pm x^{m-1}\pm\frac{x^m}{1+x}$$

$$(2)\ \frac{1}{1+x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\ldots\pm\frac{1}{x^m}\mp\frac{1}{x^m(1+x)};$$

ubi per vices sibi succedunt signa, ita ut primus terminus sit positivus. Si m, sive numerus terminorum, qui sumuntur, *par* est, supplementum additur, sed, si *impar* est, subtrahitur.

Si $x>1$, prior Series est divergens, posterior convergens. Contrarium fit, si $x<1$. Sit $x=9$; ergo

$$\frac{1}{10}=1-9+81-\frac{729}{10}=1-9+81-729+\frac{6561}{10}$$

$$\frac{1}{10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}-\frac{1}{729.10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}-\frac{1}{6561}+\frac{1}{6561.10}.$$

Si hisce duabus Seriebus adduntur Series §. 334 et 336.

$$(3)\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^2\ldots+x^{m-1}+\frac{x^m}{1-x}$$

$$(4)\ \frac{1}{1-x}=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\ldots\pm\frac{1}{x^{m-1}}\mp\frac{1}{x^m(1-x)}\right)$$

per-

perspicitur, utramque Fractionem $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$, qualiscunque sit x, per Seriem convergentem exprimi posse, praeterquam si $x=1$. Nam si $x=1$, Quotus $\frac{1}{1-x}$ est infinitus, quare ejus Series neque est convergens neque divergens. Quotus autem $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$ exprimitur Serie $1-1+1-1\ldots$; quae Series est sui generis, neque convergens neque divergens, atque dicitur *parallela*. Nihil significat, nisi adjicitur Supplementum, ut $\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$ $=1-1+\frac{1}{2}=1-1+1-\frac{1}{2}\ldots\ldots$

Ergo difficultas, quae in hisce atque in divergentibus Seriebus esse videatur, prorsus tollitur, si attendimus ad Supplementum. Nonnulli Mathematici, id non videntes, aut non curantes, mirificum aliquod in ipsis, praesertim in Seriebus parallelis, perspicere sibi visi sunt. Guido Grandi analogiam quandam inter ipsas et *creationem mundi ex nihilo* esse statuit. Leibnitzius in ipsis vidit singularem quandam naturae solertiam et justam partitionem (Acta Erudit. Suppl. T. V. A. 1713.) Conf. Kästner: *de lege continui in natura* 1750, atque *ejusdem Dissertatio Mathematica et Physica* N°. XIII. ubi hic locus accurate expositus est.

§. 341.

§. 341. *Coroll.* 8. *Conversio Quoti* $\frac{\alpha}{a \pm bx}$ *in Seriem.*

Ope Serierum, quibus exprimuntur Quoti $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$, omnes Quoti, quorum Denominatores sunt Binomia, facile in Seriem convertuntur. Etenim $\frac{\alpha}{a+bx} = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{bx}{a}}\right)$, atque $\frac{\alpha}{a-bx} = \frac{\alpha}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{bx}{a}}\right)$. Factores autem $\frac{1}{1+\frac{bx}{a}}$ et $\frac{1}{1-\frac{bx}{a}}$ convertuntur in Series expositas §. 340. si in hisce Seriebus $\frac{bx}{a}$ substituitur in locum numeri x.

§. 342. *Coroll.* 9.

Si Fractionis Numerator habet terminos, in quibus est x, vel etiam sunt Potestates ejus, ut $y = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \mu x^m}{a \pm bx}$, Divisio per $a \pm bx$ pergit, donec nullus numerus x restet in Numeratore: veluti si proponitur:

$$y = \frac{6x^3 + 13x^2 - 10x - 27}{3x - 4} = 2x^2 + 7x + 6 + \frac{3}{4 - 3x}$$

sed $\frac{3}{4-3x} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}x}\right)$. Factor $\frac{1}{1-\frac{3}{4}x}$ convertitur in Series §. 340. expositas, si in locum numeri x substituitur $\frac{3}{4}x$.

§. 343. *Coroll.* 10.

In his praecipue consideranda est Fractio formae $y = \frac{\alpha+\beta x}{a+bx} = \frac{\beta}{b} + \frac{\alpha b-\beta a}{ab} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}x\right)}$. Unde posito $z = \frac{bx}{a}$; erit $\frac{1}{z} = \frac{a}{bx}$, atque

1. $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx} = \frac{\beta}{b} + \left(\frac{\alpha b-\beta a}{ab}\right)\left(1-z+z^2 \dots \pm z^{m-1} \mp \frac{z^m}{1+z}\right)$.

2. $\dots = \frac{\beta}{b} - \frac{\alpha b-\beta a}{ab}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3} \dots \pm \frac{1}{z^m} \mp \frac{1}{z^m(1+z)}\right)$.

3. $\dots = \frac{\alpha}{a} - \left(\frac{\alpha b-\beta a}{ab}\right)\left(z-z^2+z^3 \dots \mp z^{m-1} \pm \frac{z^m}{1+z}\right)$.

ubi tertia formula ex prima nascitur.

Si in his formulis vel, b vel β, vel β et b negativi ponuntur, oriuntur Series Fractionum $\frac{\alpha+\beta x}{a-bx}$; $\frac{\alpha-\beta x}{a+bx}$; $\frac{\alpha-\beta x}{a-bx}$.

Ex his autem Substitutione reperiuntur Series Fractionum

$$\frac{\alpha+x}{a+x};\ \frac{\alpha+x}{a-x};\ \frac{\alpha-x}{a-x};\ \frac{\alpha-x}{a+x};\ \frac{1+x}{1-x};\ \frac{1-x}{1+x}.$$

§. 344. *Coroll.* 11.

Hae Series etiam usui esse possunt in Divisione numerorum determinatorum, velut, si in Fractione $\frac{\alpha}{a-x}$ ponimus $a = 10^p$ atque $\frac{x}{a} = \frac{x}{10^p} = z$, erit

$$\frac{\alpha}{10^p-x} = \frac{\alpha}{10^p} \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{\alpha}{10^p}\left(1+z+z^2 \dots +z^{m-1}+\frac{z^m}{1-z}\right).$$

Si

Si $x=1$, prodit formula, qua usi sumus §. 301, ad dividendum numerum per 99; 999 etc. Si x est 2, 3, 4 ... prodeunt formulae Divisionis numeri α per 98; 998 ... 97; 997 ... 96; 996 ... etc.

Quaeratur v. c. Quotus numeri divisi per 98; 998..., ita ut verus sit usque ad tertiam decimalem. Series est:

$$\frac{\alpha}{10^p-2}=\frac{\alpha}{10^p}\left(1+\frac{2}{10_p}+\left(\frac{2}{10^p}\right)^2+\left(\frac{2}{10^p}\right)^3\dots\right)=A+B+C+D\dots$$

ubi $A=\frac{\alpha}{10^p}$; $B=A\,.\,\frac{2}{10_p}$; $C=B\,.\,\frac{2}{10_p}$ etc.

Si $p=2$. Fractio est $\frac{\alpha}{98}$ atque $\frac{\alpha}{10^p}=\frac{\alpha}{100}$;

si $p=3$, Fractio est $\frac{\alpha}{998}$ atque $\frac{\alpha}{10^p}=\frac{\alpha}{1000}$ etc.

Numerus sit $\alpha=7328476$.

$$\text{ergo } \frac{7328476}{98}=\begin{array}{r@{\,=\,}l} 73284{,}76 & A\\ 1465{,}6952 & B\\ 29{,}3139 & C\\ 5862 & D\\ 117 & E\\ 2 & F\\ \hline \end{array}$$
$$=74780{,}\ 367.$$

$$\frac{7328476}{998}=\begin{array}{r@{\,=\,}l} 7328{,}476 & A\\ 14{,}6569 & B\\ 293 & C\\ \hline 7343{,}\ 162 \end{array}$$

$$\frac{7328476}{9998}=\begin{array}{r@{\,=\,}l} 732{,}8476 & A\\ 1465 & B\\ \hline 732{,}994 \end{array}$$

$$\frac{7328476}{99998}=\begin{array}{r@{\,=\,}l} 73{,}28476 & A\\ 146 & B\\ \hline 73{,}286 \end{array}$$

Si x negativus sumitur, prodit:

$$\frac{\alpha}{10^p+x}=\frac{\alpha}{10^p}\left(1-\frac{x}{10_p}+\frac{x^2}{10^{2p}}-\dots\right)=A-B+C-D+E\dots$$

ubi $A=\frac{\alpha}{10^p}$; $B=A\,\frac{x}{10^p}$; $C=B\,\frac{x}{10^p}$ etc.

Haec

Haec formula inservit Divisioni numerorum per 101, 102, 103 ... 1001, 1002, 1003 ... etc., quamquam propter diversa signa partium minus est commoda. Sit $x = 1$; unde

$$\begin{array}{rl} \frac{7328476}{1001} = & 7328{,}476 \quad (= A) \\ & \underline{-\ 7{,}32847} \ (= B) \\ & 7321{,}14753 \\ & \underline{\qquad 732} \ (= C \\ & 7321{,}15485 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \frac{7328476}{10001} = & 732{,}8476 \ (= A) \\ & \underline{-\quad 733} \ (= B) \\ & 732{,}7743 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \frac{7328476}{100001} = & 73{,}2847 \ (= A) \\ & \underline{\quad -\ 7} \ (= B) \\ & 73{,}2840. \end{array}$$

Animadv.

Quo magis perspiciatur usus Seriei infinitae Fractionis $\frac{1}{1 \pm x}$, ex ea derivetur Series infinita Fractionis $\frac{1}{(1 \pm x)^m}$, quae nos conducet ad Series Arithmeticas majoris ordinis. Quod ad sequentem Sectionem referetur.

P. II. C. IV. SECTIO II.

De Serie Fractionis $\frac{1}{(1 \pm x)^m}$ et Binomii $(1 \pm x)^m$, atque de Seriebus Arithmeticis majoris ordinis.

§. 345. *Problema.*

Exprimere Fractionem $\frac{1}{(1-x)^m}$ per Seriem infinitam, ubi m est numerus integer positivus.

Solutio.

Solutio reperiri potest ex aequationibus §. 333.

 $1+x$

$1+x+x^2+x^3\ldots=\frac{1}{1-x}$ (§. 333.); unde $x^m+x^{m+1}+x^{m+2}\ldots$ $=\frac{x^m}{1-x}$; atque $\frac{1+x+x^2+x^3\ldots}{(1-x)^m}=\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$ (§. 133). Ex hisce consequitur:

$$\begin{array}{lll}
1 : (1-x) = & 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\ldots \\
x : (1-x) = & \quad x+x^2+x^3+x^4+x^5\ldots \\
x^2 : (1-x) = & \quad\quad x^2+x^3+x^4+x^5\ldots \\
x^3 : (1-x) = & \quad\quad\quad x^3+x^4+x^5\ldots \\
x^4 : (1-x) = & \quad\quad\quad\quad x^4+x^5\ldots \\
x^5 : (1-x) = & \quad\quad\quad\quad\quad x^5\ldots
\end{array}$$

Ita progrediendo et Summam terminorum sumendo, prodit aequatio:

1. $\frac{1+x+x^2+x^3\ldots}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5\ldots$

Ergo

$$\begin{array}{ll}
1 : (1-x)^2 = & 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5\ldots \\
x : (1-x)^2 = & \quad x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5\ldots \\
x^2 : (1-x)^2 = & \quad\quad x^2+2x^3+3x^4+4x^5\ldots \\
x^3 : (1-x)^2 = & \quad\quad\quad x^3+2x^4+3x^5\ldots \\
x^4 : (1-x)^2 = & \quad\quad\quad\quad x^4+2x^5\ldots \\
x^5 : (1-x)^2 = & \quad\quad\quad\quad\quad x^5\ldots
\end{array}$$

Unde eodem modo

2. $\frac{1+x+x^2+x^3\ldots}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5\ldots$

Ergo

$$\begin{array}{ll}
1 : (1-x)^3 = & 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5\ldots \\
x : (1-x)^3 = & \quad x+3x^2+6x^3+10x^4+15x^5\ldots \\
x^2 : (1-x)^3 = & \quad\quad x^2+3x^3+6x^4+10x^5\ldots \\
x^3 : (1-x)^3 = & \quad\quad\quad x^3+3x^4+6x^5\ldots \\
x^4 : (1-x)^3 = & \quad\quad\quad\quad x^4+3x^5\ldots \\
x^5 : (1-x)^3 = & \quad\quad\quad\quad\quad x^5\ldots
\end{array}$$

Unde

Unde eodem modo prodit:

$$\frac{1+x+x^2+x^3\ldots}{(1-x)^3}=\frac{1}{(1-x)^4}=1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5\ldots$$

Ita progrediendo reperimus:

$$\frac{1}{(1-x)^5}=1+5x+15x^2+35x^3+70x^4+126x^5+252x^6+462x^7+\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^6}=1+6x+21x^2+56x^3+126x^4+252x^5+504x^6+966x^7+\ldots$$

Calculus ipse indicat, Coefficientes harum Serierum esse tales, ut singuli sint Summae terminorum Seriei antecedentis. Quod etiam ex Divisione patet. Sit enim $\frac{1}{(1-x)^{m-1}}=1+Ax+Bx^2+Cx^3$ $+Dx^4+Ex^5\ldots$; ubi $A, B, C, D, E\ldots$ sunt Coefficientes Potestatum numeri x. Quae aequatio si dividitur per $1-x$, prodit $\frac{1}{(1-x)^m}=1+(1+A)x$ $+(1+A+B)x^2+(1+A+B+C)x^3+\ldots$;

Ergo si $\frac{1}{(1-x)^m}=A'+B'x+C'x^2+D'x^3\ldots$ erit $A'=1$; $B'=1+A$; $C'=1+A+B$, etc.

Ex his etiam sequitur, Coefficientes Seriei Fractionis $\frac{1}{(1-x)^m}$ esse terminos Seriei Arithmeticae $m-1$ ordinis, ut ex iis, quae §. 118. dicta sunt, perspicitur. Ergo Coefficientes Seriei Fractionis $\frac{1}{1-x}$ sunt unitates; Coefficientes Seriei Fractionis $\frac{1}{(1-x)^2}$, formant Seriem Arithmeticam simplicem sive natu-

turalem numerorum; sed, in Serie Fractionum $\frac{1}{(1-x)^3}$, $\frac{1}{(1-x)^4}$ etc., Coefficientes sunt termini Serierum Arithmeticarum secundi, tertii, etc. ordinis.

§. 346. *Theorema.*

Coefficientes Seriei infinitae Fractionis $\frac{1}{(1-x)^m}$ *sunt* 1, m, $\frac{m.(m+1)}{1.2}$, $\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3}$, $\frac{m.(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}$ etc.; id est, si $\frac{1}{(1-x)^m} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ erit $A=1$; $B=m$; $C=\frac{m.(m+1)}{1.2}$; $D=\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3}$ etc., *ita ut* $(p+1)$ *timus Coefficiens sive Coefficiens Potestatis* x^p *sit* $=\frac{m.(m+1).(m+2).(m+p-1)}{1.2.3\ldots p}$.

Demonstratio.

Hoc Theorema valet v. c. si m est $=1, 2, 3, 4, 5, 6$, ut calculus §. 345. institutus docet. Id etiam valere, si m est quilibet alius numerus integer positivus, patet ex hac lege conſtanti, *quod Coefficientes m Potestatis sunt Summae Coefficientium* $(m-1)$ *Potestatis.*

Ponamus enim theorema valere in Potestate $m-1$, ita ut sit $\frac{1}{(1-x)^{m-1}} = 1 + (m-1)x + \frac{(m-1)m}{1.2}x^2$

+

$+\frac{(m-1)\,m\,.\,(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3\ldots$, atque sit $\frac{1}{(1-x)^m}$
$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$

His positis, sequitur

$A=1$; $B=1+m-1=m$.

$$C=B+\frac{(m-1)m}{1\,.\,2}=\frac{2m+(m-1)m}{1\,.\,2}=\frac{m\,.\,(m+1)}{1\,.\,2}.$$

$$D=C+\frac{(m-1)m\,.\,(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3}=\frac{m\,.\,(m+1)}{1\,.\,2}\left(\frac{m-1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{m\,.\,(m+1)\,(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3)}.$$

$$E=D+\frac{(m-1)m.(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}=\frac{m.(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{m-1}{4}+1\right)$$
$$=\frac{m.(m+1)(m+2)(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

et ita de caeteris. Ergo, ut enunciatum est, erit

$$1.\ \frac{1}{(1-x)^m}=1+mx+\frac{m\,.\,\overline{m+1}}{1\,.\,2}x^2+\frac{m\ldots\overline{m+2}}{1.2.3}x^3+\ldots$$
$$\frac{m\,.(m+1)\ldots(m+(p-1))}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}x^p\ldots$$

Ex quo concludimus, si Theorema verum est in aliqua Potestate, etiam verum est in sequenti Potestate. Sed vera est in *tertia* Potestate, ergo etiam in *quarta*, ergo etiam in *quinta* etc., ergo *in qualibet Potestate. Quare Series enunciata Fractionis* $\frac{1}{(1-x)^m}$, *ita vera est, ut in locum ipsius m quilibet numerus integer poni possit.*

§. 347. *Coroll.* 1.

Si in Fractione $\frac{1}{(1-x)^m}$ x est negativus, prodit:

1.

$$1.\ \frac{1}{(1+x)^m} = (1+x)^{-m} = 1 - mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}x^2 - \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}x^3 \dots \pm \frac{m.\overline{m+1}\dots(m+(p-1))}{1.2\dots p}x^p \dots$$

Quae aequatio cum priore (§. 346.) ita in unam conjungi potest:

$$2.\ \frac{1}{(1\pm x)^m} = 1 \mp mx + \frac{m.\overline{m+1}}{1.2}x^2 \mp \frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2.3}x^3 + \dots$$

Ut calculus facilior reddatur, ita repraesentetur Series:

$$3.\ (1\pm x)^{-m} = 1 \mp \underbrace{mx}_{A} + \underbrace{\frac{(m+1)}{2}A}_{B}.x^2 \mp \underbrace{\frac{(m+2)}{3}B}_{C}.x^3 + \underbrace{\frac{(m+3)}{4}C}_{D}.x^4 \dots$$

Sit v. c. $m = 6$, erit

$$(1\pm x)^{-6} = 1 \mp 6x + \underbrace{\frac{7.6}{2}}_{21}x^2 \mp 21.\underbrace{\frac{8}{3}}_{56}x^3 + 56.\underbrace{\frac{9}{4}}_{126}x^4 \mp 126.\underbrace{\frac{10}{5}}_{252}x^5 + \dots$$

§. 348. *Coroll.* 2.

Si in his aequationibus Exponens m habetur negativus, prodit haec Series Potestatis $(1+x)^m$:

$$(1+x)^m = 1 - (-m)x + \frac{(-m)(-m+1)}{1.2}x^2 - \frac{(-m)(-m+1)(-m+2)}{1.2.3}x^3 \dots \text{ vel}$$

$$4.\ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{m.(m-1).(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4 + \dots$$

Saltem huic aequationi consentiunt decem priores Potestates Binomii $1+x$, ut apparet ex earum expositione §. 114; velut si $m = 6$; erit

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + \frac{6.5}{1.2}x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}x^3 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}x^4$$

+

$$+\frac{6.5.4.3.2.}{1.2.3.4.5}x^5+\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}x^6=1+6x$$
$+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$. Series non amplius progreditur, quoniam reliqui termini omnes in Numeratore habent Factorem $m-m=0$, sed non in Denominatore; ex quo efficitur, *omnes Coefficientes consequentes evanescere.*

Hanc autem aequationem N°. 4. veram esse, quicunque sit exponens integer m, simili modo demonstratur, atque aequatio Potestatis $(1-x)^m$ §. 346. Ponamus enim, ipsam aequationem N°. 4. valere in Potestate $(1+x)^{m-1}$, ita ut sit:

$$5.\ (1+x)^{m-1}=1+\overline{m-1}.x+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2}x^2+\frac{(m-1)\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3}x^3\dots$$
$$+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}\dots\overline{m-p}}{1.2.3\dots p}x^p+\dots$$

Multiplicemus hanc aequationem per $1+x$, unde prodit:

$$(1+x)^m=1+(m-1).x+\frac{(m-1).(m-2)}{1.2}x^2$$
$$+\frac{(m-1).(m-2)(m-3)}{1.2.3}x^3\dots+\frac{(m-1).(m-2)\dots(m-p)}{1.2.3\dots p}x^p+\dots$$
$$+x+(m-1)x^2+\frac{(m-1).(m-2)}{1.2}x^3\dots$$
$$+\frac{(m-1).(m-2)\dots(m-(p-1))}{1.2.3\dots p-1}x^p\dots$$

Quare si ponimus $(1+x)^m=1+Ax+Bx^2+Cx^3\dots$ $+Px^p+\dots$ erit:

$A=m$.

$B=(m-1).\left(1+\frac{m-2}{2}\right)=\frac{m.(m-1)}{1.2}$.

$C=$

$$C = \frac{(m-1).(m-2)}{1\ .\ 2}\left(1+\frac{m-3}{3}\right) = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.$$

$$D = \frac{(m-1).(m-2).(m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\left(1+\frac{m-4}{4}\right).$$

$$= \frac{m.(m-1).(m-2)(m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$$

$$P = \frac{(m-1).(m-2)\ldots(m-(p-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots p-1}\left(1+\frac{m-p}{p}\right)$$

$$= \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-(p-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots p}.$$

Ergo $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m.(m-1)}{1\ .\ 2}x^2+\frac{m.(m-1).(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^3\ldots$

$$+\frac{m.(m-1)\ldots(m-(p-1))}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots p}x^p\ldots.$$

et quoniam haec est ipsa Aequatio ad demonstrandum proposita, licet nobis colligere, si valet in potestate $(1+x)^{m-1}$, valet etiam in Potestate $(1+x)^m$, id est, si valet in Potestate antecedente, valet etiam in consequente. Valet autem in decem prioribus Potestatibus, ergo etiam in undecima, ergo etiam in duodecima Potestate, etc. Ergo *haec Series, qua exprimitur* $(1+x)^m$ *vera est, qualiscunque sit* m, dummodo sit numerus integer. Vera etiam est, si m est numerus fractus, sed id postea demonstrabitur.

§. 349. *Coroll.* 3.

Si x habetur negativus, prodit:

$$6.\ (1-x)^m = 1-mx+\frac{m.m-1}{1\ .\ 2}x^2-\frac{m\ldots m-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}x^3+\ldots$$

Nam si Exponens est numerus impar, Potestas est negativa (§. 101.).

§. 350. *Coroll.* 4.

Eodem modo quo §. 347. calculus facilior reddi potest

$$(1\pm x)^m = 1 \pm \underbrace{\frac{m}{1}x}_{A} + \underbrace{\frac{m-1}{2}Ax^2}_{B} \pm \underbrace{\frac{m-2}{3}Bx^3}_{C} + \underbrace{\frac{m-3}{4}Cx^4}_{D} \pm \underbrace{\frac{m-4}{5}Dx^5}_{E}$$

aut

$$(1\pm x)^6 = 1 \pm 6x + \underbrace{\frac{5}{2}6.x^2}_{15} \pm \underbrace{\frac{4}{3}.15.x^3}_{20} + \underbrace{\frac{3}{4}.20.x^4}_{15} \pm \underbrace{\frac{2}{5}.15.x^5}_{6} + \underbrace{\frac{1}{6}6x^6}_{1}$$

§. 351. *Coroll.* 5.

Hisce aequationibus definiuntur Potestates cujus libet Binomii, si Exponens m est numerus integer, vel negativus vel positivus.

Nam $(a\pm x)^m = a^m\left(1\pm\frac{x}{a}\right)^m$; atque $(a\pm x)^{-m} = a^{-m}\left(1\pm\frac{x}{a}\right)^{-m}$ (§. 94 et §. 142.). Sit $\frac{x}{a}=y$. Ergo (§. 346 et §. 350.)

$$1.\quad (a\pm x)^m = a^m\left(1 \pm my + \frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}y^2 \pm \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^3 \ldots \pm \frac{m.(m-1)\ldots(m-(p-1))}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,p}y^p \ldots \pm y^m\right).$$

$$2.\quad (a\pm x)^{-m} = a^{-m}\left(1 \mp my + \frac{m.(m+1)}{1\,.\,2}y^2 \mp \frac{m.(m+1).(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}y^3 \ldots \mp \frac{m.(m+1)\ldots(m+p-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}y^p \ldots\right).$$

Ergo $(a+x)^m$ et $(a-x)^{-m}$ habent omnes terminos positivos; $(a-x)^m$ et $(a+x)^{-m}$ habent eos terminos *negativos*, ubi Exponens ipsius y est numerus *impar*; sed *positivos*, ubi est numerus *par*.

Possumus etiam Seriebus hanc dare formam:

$$3.\ (a\pm x)^m = a^m \pm m a^{m-1}x + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2 \pm \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}x^3$$

$$4.\ (a\pm x)^{-m} = \frac{1}{a^m} \mp \frac{mx}{a^{m+1}} + \frac{m.(m+1)}{1.2}\frac{x^2}{a^{m+2}} \mp \frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3}\frac{x^3}{a^{m+3}}$$

$$5.\ (a\pm x)^m = a^m \pm \underset{A}{\underline{\frac{m.a^{m-1}}{1}}}x + \underset{B}{\underline{\frac{m-1}{2a}}}Ax^2 \pm \underset{C}{\underline{\frac{m-2}{3a}}}B.x^3 + \underset{D}{\underline{\frac{m-3}{4a}}}.C.x^4 \ldots$$

$$6.\ (a\pm x)^{-m} = \underset{A}{\underline{\frac{1}{a^m}}} \mp \underset{B}{\underline{\frac{m}{a^{m+1}}}}x + \underset{}{\frac{m+1}{2a}}A.x^2 \mp \underset{C}{\underline{\frac{m+2}{3a}}}Bx^3 + \underset{D}{\underline{\frac{m+3}{4a}}}.C.x^4 \ldots$$

In locum numerorum a et x quilibet numeri determinati et universales, sive compositi sive simplices, substitui possunt.

§. 352. *Coroll.* 6.

Sit $a+x = \frac{a}{1-p}$, ergo $1-p = \frac{a}{a+x}$ (§. 136.); vel $1 - \frac{a}{a+x} = p$

id est $\frac{x}{a+x} = p$. Unde (§. 143 et §. 346.).

$$7.\ (a+x)^m = a^m(1-p)^{-m} = a^m\left(1 + mp + \frac{m.(m+1)}{1.2}p^2 + \frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3}p^3\right.$$

$$8.\ (a+x)^{-m} = a^{-m}(1-p)^m = a^{-m}\left(1 - mp + \frac{m.(m-1)}{1.2}p^2 - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}p^3\right.$$

§. 353. *Animadv.*

Propter multiplicem usum Coefficientium Seriei Binomii $(1+x)^m$ et Fractionis $\frac{1}{(1+x)^m}$ Tabulas eorum exhibuimus, ubi designavimus, quanti sint, si

TABU —2) x^3 . . . e ad $m = 30$.

Expon fficientium si

m	1a5	16	17
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14	2 1		
15	5 15	1	
16	1 1 120	16	1
17	2 4 680	136	17
18	4 8 3060	816	153
19	9 1 1628	3876	969
20	16 3 8760	1 5504	4845
21	29 1 6280	5 4264	2 0349
22	49 1 9770	17 0544	7 4613
23	81 1 7190	49 0314	24 5157
24	130 7 1256	130 7504	73 5471
25	204 5 7400	326 8760	204 2975
26	312 5 7700	772 6160	531 1735
27	468 5 8300	1738 3860	1303 7895
28	690 1 6600	3744 2160	3042 1755
29	1001 5 8760	7755 8760	6786 3915
30	1430 2 2675	15511 7520	14542 2675.
$m-7)$	$\frac{m.(m-1) \ldots (m-13)}{1.2. \ldots 14}$	$\frac{m.(m-1) \ldots (m-14)}{1.2 \ldots 15}$	$\frac{m.(m-1) \ldots (m-15)}{1.2 \ldots 16}$

usque ad $m = 60$.

14
2 0625 3075
3 4737 3600
5 7316 6440
9 2798 3760
14 7633 7800
23 1078 9600
35 6246 7300
54 1495 0296
81 2242 5444
120 3322 2880
176 2007 6360
255 1873 1280
365 7684 8168
519 1552 6432
730 0620 9045
1017 6623 0790
1406 7684 8445
1929 2824 9296
2625 9678 3764
3548 6051 8600
4762 6016 9700
6350 1355 9600
8413 9296 6470
11081 7610 2180
14511 8299 0950
18899 1273 2400
24482 9603 9700
31555 8156 2280
40473 7635 1620
51668 6342 7600.
$\frac{m.(m-1)\ldots(m-12)}{1.2\ldots13}$

TABULA IV. Coefficientes Seriei infinitae .

Exponens *m*	1	2	3	4
31	1	31	496	5456
32	1	32	528	5984
33	1	33	561	6545
34	1	34	595	7140
35	1	35	630	7770
36	1	36	666	8436
37	1	37	703	9139
38	1	38	741	9880
39	1	39	780	10660
40	1	40	820	11480
41	1	41	861	12341
42	1	42	903	13244
43	1	43	946	14190
44	1	44	990	15180
45	1	45	1035	16215
46	1	46	1081	17296
47	1	47	1128	18424
48	1	48	1176	19600
49	1	49	1225	20825
50	1	50	1275	22100
51	1	51	1326	23426
52	1	52	1378	24804
53	1	53	1431	26235
54	1	54	1485	27720
55	1	55	1540	29260
56	1	56	1596	30856
57	1	57	1653	32509
58	1	58	1711	34220
59	1	59	1770	35990
60	1	60	1830	37820
	1	*m*	$\frac{m.(m-1)}{1.2}$	$\frac{m.(m-1)\ldots(m-2)}{1.2.3}$

$\frac{(m+(p-2))}{\cdot\,(p-1)} x^{p-1},$

11

8 4766 0528
11 2109 9408
14 7144 2973
19 1733 4783
24 8125 6778
31 9018 7286
40 7635 0421
51 7806 6751
65 4071 5896
82 1782 2536
102 7227 8170
127 7771 1870
158 2002 4220
194 9909 9620
239 3071 3170
292 4864 9430
356 0705 1480
431 8301 9880
521 7948 2355
628 2835 6305
753 9402 7566
901 7717 0226
1075 1893 3731
1278 0552 5001
1514 7321 4816
1790 1379 9328
2109 8054 9208
2479 9468 0648
2907 5238 4208
3400 3244 9328.

$\frac{m.(m-1)\ldots(m-9)}{1.2\ldots.10}$

si m deinceps ponitur 0, 1, 2, 3, 4, 5 .... Prima Tabula indicat omnes Coefficientes Seriei Binomii $(1+x)^m$, ab $m=0$ usque ad $m=30$, quoniam post terminum medium, atque post duos terminos aequales iidem redeunt numeri. Secunda Tabula designat ejusdem Seriei 14 priores et 14 posteriores Coefficientes ab $m=31$ usque ad $m=60$. Tertia et quarta Tabula exhibent Coefficientes Seriei Fractionis $\frac{1}{(1+x)^m}$ ab $m=0$ usque ad $m=30$; prior *quatuordecim*, posterior *undecim* priores Coefficientes.

Hae Tabulae nobis abundanter praebent exempla ad illustranda Theoremata et Problemata, quae ad hos Coefficientes referuntur.

Numeri ipsi additione reperiuntur, ita ut Series Arithmetica $m-1$ timi ordinis constet ex Coefficientibus Potestatis $(1-x)^{-m}$, atque $p$timus Coefficiens sit Summa m terminorum Seriei Arithmeticae $p-2$ ordinis (§. 346.). Veluti Series Arithmetica

primi ordinis est $1+2+3+4\ldots+m=\frac{m.(m+1)}{1.2}$.

secundi .... $1+3+6+10\ldots+\frac{m.(m+1)}{1.2}=\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3}$.

tertii ... $1+4+10+20\ldots+\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3}=\frac{m.(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}$

quarti .... $1+5+15+35\ldots+\frac{m\ldots(m+3)}{1.2.3.4}=\frac{m\ldots(m+4)}{1.2.3.4.5}$.

quinti .... $1+6+21+56\ldots+\frac{m\ldots(m+4)}{1.2.3.4.5}=\frac{m\ldots(m+5)}{1.2.3.4.5.6}$.

$n-1$

$n-1$ timi ordinis: $1+n+\frac{n.(n+1)}{1.2}+\frac{n.(n+1)(n+2)}{1.2.3}+\frac{n\ldots(n+3)}{1.2.3.4}\ldots$

$$+\frac{m.(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots n-1}=\frac{m.(m+1)\ldots(m+n-1)}{1.2.3\ldots n}.$$

§. 354. *Coroll. 7.*

Ergo si $\frac{N}{(1-x)^{m+1}}$, ubi N non continet Factorem $1-x$, convertitur in Seriem, Coefficientes sunt termini Seriei Arithmeticae m ordinis, cujus $m$timae Differentiae aequales sunt. Quales autem sint Differentiae, id definitur per N et m, ut;

1. $\frac{1+px}{(1-x)^2}=1+(p+2)x+(2p+3)x^2+(3p+4)x^3+(4p+5)x^4+\ldots$

Coefficientes formant *Seriem Arithmeticam primi ordinis*, ubi Differentia communis est $p+1$, ut;

$\frac{1+x}{(1-x)^2}=1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$; $\frac{1+2x}{(1-x)^2}=1+4x+7x^2+10x^3+\ldots$

2. $\frac{1+px}{(1-x)^3}=1+(p+3)x+(3p+6)x^2+(6p+10)x^3+(10p+15)x^4+\ldots$

Haec est Series Arithmetica secundi ordinis. Prima Differentia est $p+2$; secunda est $p+1$; ut

$\frac{1+2x}{(1-x)^3}=1+5x+12x^2+22x^3+35x^4+51x^5+\ldots$

3. $\frac{1+px+qx^2}{(1-x)^3}=1+(3+p)x+(6+3p+q)x^2+(10+6p+3q)x^3+(15+10p+6q)x^4+\ldots$

Haec Series a priore in eo solo differt, quod Differentia secunda est $p+q+1$, ut:

$\frac{1+x+x^2}{(1-x)^3}=1+4x+10x^2+19x^3+31x^4+46x^5+\ldots$

§. 356.

§. 355. *Coroll.* 8.

Possumus ita etiam reperire Series Fractionum formae $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2\ldots}{(1-x)^{m+1}}$, quarum Coefficientes sunt *m*timae Potestates numerorum naturalium, ut:

1. $\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^3}=1+2^2.x+3^2x^2+4^2x^3+5^2x^4+\ldots$

2. $\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}=1+2^3x+3^3x^2+4^3x^3+5^3x^4+\ldots$

3. $\frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}=1+2^4x+3^4x^2+4^4x^3+5^4x^4+\ldots$

4. $\frac{1+26x+66x^2+26x^3+x^4}{(1-x)^6}=1+2^5x+3^5x^2+4^5x^3+5^5x^4+\ldots$

5. $\frac{1+57x+302x^2+302x^3+57x^4+x^5}{(1-x)^7}=1+2^6x+3^6x^2+4^6x^3+5^6x^4+\ldots$

Ut illustrentur aliae proprietates Serierum Arithmeticarum majoris ordinis, proponantur nonnulla Problemata, quorum Solutio haurienda est ex Coefficientibus binominalibus, atque ex iis, quae indicata sunt §. 123. Termini Seriei fundamentalis sint $a, b, c, d, e, f\ldots$; primi termini primarum, secundarum ... *n*timarum Differentiarum sint $p', p'', p''', p^{IV}, p^{V}\ldots p^{N}$, qui etiam simpliciter primae, secundae, tertiae ... *n*timae Differentiae appellentur; secundi termini harum Differentiarum repraesententur literis $q', q'', q'''\ldots q^{N}$; tertii termini literis $r', r'', r'''\ldots r^{N}$ etc.

§. 357.

§. 356. *Problema.*

Ex data Serie qualibet numerorum $a, b, c, d \ldots$, reperire Seriem ntimarum Differentiarum.

Solutio.

Repraesententur termini Seriei $n$timarum Differentiarum per literas p^N, q^N, r^N, s^N etc. Hi termini reperiuntur ex §. 123. Est enim

$$p' = -(a-b) \qquad q' = -(b-c) \qquad r' = -(c-d)$$
$$p'' = a - 2b + c \qquad q'' = b - 2c + d \qquad r'' = c - 2d + e$$
$$p''' = -(a-3b+3c-d) \quad q''' = -(b-3c+3d-e) \quad r''' = -(c-3d+3e$$
$$p^{IV} = a-4b+6c-4d+e \quad q^{IV} = b-4c+6d-4e+f \quad r^{IV} = c-4d+6e-4f$$

et ita deinceps.

Ex quo universe sequitur, quoniam in his aequationibus Coefficientes numerorum $a, b, c, d, e \ldots$ sunt Coefficientes Seriei $(1+x)^n$,

$$p^N = \pm \left(a - nb + \frac{n.(n-1)}{1.2} c - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} d \ldots\right)$$

$$q^N = \pm \left(b - nc + \frac{n.(n-1)}{1.2} d - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} e \ldots\right)$$

$$r^N = \pm \left(c - nd + \frac{n.(n-1)}{1.2} e - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} f \ldots\right)$$

et ita aliae Differentiae.

Signum — usurpatur si n est numerus impar. Quilibet terminus efficitur $n+1$ terminis consequentibus Seriei fundamentalis. Si Series fundamentalis est Arithmetica $n$timi ordinis, $p^{N+1} = o$, id est $n+1$ timae Differentiae evanescunt; ergo $p^N, = q^N, = r^N$ caet.; quare si $p'' = o$, erit $c = 2b - a$; si $p''' = o$, erit $d = a - 3b + c$; si p^{IV} erit $= o$, erit $e = -(a - 4b + 6c - 4d)$, etc.

§. 358.

§. 357. *Problema.*

Ex datis $n+1$ *prioribus terminis Seriei* ntimi *ordinis reliquos reperire terminos.*

Solutio.

Ex Solutione praecedentis Problematis sequitur, si t est $n+1$ terminus, u terminus $n+2$, v terminus $n+3$, etc., esse

$$u = \pm\left(a - (n+1)b + \frac{(n+1)n}{1.2}c - \frac{\overline{n+1}.n.\overline{n-1}}{1.2.3}d \ldots \pm (n+1)t\right)$$

$$v = \pm\left(b - (n+1)c + \frac{\overline{n+1}.n.}{1.2}d - \frac{\overline{n+1}.n.\overline{n-1}}{1.\ldots 3}e \ldots \pm (n+1)u\right)$$

etc.

Velut dati sint termini 1, 4, 10, 20 Seriei cujus tertiae Differentiae sunt aequales, erit $n=3$, $a=1$, $b=4$, $c=10$, $t=20$; quintus terminus $= -\left(1 - 4.4 + \frac{4.3}{1.2}\,10 - 4.20\right) = 35$.

§. 358. *Problema.*

Reperire mtimum *terminum Seriei Arithmeticae cujusque ordinis, atque Summam* m *terminorum, si cognita sunt primus terminus, atque Differentiae.*

Solutio.

Secundum §. 123, est

$$a = a$$
$$b = a + p'$$
$$c = a + 2p' + p''$$
$$d = a + 3p' + 3p'' + p'''$$
$$e = a + 4p' + 6p'' + 4p''' + p^{IV}$$
$$f = a + 5p' + 10p'' + 10p''' + 5p^{IV} + p^{V}.$$

Er-

Ergo universe, si $m$timus terminus est t, erit

$$1.\quad t = a + (m-1)p' + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}p'' + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}p''' + \dots$$

Haec Series consistit ex $n+1$ terminis, si est $n$timi ordinis, atque m non est minor quam $n+1$.

Ergo, si T est $m+1$ terminus, erit

$$2.\quad T = a + mp' + \frac{m.(m-1)}{1 \cdot 2}p'' + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}p''' + \dots$$

Ut S sive Summa m terminorum reperiatur, est (§. 123.)

$$a = a$$
$$a+b = 2a+p'$$
$$a+b+c = 3a+3p'+p''$$
$$a+b+c+d = 4a+6p'+4p''+p'''$$
$$a+b+c+d+e = 5a+10p'+10p''+5p'''+p^{IV}$$
$$a+b+c+d+e+f = 6a+15p'+20p''+15p'''+6p^{IV}+p$$

cae

Ex quo colligitur:

$$3.\quad S = ma + \frac{m.(m-1)}{1 \cdot 2}p' + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}p'' + \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

Quae formulae ad calculum aptiores redduntur eo modo, qui expositus est §. 347. 3. §. 350. §. 351. 5 et 6.

§. 359. *Coroll.* 1.

Hae aequationes sunt universales, atque valent, qualiscunque sit Series numerorum, sed parum prosunt, nisi tandem pervenitur ad Differentiam aequalem. Si autem $n$timae Differentiae sunt aequales, $n+1$ timae Differentiae evanescunt (§. 356.):

si

(si $p^N = q^N = r^N$ caet., erit $p^{N+1} = q^{N+1} = o$), atque t, sive ultimus, terminus definitur $n+1$ terminis, si m non est minor quam $n+1$, (§. 358.); quorum postremus est $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n} p^n$. Summa etiam definitur $n+1$ terminis, ex quibus postremus est $\frac{m.(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n+1} p^n$; velut, si $p''' = o$, erit $t = a + (m-1)p' + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} p''$, atque $S = ma + \frac{m.(m-1)}{1 \cdot 2} p' + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p''$.

§. 360. Coroll. 2.

Si inter se comparamus aequationes, quibus t, T et S exprimuntur, magna cernitur convenientia. Ita aequatio, qua exhibetur T sive $m+1$ terminus, mutatur in aequationem Summae m terminorum, si pro $a, p', p'', p''', p^{IV} \ldots$ ponitur $o, a, p', p'', p''' \ldots$.

§. 361. Coroll. 3.

Sit $a = 10$, $p' = 4$, $p'' = 3$ et $p''' = 2$. Quaeritur Series et Summa. Ex aequatione prima §. 358. invenimus:

Si $m = 1$, $t = 10$
.. $m = 2$, $t = 10 + 4 = 14$
.. $m = 3$, $t = 10 + 8 + 3 = 21$
.. $m = 4$, $t = 10 + 12 + 9 + 2 = 33$.

Ex hisce tribus prioribus terminis, reliqui termini Additione reperiuntur (§. 123. p. 121.), ut:

10	14	21	33	52	80
4	7	12	19	28	39
3	5	7	9	11	13
2	2	2	2	2	2.

Sed in Seriei terminis definiendis etiam regredi possumus, id est, reperire possumus terminos, qui primo termino 10 antecedunt:

Sit $m =$	6;	5;	4;	3;	2;	1;	0;	—1;	—2;	—3;	—4;	—5
Series est	80;	52;	33;	21;	14;	10;	7;	3;	—4;	—16;	—35;	—63
Primae Different.	39;	28;	19;	12;	7;	4;	3;	4;	7;	12;	19;	28
Secundae	13;	11;	9;	7;	5;	3;	1;	—1;	—3;	—5;	—7;	—9
Tertiae	2;	2;	2;	2;	2;	2;	2;	2;	2;	2;	2;	2

Quare etiam $m$timum terminum ante primum reperire possumus, per primam aequationem §. 358, ponendo m negativum, ita tamen, ut $m = 0$ indicet primum, $m = 1$ secundum terminum ante primum. Ergo ponendum est $m + 1$ in locum ipsius m. Tum prodit:

$$t = a - mp' + \frac{m.(m+1)}{1.2} p'' - \frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3} p''' + \frac{m..(m+3)}{1.2.3.4} p^{IV} -$$

Quare, si $m = 3$, erit $t = 10 - 12 + 18 - 20 = -4$.

§. 362. *Coroll.* 4.

Ut t et S exprimantur per Series, quarum termini secundum Potestates ipsius m progrediantur, primum Multiplicatione evolvenda sunt Producta $m.(m-1)$, $m.(m-1)(m-2)$ etc. in aequationibus §. 358. Tum prodeunt Series:

$$(1)\ t = a + (m-1)p' + \left(\frac{m^2 - 3m + 2}{1 . 2}\right)p'' + \left(\frac{m^3 - 6m^2 + 11m - 6}{1 . 2 . 3}\right)p'''$$

$$+ \frac{(m^4 - 10m^3 + 35m^2 - 50m + 24)}{1 . 2 . 3 . 4}p^{iv}$$

$$+ \left(\frac{m^5 - 15m^4 + 85m^3 - 225m^2 + 274m - 120}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}\right)p^{v}$$

$$+ \left(\frac{m^6 - 21m^5 + 175m^4 - 735m^3 + 1624m^2 - 1764m + 720}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}\right)p^{vi} + \ldots .$$

$$(2)\ S = ma + \left(\frac{m^2 - m}{1 . 2}\right)p' + \left(\frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{1 . 2 . 3}\right)p''$$

$$+ \left(\frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m}{1 . 2 . 3 . 4}\right)p'''$$

$$+ \left(\frac{m^5 - 10m^4 + 35m^3 - 50m^2 + 24m}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}\right)p^{iv}$$

$$+ \left(\frac{m^6 - 15m^5 + 85m^4 - 225m^3 + 274m^2 - 120m}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}\right)p^{v}$$

$$+ \left(\frac{m^7 - 21m^6 + 175m^5 - 735m^4 + 1624m^3 - 1764m^2 + 720m}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}\right)p^{vi} \ldots .$$

§. 363. *Coroll.* 5.

Ex his colligitur, $m$timum terminum ita designari:

(1) Si $p' = o$, erit $t = a$.

(2) Si $p'' = o$, erit $t = a - p' + p'm$.

(3) Si $p''' = o$, erit $t = (a - p' + p'') + \left(p' - \frac{3p''}{2}\right)m + \frac{p''}{2}m^2$.

(4) Si $p^{iv} = o$, erit $t = (a - p' + p'' - p''') + \left(p' - \frac{3}{2}p'' + \frac{11}{6}p'''\right)m$

$$+ \left(\frac{p''}{2} - p'''\right)m^2 + \frac{p'''}{6}m^3.$$

(5) Si $p^{V} = o$, erit $t = (a - p' + p'' - p''' + p^{IV}) + \left(p' - \frac{3p''}{2} + \frac{11p'''}{6} - \right.$

$+ \left(\frac{p''}{2} - p''' + \frac{35p^{IV}}{24}\right)m^2 + \left(\frac{p'''}{6} - \frac{5p^{IV}}{12}\right)m^3 + \frac{p^{IV}}{24}m^4.$

(6) Si $p^{VI} = o$, erit $t = (a - p' + p'' - p''' + p^{IV} - p^{V})$

$+ \left(p' - \frac{3p''}{2} + \frac{11p'''}{6} - \frac{25p^{IV}}{12} + \frac{137p^{V}}{60}\right)m + \left(\frac{p''}{2} - p''' + \frac{35p^{IV}}{24} - \right.$

$+ \left(\frac{p'''}{6} - \frac{5p^{IV}}{12} + \frac{17p^{V}}{24}\right)m^3 + \left(\frac{p^{IV}}{24} - \frac{p^{V}}{8}\right)m^4 + \frac{p^{V}}{120} . m^5$

(7) Si $p^{VII} = o$, erit $t = (a - p' \ldots + p^{VI}) + \left(p' \ldots - \frac{49p^{VI}}{20}\right)m$

$+ \left(\frac{p''}{2} \ldots + \frac{203p^{VI}}{90}\right)m^2 + \left(\frac{p'''}{6} \ldots - \frac{49p^{VI}}{48}\right)m^3 + \left(\frac{p^{IV}}{24} \ldots + \frac{35p^{VI}}{144}\right.$

$+ \left(\frac{p^{V}}{120} - \frac{7p^{VI}}{240}\right)m^5 + \frac{p^{VI}}{720} m^6$; et ita deinceps.

Ex quibus patet, si $p^{N+1} = o$, id est, si ultimae Differentiae aequales sunt, primum terminum Seriei, quae exprimit t, atque progreditur secundum Potestates ipsius m, esse $a - p' + p'' - p''' \ldots \pm p^{N}$, atque postremum terminum $\frac{p^{N} m^{n}}{1 . 2 . 3 \ldots n}$.

§. 364. *Coroll.* 6.

Summa m terminorum his formulis designatur;

(1) Si $p' = o$, erit $S = am$.

(2) Si $p'' = o$, erit $S = \left(a - \frac{p'}{2}\right) m + \frac{p'}{2} m^2$.

(3) Si $p''' = o$, erit $S = \left(a - \frac{p'}{2} + \frac{p''}{3}\right) m + \left(\frac{p'}{2} - \frac{p''}{2}\right)m^2 + \frac{p''}{6} m^3$.

4) Si $p^{IV}=o$, erit $S=\left(a-\frac{p'}{2}+\frac{p''}{3}-\frac{p'''}{4}\right)m+\left(\frac{p'}{2}-\frac{p''}{2}+\frac{11p'''}{24}\right)m^2$
$+\left(\frac{p''}{6}-\frac{p'''}{4}\right)m^3+\frac{p'''}{24}m^4$.

5) Si $p^{V}=o$, erit $S=\left(a-\frac{p'}{2}+\frac{p''}{3}-\frac{p'''}{4}+\frac{p^{IV}}{5}\right)m$
$+\left(\frac{p'}{2}-\frac{p''}{2}+\frac{11p'''}{24}-\frac{5p^{IV}}{12}\right)m^2+\left(\frac{p''}{6}-\frac{p'''}{4}+\frac{7}{24}p^{IV}\right)m^3$
$+\left(\frac{p'''}{24}-\frac{p^{IV}}{12}\right)m^4+\frac{p^{IV}}{120}m^5$.

6) Si $p^{VI}=o$, erit $S=\left(a-\frac{p'}{2}+\frac{p''}{3}-\frac{p'''}{4}+\frac{p^{IV}}{5}-\frac{p^{V}}{6}\right)$
$+\left(\frac{p'}{2}-\frac{p''}{2}+\frac{11p'''}{24}-\frac{5p^{IV}}{12}+\frac{137p^{V}}{360}\right)m^2+\left(\frac{p''}{6}-\frac{p'''}{4}+\frac{7p^{IV}}{24}-\frac{5p^{V}}{16}\right)$
$+\left(\frac{p'''}{24}-\frac{p^{IV}}{12}+\frac{17p^{V}}{144}\right)m^4+\left(\frac{p^{IV}}{120}-\frac{p^{V}}{48}\right)m^5+\frac{p^{V}m^6}{720}$.

7) Si $p^{VII}=o$, erit $S=\left(a\ldots+\frac{p^{VI}}{7}\right)m+\left(\frac{p'}{2}\ldots-\frac{7p^{VI}}{20}\right)m^2$
$+\left(\frac{p''}{6}\ldots+\frac{29p^{VI}}{90}\right)m^3+\left(\frac{p'''}{24}\ldots-\frac{7p^{VI}}{48}\right)m^4+\left(\frac{p^{IV}}{120}-\frac{p^{V}}{48}+\frac{5p^{VI}}{144}\right)m^5$
$+\left(\frac{p^{V}}{720}-\frac{p^{VI}}{240}\right)m^6+\frac{p^{VI}}{5040}m^7$.

Ex quibus patet, si $p^{N+1}=o$, vel si $n$timae Differentiae aequales sunt, primum terminum Seriei, juxta Potestates ipsius m progredientis, qua exprimitur Summa m terminorum, esse
$\left(a-\frac{p'}{2}+\frac{p''}{3}-\frac{p'''}{4}\ldots+\frac{p^{N}}{n+1}\right)m$, atque postremum terminum $\frac{p^{N}\cdot m^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n+1)}$.

§. 365.

§. 365. *Coroll. 7. Usus harum aequationum in Serie Arithmetica primi ordinis.*

In Serie Arithmetica primi ordinis $p''=o$, ergo

(1) $t=a-p'+p'm=a+(m-1)p'$ (§. 363. 2.)

(2) $S=\left(a-\frac{p'}{2}\right)m+\frac{p'}{2}m^2=\left(\frac{2a+(m-1)p'}{2}\right)m$ (§. 364. 2.);

quod convenit cum iis, quae exposita sunt §. 221. N°. 1. 3., si ibi ponimus p' in locum d.

§. 366. *Coroll. 8. Usus earum in Serie Arithmetica secundi ordinis.*

Sit proposita Series Arithmetica secundi ordinis: a, $2a+d$, $3a+3d$, $4a+6d$, $5a+10d$, ... Ergo $p'=a+d$, $p''=d$, $p'''=o$, ex quo reperitur per aequationem §. 363. 3. et §. 364. 3.

(1) $t=\frac{m}{2}(2a-d+md)=\frac{m}{2}(2a+(m-1).d)$

(2) $S=\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}d\right)m+\frac{am^2}{2}+\frac{d}{6}m^3=\frac{m}{6}\left(3a-d+3am+dm^2\right)$

$=\frac{m.(m+1)}{1.2.3}(3a+(m-1).d)$

Proposita sit Series: $S=a+2(a+1)+3(a+2)+4(a+3)\ldots$; ergo $p'=a+2$, $p''=2$, $p'''=o$; unde reperitur eodem modo $t=m(a+m-1)$

$S=\frac{m.(m+1)}{1.2}a+\frac{(m-1)m.(m+1)}{3}$.

§. 367. *Coroll. 9. De numeris Polygonalibus.*

Id nos conducit ad *numeros Polygonales*. Sit enim in

in Serie Arithmetica secundi ordinis $a = 1$, ita ut Series sit: $1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d \ldots$; unde $p' = 1+d$; $p'' = d$, atque

$$(1)\ t = \frac{m}{1.2}(2+(m-1).d).$$

$$(2)\ S = \frac{m.(m+1)}{1.2.3}(3+(m-1)d).$$

Si deinceps ponitur $d = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ oriuntur Series numerorum, qui dicuntur *Polygonales*, ut

$=1$, Series est $1+3+6+10+15+21\ldots+\frac{m.(m+1)}{1.2} = \frac{m.(m+1)(m+}{1.2.3}$

$=2$, ... $1+4+9+16+25+36\ldots+m^2 = \frac{m.(m+1)(2m}{1.2.3}$

$=3$, ... $1+5+12+22+35+51\ldots+\frac{m.(3m-1)}{1.2} = \frac{m^2.(m+1)}{1.2}$.

$=4$, ... $1+6+15+28+45+66\ldots+m.(2m-1) = \frac{m.(m+1)(4m}{1.2.3}$

$=5$, ... $1+7+18+34+55+81\ldots+\frac{m.(5m-3)}{1.2} = \frac{m.(m+1)(5m}{1.2.3}$

$=6$, ... $1+8+21+40+65+96\ldots+m.(3m-2) = \frac{m.(m+1)(2m}{1.2}$

$=7$, ... $1+9+24+46+75+111\ldots+\frac{m.(7m-5)}{2} = \frac{m.(m+1)(7m}{1.2.3}$

$=8$, ... $1+10+27+52+85+126\ldots+m.(4m-3) = \frac{m.(m+1)(8m}{1.2.3}$

$=9$, ... $1+11+30+58+95+141\ldots+\frac{m.(9m-7)}{1.2} = \frac{m.(m+1)(3m}{1.2}$

Numeri primae Seriei $1, 3, 6, 10 \ldots$ vocantur *Triangulares*, quoniam, si ipsorum unitates punctis vel circulis designantur, hae unitates ita collocari possunt, ut formam *Trianguli aequilateri* reprae-

praesentent. Eadem ratione numeri reliquarum Serierum dicuntur *Quadrangulares*, *Pentagonales*, *Hexagonales*, caet., quoniam unitates ita collocari possunt, ut speciem exhibeant horum *Polygonorum regularium*.

§. 368. *Coroll.* 10. *Usus earum in Serie Arithmetica tertii ordinis.*

Si formantur Series, quarum termini sunt *Summae numerorum Polygonalium*, hae sunt *Series Arithmeticae tertii ordinis*; earumque termini dicuntur numeri *Pyramidales*, quoniam ipsarum unitates ita collocari possunt, ut speciem *Pyramidis* repraesentent. Forma universalis harum Serierum est: $1, 3+d, 6+4d, 10+10d, 15+20d$.

Primae Differentiae	$2+d$	$3+3d$	$4+6d$	$5+10d$.
Secundae . . .		$1+2d$	$1+3d$	$1+4d$.
Tertiae . . .			d,	d.

ergo $p'=2+d$; $p''=1+2d$; $p'''=d$; $p^{IV}=0$; quibus positis in Aequationibus §. 363. 4. et §. 364. 4. prodit:

$$t=\frac{m.(m+1)}{1.2.3}(3+(m-1).d),$$ quae §. 367. indicat Summam numerorum Polygonalium.

$$S=\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3.4}(4+(m-1).d).$$ Quare si deinceps ponimus $d=1, 2, 3, 4, 5 \dots$ prodit:

$d=1$,

1, $S = 1+4+10 \ldots + \frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3} = \frac{m.(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}$

2, $S = 1+5+14 \ldots + \frac{m.(m+1)(2m+1)}{1.2.3} = \frac{m.(m+1)^2(m+2)}{3.4}$.

3, $S = 1+6+18 \ldots + \frac{m^2.(m+1)}{1.2} = \frac{m.(m+1)(m+2)(3m+1)}{1.2.3.4}$

4, $S = 1+7+22 \ldots + \frac{m.(m+1)(4m-1)}{1.2.3} = \frac{m^2.(m+1)(m+2)}{1.2.3}$.

5, $S = 1+8+26 \ldots + \frac{m.(m+1)(5m-2)}{1.2.3} = \frac{m.(m+1)(m+2)(5m-1)}{1.2.3.4}$

6, $S = 1+9+30 \ldots + \frac{m.(m+1)(2m-1)}{1.2} = \frac{m.(m+1)(m+2)(3m-1)}{3.4}$

7, $S = 1+10+34 \ldots + \frac{m.(m+1)(7m-4)}{1.2.3} = \frac{m.(m+1)(m+2)(7m-3)}{1.2.3.4}$

8, $S = 1+11+38 \ldots + \frac{m(m+1)(8m-5)}{1.2.3} = \frac{m.(m+1)(m+2)(2m-1)}{1.2.3}$

9, $S = 1+12+42 \ldots + \frac{m.(m+1)(3m-2)}{1.2} = \frac{m.(m+1)(m+2)(9m-5)}{1.2.3.4}$

Ita hac via progredi possumus ad novas Series constituendas, quarum termini sunt Summae harum Serierum. Quae res, cum nullam pariat difficultatem, non opus est hoc loco uberius exponatur. Sed attingatur locus de reperiunda Summa Seriei: $1^n, 2^n, 3^n, 4^n, 5^n \ldots$; de quo in sequentibus.

§. 369. *Coroll.* II.

Terminum generalem et Summam Seriei Arithmeticae $n$timi ordinis, ita exprimere possumus:

$$(1)\ t = \alpha + \beta m + \gamma m^2 + \delta m^3 + \varepsilon m^4 \ldots + \frac{p^N m^n}{1.2.3.4 \ldots n}.$$

$$(2)\ S = \alpha' m + \beta' m^2 + \gamma' m^3 + \delta' m^4 \ldots + \frac{p^N m^{n+1}}{1.2.3.4 \ldots (n+1)}$$

(§. 363. §. 364.

Hos Coefficientes $\alpha, \beta, \gamma \ldots \alpha', \beta', \gamma'$ ad libitum sumendo, quaslibet Series Arithmeticas constituere possumus.

Sit v. c. $\gamma = \delta = 1$, atque reliqui omnes Coefficientes sint $= 0$. Tum erit $t = m^2 + m^3$, atque, si m deinceps ponitur 1, 2, 3, 4, 5 ..., prodit Series tertii ordinis 2, 12, 36, 80, 150 ... ubi $p' = 10$; $p'' = 14$; $p''' = 6$; $p^{IV} = 0$; atque $S = \frac{m}{12}\ (3m^3 + (5m + 2)(2m + 1))$.

Quoniam $\delta = 1$, atque Coefficientes consequentes evanescunt, erit $\delta = 1 = \frac{p'''}{1.2.3}$, vel $p''' = 1.2.3 = 6$.

§. 370. *Coroll.* 12.

Proponatur Aequatio $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots + px^n = y$.

Si in hac Aequatione deinceps ponitur $x = 0$, 1, 2, 3, 4 ... diversi valores ipsius y, qui ita prodeunt, constituunt Seriem arithmeticam $n$timi ordinis, cujus terminus generalis, atque Summa m terminorum reperiri potest ex §. 358., veluti:

1\. Si ponitur $y = a + bx$, Series est primi ordinis, a, $a+b$, $a+2b$ ..., ergo $t = a + (m-1)b$, atque $S = m.\left(a + \frac{(m-1)}{2}b\right.$

2. Si ponitur $y = a + bx + cx^2$, Series est secundi ordinis $a, a+b+c, a+2b+4c, a+3b+9c$ etc., ergo $t = a + (m-1)b + (m-1)^2 c$, atque $S = ma + \frac{m.(m-1)}{1.2} b + \frac{m.(m-1)(2m-1)}{1.2.3} c$.

3. Si $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, Series est tertii ordinis, $a, a+b+c+d, a+2b+4c+8d, a+3b+9c+27d$ etc.; ergo $t = a + (m-1)b + (m-1)^2 c + (m-1)^3 d$; $S = ma + \frac{m.(m-1)}{1.2} b + \frac{m.(m-1)(2m-1)}{1.2.3} c + \frac{m^2 (m-1)^2 d}{4}$.

4. Si $y = 4 + 2x + 3x^2$, Series est $4, 9, 20, 37, 60 \ldots$ $t = 3m^2 - 4m + 5$, $S = \frac{2m^3 - m^2 + 7m}{2}$.

5. Si $y = 1 + x + x^2$, Series est $1, 3, 7, 13, 21, 31, 43 \ldots$ $t = m^2 - m + 1$; $S = \frac{2m + m^3}{3}$.

6. Si $y = 1 + x + x^2 + x^3$; Series est $1, 4, 15, 40, 85 \ldots$, ergo $t = m^3 - 2m^2 + 2m$; $S = \frac{3m^4 - 2m^3 + 3m^2 + 8m}{3 . 4}$, (conf. §. 361.).

§. 371. *Coroll.* 13. *De reperiunda Summa Seriei Potestatum numerorum naturalium.*

Quae dicta sunt §. 369. nobis ostendunt viam, qua reperiri potest Summa ejus Seriei, cujus termini sunt Potestates numerorum naturalium; de qua dictum est p. 123; quae Summa hac forma universali repraesentatur:

$S = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + \ldots + m^n$ ubi n est numerus integer positivus.

Evanescant enim omnes Coefficientes Seriei §. 369. 1. praeter ultimum, qui sit $= 1$; unde oritur ipsa Series

ries $1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots m^n$, cujus ultima, id est $n$tima Differentia, est $1.2.3.4\ldots n$. Ita universe demonstratum est, quod §. 123. imperfecta quadam inductione conclusimus.

§. 372. *Coroll.* 1.

Ut Summa m terminorum Seriei $1^n, 2^n, 3^n, 4^n \ldots$ reperiatur, quaerantur Differentiae $p', p'', p''', p^{IV} \ldots$ eodem modo ut fecimus §. 124. vel per Aequationes §. 356., atque in Aequationibus §. 364. ponantur. Ita inveniuntur Summae sequentes, ubi $S.m^n$ indicat Summam m terminorum Seriei $1^n, 2^n, 3^n \ldots m^n$.

§. 373. *Coroll.* 2.

Lex Progressionis ex Coefficientibus binominalibus est haurienda. Exponentes incipiunt ab $n+1$, atque in tribus prioribus terminis *unitate*, deinde autem *duabus unitatibus* decrescunt: ut $n+1, n, n-1, n-3, n-5, n-7 \ldots$ Numeri $\frac{1}{6}, -\frac{1}{30}, +\frac{1}{42}, , -\frac{1}{30} \ldots$, qui sunt termini extremi earum Serierum, in quibus Exponens est numerus *par*, ex eo reperiuntur, quod cujuslibet Seriei Summa Coefficientium debet esse $=1$. Si enim $m=1$, id est si primus solus adest terminus, Summa Seriei est $=1$. Aequationes enim sunt universales, adeo ut verae sint, quicunque sit numerus m, dummodo sit integer et positivus. Ergo

$\frac{1}{6}$

Inserendum est pag. 416.

$S.m = 1+2 \ldots$

$S.m^2 = 1+2^2 \ldots$

$S.m^3 = 1+2^3 \ldots$

$S.m^4 = 1+2^4 \ldots$

$S.m^5 = 1+2^5 \ldots$

$S.m^6 = 1+2^6 \ldots$

$S.m^7 = 1+2^7 \ldots$

$S.m^8 = 1+2^8 \ldots$

$S.m^9 = 1+2^9 \ldots$

$S.m^{10} = 1+2^{10} \ldots$

$S.m^{11} = 1+2^{11} \ldots$

$S.m^{12} = 1+2^{12} \ldots$

$S.m^{13} = 1+2^{13} \ldots$

$S.m^{14} = 1+2^{14} \ldots$

$S.m^{15} = 1+2^{15} \ldots$

$S.m^{16} = 1+2^{16} \ldots m^3 - \frac{3617}{510} m.$

$S.m^{17} = 1+2^{17} \ldots 5 m^4 - \frac{3617}{60} m^2.$

$S.m^{18} = 1+2^{18} \ldots 4 m^5 - \frac{3617}{10} m^3 + \frac{43867}{798} m.$

$S.m^{19} = 1+2^{19} \ldots 61 m^6 - \frac{68723}{40} m^4 + \frac{43867}{84} m^2.$

$S.m^{20} = 1+2^{20} \ldots 50 m^7 - \frac{68723}{10} m^5 + \frac{219335}{63} m^3 - \frac{174611}{330} m.$

$\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{30} = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$.

$\frac{1}{42} = 1 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$ caet.

Si hos numeros indicamus literis $A, B, C, D, E \dots$
Aequatio, quae universe definiat Summam, haec est.

$$S.m^n = 1 + 2^n + 3^n \dots + m^n = \frac{1}{n+1}.m^{n+1} + \frac{1}{2}.m^n + \frac{n}{2}A.m^{n-1}$$
$$+ \frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3.4}Bm^{n-3} + \frac{n.(n-1)\dots(n-4)}{2.3.4.5.6}Cm^{n-5}$$
$$+ \frac{n.(n-1)\dots(n-6)}{2.3\dots8}Dm^{n-7} + \frac{n.(n-1\dots(n-8)}{2.3\dots10}Em^{n-9}\dots$$

$$\text{aut } S.m^n = 1+2^n \dots + m^n = \frac{1}{(n+1)}m^{n+1} + \frac{1}{2}m^n + \alpha A.m^{n-1}$$
$$\beta B m^{n-3} + \gamma C m^{n-5} + \delta.D m^{n-7} + \varepsilon.E m^{n-9} + \dots$$

ubi $\alpha = \frac{n}{2}$; $\beta = \frac{(n-1)(n-2)}{3 . 4}\alpha$; $\gamma = \frac{(n-3)(n-4)}{5 . 6}\beta$;

$\delta = \frac{(n-5)(n-6)}{7 . 8}\gamma$; $\varepsilon = \frac{(n-7)(n-8)}{9 . 10}\delta$ etc.

Hi numeri sunt:

$A = +\frac{1}{6}$	$F = -\frac{691}{2730}$	$L = +\frac{854513}{138}$.
$B = -\frac{1}{30}$	$G = +\frac{7}{6}$	$M = -\frac{236364091}{2730}$.
$C = +\frac{1}{42}$	$H = -\frac{3617}{510}$	$N = +\frac{8553103}{6}$.
$D = -\frac{1}{30}$	$I = +\frac{43867}{798}$	$O = -\frac{23749461029}{870}$.
$E = +\frac{5}{66}$	$K = -\frac{174611}{330}$	$P = +\frac{8615841276005}{14322}$.

Di-

Dicuntur *numeri Bernouilliani*, ab ipsorum inventore Jacobo Bernouilli, qui eos primus exposuit in Tractatu inscripto: *Ars conjectandi* p. 97 seqq. Eulerus eorum descripsit naturam, inventionem et usum in *Commentariis Academiae Scientiarum Petropolitanae* T. VIII. 1737. in *Novis Commentariis* T. XIV. atque in *Calculo Differentiali* P. I. §. 122. (1)

§. 374. *Coroll.* 3.

Ejusdem generis sunt Series, quarum termini sunt $a^m, (a+b)^m, (a+2b)^m, (a+3b)^m \ldots (a+(m-1)b)^m$ de quibus dictum est §. 124. Summa harum Serierum reperitur ex §. 358. 3., si antea quaesitae fuerint Differentiae (§. 356.). Indicemus Summas per $S(a^2), S(a^3), S(a^4) \ldots S(a^m)$. Ita erit

1. $$S(a^2) = a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+(a+3b)^2 \ldots +(a+(m-1)b)^2$$
$$= ma^2+m.(m-1)ab+\frac{m.(m-1)(2m-1)}{1.2.3}b^2.$$

2. $$S(a^3) = a^3+(a+b)^3+(a+2b)^3+(a+3b)^3 \ldots +(a+(m-1)b)^3$$
$$= ma^3+\frac{3m.(m-1)}{1.2}a^2b+\frac{m.(m-1)(2m-1)}{1.2}ab^2$$
$$+\left(\frac{m.(m-1)}{2}\right)^2 b^3.$$

3. $$S(a^4) = a^4+(a+b)^4+(a+2b)^4 \ldots +(a+(m-1)b)^4$$
$$= ma^4+2m.(m-1)a^3b+m.(m-1)(2m-1)a^2b^2$$
$$+m^2.(m-1)^2ab^3+\frac{m(m-1)(2m-1)}{1.2.3.5}(3m^2-3m-1)b^4.$$

(1) Vide Klügel Math. Lexic. *Bernouillische Zahlen*, P. I. p. 253. atque P. IV. *Summirung der Reihen* p. 606 et seqq.

§. 375.

§. 375. *De interponendis terminis inter terminos Seriei. sive de interpolatione terminorum.*

Ut inter duos terminos Progresionis geometricae et arithmeticae alios, qui cum ipsis novam efficiant Progressionem (§. 213 et 227.) ita etiam in Serie arithmetica cujuslibet ordinis inter singulos duos terminos Seriem arithmeticam ejusdem ordinis interponere possumus.

Sit proposita Series secundi ordinis (§. 367) $1, 3, 6, 10 \ldots \frac{m.(m+1)}{1.2}$, atque inter 6 et 10 tres interponantur termini a, b, c. Series fit $6, a, b, c, 10$, ubi m est $3, 3\frac{1}{4}, 3\frac{2}{4}, 3\frac{3}{4}, 4$; $p' = 2$; $p'' = 1$; unde (§. 358. 1.) $a = \frac{221}{32}, b = \frac{252}{32}, c = \frac{285}{32}$. Primae Differentiae hujus Seriei interpositae sunt $\frac{29}{32}, \frac{31}{32}, \frac{33}{32}, \frac{35}{32}$; secundae Differentiae sunt $\frac{1}{16}$, atque tertiae evanescunt.

Ex his perspicitur lex generalis. *Si inter m et $m+1$ terminum alicujus Seriei Arithmeticae interponendi sunt $h-1$ termini, qui inter se atque cum his duobus terminis Seriem ejusdem ordinis efficiunt, l terminus atque Summa l terminorum reperiuntur, si in Aequationibus* §. 358. *pro m ponitur $m + \frac{l}{h}$.* Ergo in Serie proposita est:

$t = 1$

$$s = a + \left(m + \frac{l}{h} - 1\right)p' + \frac{\left(m + \frac{l}{h} - 1\right)\left(m + \frac{l}{h} - 2\right)p''}{1 \cdot 2} \ldots$$

$$S = \left(m + \frac{l}{h}\right)a + \frac{\left(m + \frac{l}{h}\right)\left(m + \frac{l}{h} - 1\right)p'}{1 \cdot 2}$$

$$+ \frac{\left(m + \frac{l}{h}\right)\left(m + \frac{l}{h} - 1\right)\left(m + \frac{l}{h} - 2\right)p''}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots$$

In exemplo proposito est $m = 3$, $a = 1$, $p' = 2$, $p'' = 1$, $h = 4$.

P. II. C. IV. SECTIO III.

De Seriebus recurrentibus Fractionum formae $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \pi x^\mu}{a + bx + cx^2 \ldots + px^m}$; de primis Fractionum notionibus, atque de partienda Functione fracta.

§. 376. *De Fractione $\frac{\alpha + \beta x \ldots + \pi x^\mu}{a + bx \ldots + px^m}$ simpliciore reddenda.*

Forma universalis Fractionis, cujus Numerator et Denominator constant ex terminis, qui secundum ordinem Potestatum ipsius x progrediuntur, est. $X = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \pi x^\mu}{a + bx + cx^3 \ldots + px^m}$. Antequam autem in Seriem convertitur, commode hoc modo simplicior reddi potest.

Ex Divisionis ratione patet, si $\mu > m$, posse priores

res Seriei terminos reperiri per Divisionem, ita ut Fractio, quae ex Divisione restet, sit hujus formae:

$X' = \frac{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 \ldots + \pi' x^{m-1}}{a + bx + cx^2 \ldots + px^m}$, in qua maximus Exponens ipsius x in Numeratore est unitate minor quam in Denominatore. Si X'' est Quotus ex ista Divisione, erit $X = X'' + X'$. Sed

$$X' = \frac{\frac{\alpha'}{a}\left(1 + \frac{\beta'}{\alpha'} x + \frac{\gamma'}{\alpha'} x^2 \ldots + \frac{\pi'}{\alpha'} x^{m-1}\right)}{1 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} x^2 \ldots + \frac{p}{a} x^m} = \frac{\alpha'}{a} X''',$$

si secundus Factor est X'''.

Quare ut X convertatur in Seriem, reperienda est methodus, qua in Seriem converti possit X' vel X'''; quae Fractiones, quia, quod ad formam, nihil attinet, quibus literis utamur, ita designari possunt:

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \pi x^{m-1}}{a + bx + cx \ \ldots + px^m} \text{ et } \frac{1 + \alpha x + \beta x^2 \ldots + \pi x^{m-1}}{1 + ax + bx^2 \ldots + px^m},$$

veluti $X = \frac{27 + 10x - 13x^2 - 6x^3}{4 - 3x} = 2x^2 + 7x + 6 + \frac{3}{4 - 3x}$

$$= 2x^2 + 7x + 6 + \frac{3}{4}\left(1 + \frac{3}{4} x + \left(\frac{3}{4} x\right)^2 + \left(\frac{3}{4} x\right)^3 \ldots\right)$$

ubi $X'' = 2x^2 + 7x + 6$; $\alpha = 3$, $a = 4$; $X' = \frac{3}{4 - 3x}$, atque

$X''' = 1 : \left(1 - \frac{3}{4} x\right)$.

§. 377. *Problema.*

Fractionem formae $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots + \pi x^{m-1}}{a + bx + cx^2 \ \ldots + px^m}$ convertere in Seriem per Divisionem.

 So-

Solutio.

Divisio instituitur secundum praecepta §. 156. 157.; quae dupliciter fieri potest, vel ita, ut primus Quotus sit $\frac{a}{a}$, vel ut sit $\frac{x}{px}$. Si priore Divisione utimur, Exponentes ipsius x crescunt; si posteriore, decrescunt, veluti:

$$\frac{x^8+7x^7+17x^6+20x^5+18x^4+12x^3+8x^2+4x+3}{x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1}$$

$$=x^3+3x^2+2x+1+\frac{x^4+x^3+x^2+x+2}{x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1}.$$

Ut Fractio, quae restet, in Seriem convertatur, ita Divisionem instituere possumus, ut primus Quotus sit $\frac{x^4}{x^5}=\frac{1}{x}$, vel ut sit $\frac{2}{1}=2$. Ergo

$$\frac{x^4+x^3+x^2+x+2}{x^5+4x^4\ldots+1}=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}-\frac{\left(32x+23+\frac{18}{x}+\frac{7}{x^2}+\frac{10}{x^3}\right)}{x^5+4x^4\ldots+1}.$$

$$\frac{2+x+x^2+x^3+x^4}{1+x+2x^2\ldots+x^5}=2-x-2x^2+x^3\left(\frac{-1+8x^2+9x^3+2x^4}{1+x+2x^2\ldots+x^5}\right).$$

At vero haec Divisio plerumque est longior et parum expedita, neque tam facile perspicitur lex Progressus Coefficientium. Methodus, ad hanc rem accommodatior, petenda est ex natura Functionum, de quibus jam facta est mentio in §. 113. Harum igitur natura hoc loco est explicanda.

§. 378. *Numeri variabiles, constantes, atque Functiones. Definitio.*

Aequatio, in qua sunt duo numeri incogniti, ut $5x-6y=14$ definit rationem inter hos duos in-

incognitos x et y. Etenim $x = \frac{6y + 14}{5}$, atque $y = \frac{5x - 14}{6}$. Quare alterutri eorum quemlibet valorem dare possumus, ex quo tum alterius valor definitur, velut: si y est 1, 2, 3, 4.., x est $\frac{20}{5}$, $\frac{26}{5}$, $\frac{32}{5}$, $\frac{38}{5}$. Ergo si valores ipsius y formant Progressionem numerorum naturalium, valores numeri x formant Progressionem Arithmeticam, cujus Differentia communis est $\frac{6}{5}$ (§. 216.). Quoniam igitur hac Aequatione definitur sola ratio inter hos numeros incognitos, quae semper eadem est, quantuscunque sit valor alterutrius, x et y *variabiles*, sed cogniti numeri 5, 6, 14, quibus haec definitur ratio, *constantes* dicuntur.

Idem dicendum est de Aequatione $ax = by + c$, ubi x et y sunt variabiles, quorum Ratio definitur, sed a, b, c, quibus definitur, sunt constantes. Variabiles igitur numeri *ultimis*, constantes *primis* Alphabeti literis designari solent. Alteruter variabilis numerus dicitur esse *Functio* alterius; quare x est Functio numeri y atque y est Functio numeri x. Si in Aequatione plures sunt, quam duo numeri variabiles, quilibet numerus Functio est reliquorum, ut $ax = by + cz + d$.

Haec notio Functionis late patet. Quaelibet enim expressio Arithmetica, quomodocunque composita ex uno vel pluribus numeris variabilibus et numeris constantibus, sive determinatis, sive universalibus est

est Functio unius aut plurium numerorum variabilium; velut y^m, ay^m, $(a+by)^m$, $(a+y)^{\frac{1}{3}}$ sunt Functiones ipsius y. Nam si $x=y^m$, $x'=ay^m$, $x''=(a+by)^m$, $x'''=a+y^{\frac{1}{3}}$ .., x, x', x'', x'''... has diversas indicant Functiones ejusdem variabilis y. Rursus numerorum x, x', x'', x''', Functiones sunt $y=x^{\frac{1}{m}}$; $y=\left(\frac{x'}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$; $y=\frac{(x'')^{\frac{1}{m}}-a}{b}$; $y=(x'''-a)^3$, etc. Si $y=(ax+bz+cxz)^m$, y est Functio duorum variabilium x et z.

Multa exempla Functionum reperiuntur in iis, quae tractavimus, velut a^x (§. 229.), $\frac{1}{p+(x-1)}$ (§. 258.); $\frac{a}{10^x-1}$ (§. 301.); $\frac{x^m-1}{x-1}$ (§. 330); $\frac{a}{a+bx}$ (§. 341.); $(a+x)^m$, $(1+x)^m$, $\frac{1}{(1+x)^m}$ §. 346. 348. aliaeque plures Functiones ipsius x.

Nomen Functionis primus usurpavit J. Bernouilli (Oper. T. II. p. 241.), hanc Definitionem exhibens: *Functio Quanti variabilis est Quantitas composita qualicunque modo ex hoc Quanto variabili et constantibus* (vid. etiam T. II. p. 582.)

§. 379. *Notatio Functionum.*

Functiones diversis modis notare solent Mathematici, Primum literis majusculis X, Y, Z notant Functiones numerorum x, y. z., atque etiam adhibent ad Functionem denotandam literis aliis majusculis, ut M, N, P. Praecipue autem usurpant lite-

literas ϕ, f, F, ψ, ita ut $\phi(x)$, $f(x)$, $F(x)$, $\psi(x)$ designent diversas Functiones ejusdem variabilis x. Functiones plurium variabilium ita indicantur $\phi(x, y, z)$, ut $\phi(x, y) = xy + ax^2 + by^2$, $\phi(x, y, z) = \frac{az + by + cx}{\sqrt{(bx + y^2)}}$.

§. 380. *Coroll.* 1.

Cum Functio sit semper variabilis, numeri $\frac{a^2+ax-ab-bx}{a+x} = a - b$; $x^0 = 1$; $1^x = 1$; atque alii ejusdem generis inter Functiones non sunt referendi.

§. 381. *Coroll.* 2.

Per se patet, esse etiam *Functiones Functionum*, vel esse $F(\phi.(x))$, velut: $\phi(x) = \text{Log.}\, x$, ergo $(\text{Log.}\, x)^m = F(\phi.(x))$. Prior Functio, id est Log. x, dicitur *immediata*, sed $(\text{Log.}\, x)^m$ *mediata* Functio ipsius x.

§. 382. *Diversa Functionum genera.*

Mathematici Functiones secundum diversa Divisionis fundamenta (Proleg. p. 151. 376—381.) in plura genera dividere solent, quorum praecipua haec sunt:

1. *Functio est Algebraica*, si variabilis numerus x in ejus expressione solius est formae x^m; ut $ax^4 + bx^3$, $x^{\frac{1}{3}} - by^4$; $(a + x)^{\frac{1}{m}}$ caet. Sed si est Logarithmus, vel Exponens, vel linea goniometrica, vel angulus, arcus, *Functio* dicitur *trans-*

scendens, ut $\phi(x) = \text{Log.}(a+x)$; $\phi(x) = x + \sin x$; $\phi(x) = a^x + b$.

2. *Functio Algebraica est mtimi gradus*, si in ejus expressione summa Potestas ipsius variabilis x est x^m, ut $y = ax^2 + bxy + cx$ est secundi gradus.

3. *Functio Algebraica est rationalis*, si variabilis numerus habet Exponentem integrum; sed si Exponens est fractus, dicitur *irrationalis*. Quare $x^{\frac{1}{3}}$, $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ sunt Functiones irrationales.

4. *Functio Algebraica est fracta*, si in ejus expressione variabilis est vel cum Exponente negativo, vel in Denominatore Fractionis. Si neutrum est, dicitur *integra*, ut $\frac{ax^2+bx}{cd}$ est integra, sed $\frac{a+bx}{c+dx}$ atque ax^{-m} sunt fractae. Si m est numerus integer positivus, $\frac{x^m-1}{x-1}$ est Functio integra, sed $\frac{x^{2m+1}+1}{x-1}$ est fracta (§. 128 et §. 330.).

5. *Functio Algebraica est uniformis*, quae, si variabilis numerus determinatum acquirit valorem, *unum* solum valorem; *biformis* autem, *triformis* ... *multiformis*, quae duos, tres et plures valores acquirit, ut $y = \phi(x) = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ est *biformis*, quoniam si $x = a$, erit $y = \pm a\sqrt{2}$.

6. *Functio Algebraica numeri x par* dicitur, in qua sunt solummodo Exponentes pares ipsius x. Haec eundem acquirit valorem, sive x sit positivus sive negativus: ut $\phi(x) = a^2 + x^2$ fit $2a^2$, si x fit $+a$ et si

si fit $= 0$. Habet hanc formam $a+bx^2+cx^4+dx^6 \ldots$ Si id non est, Functio est *impar*, ut $\phi(x) = a^3+x^3$. Si $x = +a$, Functio fit $2a^3$; si $x = -a$, Functio fit $= 0$.

7. *Functio est implicita*, si variabilis numerus cum Functione ipsa ita est conjuncta, ut Functio ab ipso separari nequeat, nisi ope Seriei infinitae; ut $xy^5 + x^2y = 4x^3y + x^4$. Si id non est, *explicita* est.

8. *Functio Algebraica est homogenea*, ubi Summa Exponentium variabilium numerorum in quolibet termino aequalis est, ut $ay^7 + by^3x^4 + \frac{cx^9}{ay^2} + \frac{ex^{10}}{by^3} = \phi(x)$. Si hoc non est, dicitur *heterogenea*.

Summa Exponentium Functionis homogeneae dicitur ejus *dimensio*. Exponentes in Denominatore habentur negativi.

9. *Functiones sunt similes*, si eodem modo sunt compositae, ut $\phi(x) = (a+bx)^m$ et $\phi(y) = (a+by)^m$.

§. 383. *De mutanda Functionis forma, non mutata variabili Quantitate.*

Functionis forma dupliciter mutari potest, vel servata eadem variabili Quantitate, vel alia in ejus locum substituta. Prior mutatio multis fieri potest, ut:

1. *Summa vel Differentia mutatur in Productum, et rursus Productum mutatur in Summam vel Differentiam*, velut:

$\phi(x) = a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$; $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$.

Hujus exempla vidimus in Multiplicatione, ut §. 100.

§. 100. 104. 105. 108. 109. 114. 122. 125—128. 175. etc.

2. *Functio rationalis fracta mutatur in Summam vel Differentiam plurium Fractionum, et rursus Summa plurium Fractionum mutatur in unam Fractionem*, cujus exempla sunt §. 188.

3. *Functio fracta atque Functio irrationalis mutantur in Seriem*, ut $a\left(\frac{1-x^m}{1-x}\right) = a + ax + ax^2 \ldots$ (§. 204.) Confer. §. 330. 347—349, ubi Series sunt *finitae*. *Infinitae* Seriei exempla sunt §. 340—342. 345. 346. 351. 354. 355.

4. *Functio explicatur*, id est separatur ab ejus variabili, ut, si est $x^2y + ax = by + c$, erit $y = \frac{c - ax}{x^2 - b}$.

Si est $y^2 + xy = bx$, erit $y = -\frac{1}{2}x \pm (bx + \frac{1}{4}x^2)^{\frac{1}{2}}$. Etenim $y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2 = (y + \frac{1}{2}x)^2 = bx + \frac{1}{4}x^2$, vel $y + \frac{1}{2}x = \pm (bx + \frac{1}{4}x^2)^{\frac{1}{2}}$.

5. *Functio convertitur*, id est, ex Functione y, separata ab ejus variabili x, efficitur Functio x separata ab ejus variabili y; ut, si $y = \frac{c - ax}{x^2 - b}$, x definiri per y potest. Nam eodem modo quo in N°. 4., invenitur $x = -\frac{a}{2y} \pm \left(b + \frac{c}{y} + \frac{a^2}{4y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Huc praecipue referenda est Methodus convertendi Seriem Functionis y in Seriem Functionis x; de qua in sequentibus agitur, ut si $x = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots$ erit $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4}$ etc.

§. 384. *De mutanda forma Functionis, mutata variabili quantitate.*

Alia mutatio in eo consistit, ut in locum variabilis quantitatis alia substituatur, ut v. c. factum est §. 175. et 306. aliisque in locis. Saepe etiam inservit convertendae Fractioni irrationali in rationalem. Ita mutatur Functio:

1. $y=(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ in $y=z^m$, si pro x ponitur $\frac{z^n-a}{b}$.

2. $y=(a+bx)^{\frac{1}{2}}$ in $y=z$, ... $\frac{z^2-a}{b}$.

3. $y=\left(\frac{a+bx}{c+dx}\right)^{\frac{m}{n}}$ in $y=z^m$, ... $\frac{a-cz^n}{dz^n-b}$.

4. $y=(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}$ in $y=\frac{bz-(c+z^2)\sqrt{a}}{z^2-c}$, si pro x ponitur $\frac{b-2z\sqrt{a}}{z^2-c}$, quod ut pateat, sit $(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}=xz+\sqrt{a}$;
unde $a+bx+cx^2=x^2z^2+2xz\sqrt{a}+a$;
ergo $b-2z\sqrt{a}=(z^2-c)x$.

5. $y=(-a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}$ in $y=\frac{bz+\sqrt{c}(z^2-a)}{b+2z\sqrt{c}}$, si pro x ponitur $\frac{z^2+a}{b+2z\sqrt{c}}$, quod ut pateat, sit $(-a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}=z-x\sqrt{c}$.
unde $-a+bx=z^2-2xz\sqrt{c}$.

§. 385. *Aequatio identica. Definitio.*

Aequatio identica dicitur, quae ejusdem Functionis diversas designat formas; de quo genere diximus in Prolegomenis §. 34. p. 99 et p. 109.

Numerus variabilis eam ipsam ob causam, quod est variabilis, atque igitur quoslibet valores repraesentat, hac Aequatione reperiri vel definiri nequit. Hujus generis sunt omnes Aequationes, quae §. 383 et 384. commemoratae sunt.

§. 386. *Theorema.*

Si est aliqua Functio integra hujus formae $\phi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots = 0$ *quae igitur semper est* 0, *qualiscunque sit variabilis* x, *Coefficientes constantes*, A, B, C, D ... *id est, qui ex valore hujus* x *non pendent, sunt omnes* $= 0$.

Demonstratio.

Quoniam Aequatio vera etiam manet, si $x = 0$, ponatur $x = 0$; ex quo efficitur, ut omnes Seriei termini, in quibus est Factor x, evanescant; unde $A = 0$, atque $Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots = 0$. Dividatur haec Aequatio per x, tum prodit $B + Cx + Dx^2 + Ex^3 \ldots = 0$. Cum autem, si $x = 0$, B evanescat, eadem ratione nascitur $C + Dx + Ex^2 \ldots = 0$; ergo $C = 0$. Similiter colligitur, omnes reliquos Coefficientes, quotcunque sunt, evanescere.

§. 387. *Coefficientes indeterminati.*

Coefficientes Seriei, qua repraesentatur aliqua Functio, dicuntur *indeterminati*, quoniam sunt constantes, atque determinandi vel definiendi sunt. Non igitur pendent ex valore variabilis quantitatis.

§. 388.

§. 388. *Coroll.* 1.

Si $\phi(x) = Ax^m + Bx^{m+1} + Cx^{m+2} \ldots = 0$, omnes Coefficientes evanescunt; quod perspicitur, si Aequatio per x^m dividitur; quo fit, ut sit $A + Bx + Cx^2 \ldots = 0$, ergo $A = B = C \ldots = 0$ (§. 386.)

§. 389. *Coroll.* 2.

Si $\phi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$, erit $A = a$; $B = b$; $C = c$ etc., id est: *in hac Aequatione identica Coefficientes ejusdem Potestatis ipsius x aequales sunt.*

Etenim $A - a + (B - b)x + (C - c)x^2 + (D - d)x^3 \ldots = 0$ ergo $A - a = 0$; $B - b = 0$; $C - c = 0$ etc., unde $A = a$; $B = b$; $C = c$, etc. (§. 386.)

§. 390. *Coroll.* 3.

Si $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots = bx + cx^2$, erit $A + (B - b)x + (C - c)x^2 + Dx^3 \ldots = 0$, ergo $A = 0$; $B = b$; $C = c$, atque reliqui Coefficientes evanescunt §. 386.

§. 391. *Theorema.*

$$\text{Si } \phi(x) = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \ldots + \pi x^{m-1}}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots + px^m}$$
$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$$

Erit $\alpha = aA$.
$\beta = aB + bA$.
$\gamma = aC + bB + cA$.
$\delta = aD + bC + cB + dA$.
$\varepsilon = aE + bD + cC + dB + eA$.
$\zeta = aF + bE + cD + dC + eB + fA$, etc.

De-

Demonstratio.

Multiplicemus Aequationem per Denominatorem $a+bx \dots +px^m$; quo facto prodit $\alpha+\beta x \dots +\pi x^{m-1}$ $=(a+bx \dots +px^m)(A+Bx+Cx^2 \dots)$; id est (§. 104.)

$$\begin{array}{rl} \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5 \dots = & aA+aBx+aCx^2+aDx^3+aEx^4+a \\ & \quad bAx+bBx^2+bCx^3+bDx^4+b \\ & \qquad +cAx^2+cBx^3+cCx^4+c \\ & \qquad\quad +dAx^3+dBx^4+d \\ & \qquad\qquad +eAx^4+e \\ & \qquad\qquad\quad +f \end{array}$$

ex quo secundum §. 389. sequitur id, quod enunciatum est in Theoremate.

§. 392. *Coroll.* 1.

Ex his Aequationibus Coefficientes ita definiuntur, ut consequentes reperiantur per antecedentes; ut $A=\frac{\alpha}{a}$; $B=\frac{\beta-bA}{a}$; $C=\frac{\gamma-(bB+cA)}{a}$; $D=\frac{\delta-(bC+cB+dA)}{a}$; $E=\frac{\varepsilon-(bD+cC+dB+eA)}{a}$ etc. (§. 20 et §. 136.)

§. 393. *Coroll.* 2.

His Aequationibus (§. 392.) omnes Coefficientes definiuntur, qualiscunque sit m, dummodo sit positivus et integer. Sit $m=1$ aut $\phi(x)=\frac{\alpha}{a+bx}$ $=A+Bx+Cx^2 \dots$

ergo $aA=\alpha$ unde $A=\frac{\alpha}{a}$ atque $\frac{\alpha}{a+bx}=\frac{\alpha}{a}\left(1-\frac{b}{a}x+\left(\frac{bx}{a}\right)^2 \dots\right)$.

$aB+bA=0$ $\quad B=-\frac{bA}{a}$ sed $\frac{\alpha}{a-bx}=\frac{\alpha}{a}\left(1+\frac{b}{a}x+\left(\frac{bx}{a}\right)^2 \dots\right)$

$aC+bB=0$ $\quad C=-\frac{bB}{a}$

$aD+bC=0$

ergo

ergo quilibet terminus consequens aequalis est antecedenti multiplicato per $\frac{-b}{a}$, velut:

1. $\frac{3+5x}{4-2x} = \frac{3}{4} + \frac{13}{2}x\left(\frac{1}{4-2x}\right) = \frac{3}{4} + \frac{13x}{8}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}\right) = \frac{3}{4} + \frac{13x}{8}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3\ldots\right)$; ubi $-\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

2. $\frac{3+2x}{5+7x} = \frac{3}{5} - \frac{\frac{11}{5}x}{5+7x} = \frac{3}{5} - \frac{11x}{25}\left(1-\frac{7}{5}x+\left(\frac{7}{5}x\right)^2-\left(\frac{7}{5}x\right)^3\ldots\right)$; quod convenit cum §. 341. 342. 343.

§. 394. *Coroll.* 3.

Sit $m = 2$ erit $\phi(x) = \frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}$, ergo

$aA = \alpha$
$aB + bA = \beta$
$aC + bB + cA = 0$
$aD + bC + cB = 0$

unde $A = \frac{\alpha}{a}$; $B = \frac{\beta - bA}{a}$; $C = -\left(\frac{bB+cA}{a}\right)$; $D = -\left(\frac{bC+cB}{a}\right)$ etc.

Ergo quilibet Coefficiens definitur per duos proxime antecedentes. Proximus Coefficiens per $-\frac{b}{a}$, qui huic antecedit per $-\frac{c}{a}$ multiplicatur. Summa horum Productorum est Coefficiens, velut:

1. $\frac{1-x}{1-5x+6x^2} = 1 + 4x + 14x^2 + 46x^3 + 146x^4 + 454x^5 \ldots$; ubi $\alpha = 1$, $\beta = -1$; $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$; ergo $C = 5B - 6A$; $D = 5C - 6B$ etc.

2. $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x+x^2} = 1+2x+3x^2+4x^3\ldots$ ubi $\alpha = a = 1$, $\beta = 0$; $b = -2$, $c = 1$, ergo $C = 2B - A$. Quod convenit cum §. 345 et 346.

3.

3. $\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 \ldots$ ubi $C = -(B+A)$.

4. $\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 \ldots$ ubi $C = B + A$.

5. $\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 \ldots$ ubi $C = B - A$.

In hac Serie atque in Serie N°. 3. desunt Potestates x^2, x^5, x^8, $x^{11} \ldots$ et universe Potestates formae x^{3m-1}:

6. $\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 - 8x^5 + 13x^6 \ldots$ ubi $C = A - B$.

7. $\frac{1}{1-2x-x^2} = 1 + 2x + 5x^2 + 12x^3 + 29x^4 + 70x^5 + 169x^6 + \ldots$ ubi $C = 2B + A$.

8. $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = 1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + 29x^6 + 47x^7 \ldots$ ubi $C = B + A$

9. $\frac{1-x}{1-x-2x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + 86x^8 \ldots$ ubi $C = B + 2A$.

10. $\frac{3+2x}{5+7x^2} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}x - \frac{21}{25}x^2 - \frac{14}{25}x^3 + \frac{147}{125}x^4 \ldots$

ubi $C = -\frac{7}{5}A$; $D = -\frac{7}{5}B$.

§. 395. *Coroll.* 4.

Sit $m = 3$, ergo $\phi(x) = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3}$; ergo $A = \frac{\alpha}{a}$;

$B = \frac{\beta - bA}{a}$; $C = \frac{\gamma - (bB + cA)}{a}$; $D = -\frac{(bC + cB + dA)}{a}$;

$E = -\frac{(bD + cC + dB)}{a}$ etc.

Ergo post tertium Coefficientem quilibet Coefficiens est Summa trium Productorum, quae pro-

prodeunt, si tres Coefficientes antecedentes multiplicantur per $-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a}, -\frac{d}{a}$, velut:

1. $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-3x+3x^2-x^3} = 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4 \ldots$
ubi $D = 3C - 3B + A$. Conf. §. 345 et 346.

2. $\frac{1+3x+x^2}{1+2x+2x^2+x^3} = 1+x-3x^2+3x^3-x^4-x^5+x^6+x^7-3x^8$
$+3x^9 \ldots$; ubi $D = -(2C+2B+A)$.

3. $\frac{1}{1-x-x^2-x^3} = 1+x+2x^2+4x^3+7x^4+13x^5+24x^6 \ldots$
ubi $D = C+B+A$.

§. 396. *Coroll.* 5.

Ex his perspicitur regula generalis Coefficientium. Si Fractio $\frac{\alpha+\beta x \ldots + \pi x^{m-1}}{a+bx \ldots + px^m}$ redigenda est in Seriem, ub in Denominatore maximus Exponens variabilis quantitatis est m, quilibet Coefficiens Seriei est negativa Summa m Productorum ex m antecedentibus Coefficientibus suo ordine multiplicatis per $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{e}{a} \ldots$ velut:

1. $\frac{1}{(1-x)^4} = \frac{1}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4} = 1+4x+10x^2+20x^3 \ldots$
ubi $E = 4D - 6C + 4B - A$. Conf. §. 345 et 346.

2. $\frac{1}{1-x-x^2-x^3-x^4} = 1+x+2x^2+4x^3+8x^4+15x^5+29x^6+\ldots$
ubi $E = D+C+B+A$.

aut quilibet Coefficiens est Summa quatuor antecedentium.

3. $\frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = 1+x+2x^2$
$+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+8x^7+10x^8+\ldots$ ubi
$G = F+E+D-C-B+A$.

4.

$$4.\ \frac{1}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{1}{a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4}$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3}x + \left(\frac{3b^2-2ac}{a^4}\right)x^2 - \left(\frac{4b^3+6abc}{a^5}\right)x^3 \ldots$$

ubi $D = -\left(\frac{2abC+(b^2+2ac)B+2bcA}{a^2}\right)$.

$$5.\ \frac{1}{(1+x)^m} = 1 - mx + \frac{m.(m+1)}{1\,.\,2}x^2 - \frac{m\ldots(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3 + \ldots$$

ubi $P = -\left(mO + \frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}N + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}M + \frac{m\ldots(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}L + \ldots\right)$. Conf. §. 346.

$$6.\ \frac{x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}\ldots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{2.3\ldots8}\ldots} = x + \frac{x^3}{1.3} + \frac{2x^5}{1.3.5} + \frac{17x^7}{1.3.5.7\ldots} + \frac{62x^{\ldots}}{1.3.5.7\ldots}$$

$$7.\ \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6}\ldots}{x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3\ldots7}\ldots} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{1.3.5.3} - \frac{2x^5}{1.3.5\ldots} - \frac{x^7}{1.3.5\ldots}$$

§. 397. *Series recurrens, ejus Scala relationis. Definitio.*

Series dicitur *recurrens*, cujus quilibet terminus consequens est sunt Summa Productorum ex terminis proxime antecedentibus, atque ex definitis numeris, qui numeri efficiunt *Scalam relationis*, quae dicitur. Si Scala relationis constat ex m numeris (qui etiam praeter ultimum possunt evanescere) Series recurrens est *mtimi ordinis*.

§. 407.

§. 398. *Coroll.* 1.

Ex hac Definitione collata cum §. 391—396. sequitur:

1. Series Coefficientium Quoti, in quem Divisione convertitur Fractio formae $\frac{X}{X'} = \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2 \ldots +\pi x^{m-1}}{a+bx+cx^2 \ldots +px^m}$ est *recurrens*. Ejus *Scala relationis* constat ex m numeris, qui sunt $\frac{-b}{a}, \frac{-c}{a}, \frac{-d}{a}$ etc. Quare est Series recurrens $m$timi ordinis, etiamsi nonnulli intermedii numeri $b, c, d \ldots$ possint esse o. Fractio ipsa *generatrix* dicitur.

2. *Omnis Series Arithmetica* $m-1$ *timi ordinis est Series recurrens* m*timi ordinis*. Haec enim Series Arithmetica est Series Coefficientium Quoti, in quem convertitur Fractio formae $\frac{\alpha+\beta x \ldots +\pi x^{m-1}}{(1-x)^m}$, quae est Fractio generatrix Seriei recurrentis $m$timi ordinis, cujus Scala relationis est $m, -\frac{(m-1)}{1 \cdot 2}, +\frac{m \cdot (m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \ldots$ §. 345 et 396.

3. Scala relationis m terminorum non definit priores m terminos Seriei recurrentis $m$timi ordinis, quoniam hi termini etiam pendent ex Coefficientibus in Numeratore Fractionis generatricis. Quare ex data Scala relationis infinitus numerus *Serierum* inter se diversarum constitui potest, quoniam priores m termini ad libitum sumi possunt.

Progressio Geometrica est Series recurrens primi ordinis §, 203.). Progressio Arithmetica primi ordinis (§. 216.) est Series recurrens secundi ordinis. In utraque primus terminus ad libitum sumitur.

§. 399. *Coroll.* 2.

Si Fractio generatrix est $\frac{X}{X'}$, atque S est Series Coefficientium Quoti, in quem Divisione convertitur haec Fractio, haec proponi Problemata possunt:

1. *Ex datis* X *et* X' *reperire* S, quod Problema solutum est §. 391.
2. *Ex datis* S *et* X' *reperire* X.
3. *Ex datis* S *et* X *reperire* X' atque igitur *Scalam relationis.*
4. *Reperire Summam* m *terminorum Seriei* S.
5. *Reperire* m*timum terminum Seriei* S.

Quae quatuor postrema nunc solventur, quantum ex principiis positis licet.

§. 400. *Problema.*

Ex data Serie S *atque Denominatore* X' *Fractionis generatricis* $\frac{X}{X'}$ *reperire Numeratorem* X.

Solutio.

Ex §. 391. patet $\alpha = aA$; $\beta = aB + bA$; $\gamma = aC + bB + cA$ etc. Sed $A, B, C \ldots$ atque $a, b, c \ldots$ sunt cogniti, ex quibus $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ innotescunt. Velut si $\frac{X}{(1-x)^6} =$

$$\frac{X}{1-6x+15x^2-20x^3+15x^4-6x^5+x^6} = 1 + 2^5x + 3^5x^2 + 4^5x^3 + \ldots$$

erit $a = 1$, $b = -6$, $c = 15$, $d = -20$ . . .

$A = 1$,

$A = 1$, $B = 2^5$, $C = 3^5 \ldots$, ex quo invenitur $X = 1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4$.

§. 401. *Coroll.* 1.

Ergo ex m prioribus terminis Scalae relationis, atque ex m prioribus Coefficientibus Seriei possunt cognosci m priores Coefficientes Numeratoris.

§. 402. *Coroll.* 2.

Si sola data est Series S, X et X' sunt indefiniti, sed si est $m$tima Series Arithmetica, atque sufficiens terminorum Seriei numerus datus est, ex Serie ipsa definiri potest Fractio generatrix. Quod sequenti Problemate proponitur.

§. 403. *Problema.*

Data Serie S, *atque cognito gradu Seriei recurrentis, reperire Fractionem generatricem* $\frac{X}{X'}$.

Solutio.

Sit proposita $\frac{X}{X'} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 13x^7 \ldots$ atque Coefficientium Series sit tertii ordinis.

Ut simplicior fiat Fractio generatrix, sit $a = 1$, ergo $\frac{X}{X'} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2}{1 + bx + cx^2 + dx^3} = S$, atque reperiundi sunt α, β, γ, b, c, d. Est autem $A = B = 1$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 4$, $F = 6$, ergo $\alpha = 1$, unde I. $1 + b = \beta$; II. $2 + b + c = \gamma$; III. $3 + 2b + c + d = 0$; IV. $4 + 3b + 2c + d = 0$; V. $6 + 4b + 3c + 2d = 0$. Quomodo ex his quinque Aequationibus quinque inme-

cogniti b, c, d, β, γ, et universe quomodo m numeri incogniti ex m Aequationibus reperiri possint, in posterum explicabitur. In hoc autem Problemate simplicior hic modus adhiberi potest.

Duplicata tertia Aequatio subtrahatur quintae. Residuum nullum est, id est $c = 0$. Subtrahatur tertia quartae, prodit $1 + b = 0$, unde $b = -1$; ergo ex prima aequatione $\beta = 0$, et ex secunda $\gamma = 1$; atque ex tertia $d = -1$, ergo $\frac{X}{X'} = \frac{1+x^2}{1-x-x^2}$.

Eodem modo fit Solutio, si Series recurrens est 4, 5, 6, 7 ... ordinis.

§. 404. *Problema.*

Data Serie S *atque Numeratore* X *Fractionis generatricis* $\frac{X}{X'}$, *reperire ejus Denominatorem* X', *sive Scalam relationis Seriei* S.

Solutio.

Proponitur $\frac{\alpha + \beta x \ldots + \pi x^{m-1}}{a + bx + cx^2 \ldots + px^m} = A + Bx + Cx^2 \ldots$, atque, reliquis in hac Aequatione datis, quaeruntur $a, b, c \ldots p$. Id autem fit duce Theoremate §. 391, ex quo nascuntur Aequationes $a = \frac{\alpha}{A}$; $b = \frac{\beta - aB}{A}$; $c = \gamma - \left(\frac{aC + bB}{A}\right)$; $d = \delta - \left(\frac{aD + bC + cB}{A}\right)$ etc. velut si $\frac{1 + 3x + x^2}{a + bx + cx^2 + dx^3} = 1 + x - 3x^2 + 3x^3 \ldots$; ubi $\alpha = 1$; $\beta = 3$; $\gamma = 1$; $\delta = \varepsilon = \zeta \ldots = 0$; $A = 1$; $B = 1$; $C = -3$; $D = 3$; invenitur

$a = 1$

$a=1$; $b=2$; $c=2$; $d=1$ atque Fractio est
$\frac{1+3x+x^2}{1+2x+2x^2+x^3}$.

§. 405. *Problema.*

Reperire Summam m *terminorum Seriei ptimi ordinis sive* Summam m *priorum Coefficientium Quoti*
$\frac{X}{X'}=\frac{\alpha+\beta x\ldots+\lambda x^{p-1}}{a+bx\ldots+lx^p}$
$=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots+Ix^{m-4}+Kx^{m-3}+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}\ldots$
ubi M est $m$timus Coefficiens.

Solutio.

I. *Series sit primi ordinis.*

Ergo $\frac{X}{X'}=\frac{\alpha}{a+bx}=A+Bx\ldots+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}$, unde (§. 391.)

$aB+bA=0$;
$aC+bB=0$ et ita deinceps, donec perveniatur ad
⋮
$aM+bL=0$. Quae si in unam Summam s colliguntur, prodit $a(s-A)+b(s-M)=0$. Quare $as+bs=aA+bM$, unde $s=\frac{aA+bM}{a+b}$. *Summa igitur reperitur ex primo et ultimo Coefficiente Seriei, atque ex duobus Coefficientibus Denominatoris.*

II. *Series sit secundi ordinis.*

Ergo $\frac{X}{X'}=\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}=A+Bx+Cx^2\ldots+Kx^{m-3}+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}\ldots$,
unde eodem modo quo antea prodit:

$aC+bB+cA=0$.
$aD+bC+cB=0$.
$aE+bD+cC=0$.
⋮
$aM+bL+cK=0$. Si in unam Summam s colliguntur, prodit:

a

$a.(s-A-B)+b.(s-A-M)+c.(s-L-M)=0$, vel

$(a+b+c)s=a.(A+B)+b.(A+M)+c.(L+M)$.

Quapropter $s=\dfrac{a.(A+B)+b.(A+M)+c.(L+M)}{a+b+c}$.

Summa igitur reperitur ex duobus primis et ultimis terminis Seriei atque ex tribus Coefficientibus Denominatoris.

III. *Series sit tertii ordinis.*

Ergo $\dfrac{X}{X'}=\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{a+bx+cx^2+dx^3}=A+Bx+Cx^2+Dx^3 \ldots +Ix^{m-4} +Kx^{m-3}+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}$,

unde eodem modo quo antea:

$aD+bC+cB+dA=0$.

$aE+bD+cC+dB=0$.

$aF+bE+cD+dC=0$.

$\vdots$

$aM+bL+cK+dI=0$.

Quae si in unam Summam s colliguntur, prodit:

$a.(s-A-B-C)+b.(s-A-B-M)+c.(s-A-L-M)+d.(s-K-L-M)$

unde $s=\dfrac{a.(A+B+C)+b.(A+B+M)+c.(A+L+M)+d.(K+L+M)}{a+b+c+d}$.

Similiter si Series est *quarti ordinis*, aut si est

$\dfrac{X}{X'}=\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3}{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4 \ldots +Hx^{m-5}+Ix^{m-4} +Kx^{m-3}+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}$

erit $aE+bD+cC+dB+eA=0$ etc., atque reperitur:

$s.(a+b+c+d+e)=a.(A+B+C+D)+b.(A+B+C+M) +c.(A+B+L+M)+d.(A+K+L+M)+e.(I+K+L+M)$.

Ex his apparet lex generalis, qua Summa m terminorum Seriei cujuslibet ordinis reperiatur. *Si Series est* p*timi ordinis, Summa definitur* p *primis et ultimis Coefficientibus Seriei atque ex* $p+1$ *Coef-*

Coefficientibus Denominatoris Fractionis generatricis. Cum autem singuli hi ultimi termini per antecedentes terminos definiendi sint, haec regula minoris est usus. Reperiunda est igitur via, qua quilibet terminus etiam sine antecedentibus terminis reperiri potest; quod tamen altiores fontes requirit, ex quibus nondum haurire possumus. Quod autem ex principiis positis derivari potest explicabitur in sequentibus.

§. 406. *Coroll.*

Priores termini ita reperiuntur:

$$A = \frac{\alpha}{a};\; B = \frac{\beta - bA}{a} = \frac{a\beta - \alpha b}{a^2};$$

$$C = \frac{\gamma - bB - cA}{a} = \frac{a^2\gamma - a(b\beta + c\alpha) + \alpha b^2}{a^3};$$

$$D = \frac{\delta - bC - cB - dA}{a} = \frac{a^3\delta - a^2(b\gamma + c\beta + d\alpha) + a(b^2\beta + 2bc\alpha) - \alpha b^3}{a^4};$$

$$E = \frac{\varepsilon - bD - cC - dB - eA}{a};$$

unde $a^5 E = a^4\varepsilon - a^3(b\delta + c\gamma + d\beta + e\alpha) + a^2(b^2\gamma + 2bc\beta + (2bd + c^2)\alpha) - a(b^3\beta + 3b^2c\alpha) + \alpha b^4.$

Ergo Summa *m* terminorum reperiri potest ex Coefficientibus Numeratoris et Denominatoris Fractionis generatricis. Verum hae formulae fiunt longiores et ad usum difficiliores. Quare aliae sunt reperiundae, ex quibus singuli Seriei termini definiantur, inter quas sunt, quas nunc expositури sumus.

§. 407. *Problema.*

Reperire mtimum terminum Seriei Fractionis generatricis.

$$\frac{X}{X'} = \frac{N}{a+x} + \frac{N'}{a'+x} + \frac{N''}{a''+x} \ldots = A+Bx+Cx^2 \ldots + Mx^{m-1} \ldots$$

Solutio.

$$\frac{N}{a+x} = \frac{N}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{a}}\right) = \frac{N}{a}\left(1-\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \ldots \pm \left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} \ldots\right) \text{ §. 341.}$$

ergo *m*timus terminus est $\pm \frac{N}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{m-1} = \pm x^{m-1} . \frac{N}{a^m}$; ex quo sequitur *m*timum terminum Fractionis $\frac{X}{X'}$ esse

$$\pm x^{m-1}\left(\frac{N}{a^m} + \frac{N'}{a'^m} + \frac{N''}{a''^m} \ldots\right).$$

Terminus est *positivus*, si *m* est numerus *impar*, sed *negativus*, si numerus *par* est. *N* est numerus constans, qui non pendet ex valore ipsius *x*.

§. 408. *Problema.*

Mutare $\frac{X}{X'} = \frac{\alpha+\beta x \ldots + \pi x^{m-1}}{a+bx+cx^2 \ldots + px^m} = \frac{\alpha+\beta x \ldots + \pi x^{m-1}}{(p+x)(q+x)(r+x)(s+x) \ldots}$ *in m Fractiones partiales formae* $\frac{N}{p+x} + \frac{N'}{q+x} + \frac{N''}{r+x} + \frac{N'''}{s+x} \ldots$ *ubi* N, N', N'', ... p, q, r, s ... *sunt numeri constantes, qui non pendent ex* x, *atque* p, q, r, s ... *sunt inter se diversi.*

Solutio.

Sit $X' = (p+x) S$, ita ut S sit $= (q+x)(r+x)(s+x) \ldots$ id

id est, ut S sit Productum ex reliquis Factoribus. Sit $\frac{X}{X'} = \frac{X}{(p+x)S} = \frac{N}{p+x} + \frac{P}{S}$, ergo $P = \frac{X-NS}{p+x}$. Sed $\frac{P}{S} = \frac{N'}{q+x} + \frac{N''}{r+x} + \frac{N'''}{s+x} \ldots$, unde $P = N'(r+x)(s+x)\ldots + N''(q+x)(s+x)\ldots + N'''(q+x)(r+x)\ldots$ etc.; ex quo patet, P esse Functionem integram ipsius x, atque igitur $X - NS$ esse divisibile per $p+x$, id est, continere Factorem $p+x$. Ponamus $p+x=0$, ergo $x=-p$; atque $X - NS = 0$, unde $N = \frac{X}{S}$, si $x=-p$, id est

$$N = \frac{\alpha - \beta p + \gamma p^2 - \delta p^3 \ldots \pm \pi p^{m-1}}{(q-p)(r-p)(s-p)(t-p)\ldots}.$$

Cum autem Fractiones partiales $\frac{N}{p+x}, \frac{N'}{q+x}, \frac{N''}{r+x} \ldots$ solis numeris $p, q, r \ldots$ inter se differant, perspicuum est, ex N reperiri N', si p et q vices inter se commutant, id est: si pro p ponitur q et pro q ponitur p; ex N reperiri N'', si p et r vices inter se commutant, et ita de reliquis. Quare

$$N' = \frac{\alpha - \beta q + \gamma q^2 - \delta q^3 \ldots \pm \pi q^{m-1}}{(p-q)(r-q)(s-q)(t-q)\ldots};$$

$$N'' = \frac{\alpha - \beta r + \gamma r^2 - \delta r^3 \ldots \pm \pi r^{m-1}}{(p-r)(q-r)(s-r)(t-r)\ldots} \text{ etc.}$$

§. 409. *Coroll.* I.

Si Fractio mutatur in Seriem, $m$timus terminus est $= \pm x^{m-1} \left(\frac{N}{p^m} + \frac{N'}{q^m} + \frac{N''}{r^m} \ldots\right)$ (§. 407.); ubi in locum $N, N', N'' \ldots$ ponuntur eorum valores §. 408. indicati.

§. 410. Coroll. 2.

Ergo si $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2} = \frac{\alpha+\beta x}{(p+x)(q+x)} = \frac{N}{p+x} + \frac{N'}{q+x}$, erit $N = \frac{\alpha-\beta p}{q-p}$ et $N' = \frac{\alpha-\beta q}{p-q}$; Fractio ipsa $\frac{\alpha+\beta x}{a+bx+cx^2}$ $= \frac{1}{q-p}\left(\frac{\alpha-\beta p}{p+x} - \left(\frac{\alpha-\beta q}{q+x}\right)\right)$; atque *m*timus terminus Seriei est $\pm \frac{x^{m-1}}{q-p}\left(\frac{\alpha-\beta p}{p^m} - \left(\frac{\alpha-\beta q}{q^m}\right)\right)$ (§. 407.) ut $\frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$ $= \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$; ubi *m*timus Seriei terminus est $-x^{m-1}\left(\frac{3}{2^m} \pm 2\right)$. Signum est $+$, si *m* est numerus par, $-$ autem si est impar (§. 346.). Ita etiam $\frac{7x-5}{(x+3)(x-2)} = \frac{26}{5\cdot(x+3)} + \frac{9}{5(x-2)}$.

§. 411. Coroll. 3.

Si $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{a+bx+cx^2+dx^3} = \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(p+x)(q+x)(r+x)} = \frac{N}{p+x} + \frac{N'}{q+x} + \frac{N''}{r+x}$, erit $N = \frac{\alpha-\beta p+\gamma p^2}{(q-p)(r-p)}$; $N' = \frac{\alpha-\beta q+\gamma q^2}{(p-q)(r-q)}$; $N'' = \frac{\alpha-\beta r+\gamma r^2}{(p-r)(q-r)}$ et similiter de Fractionibus, ubi summa Potestas ipsius x major est in Denominatore, ut

$$\frac{10x^2-x}{(3x+1)(x-1)(2x-1)(2x+1)} = \frac{10x^2-x}{12x^4-8x^3-7x^2+2x+1}$$
$$= \frac{39}{20\cdot(3x+1)} + \frac{3}{4\cdot(x-1)} - \frac{4}{5\cdot(2x-1)} - \frac{2}{2x+1}.$$

§. 412. Coroll. 4.

Si aliquis ex numeris p, q, r... velut p, evanescit, atque *m*timus terminus quaeritur, Factor

$p+x$

$p+x$ omittitur, atque terminus, qui invenitur, per x dividitur, ut si $p=o$, erit

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{x.(q+x)(r+x)}=\frac{N}{x}+\frac{N'}{q+x}+\frac{N''}{r+x},\text{ velut:}$$

$$\frac{7x-5}{(x+3)(x-2)x}=\frac{-26}{15.(x+3)}+\frac{9}{10.(x-2)}+\frac{5}{6x};$$

sed ut ultimus reperiatur terminus, ponitur

$$\frac{1}{x}\left(\frac{7x-5}{(x+3)(x-2)}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{26}{5.(x+3)}+\frac{9}{5.(x-2)}\right).$$

§. 413. *Problema.*

Mutare $\frac{X}{X'}=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(p+x)^2(q+x)}$ *in Fractiones partiales.*

Solutio.

Non eam viam, quam §. 408. descripsimus, in hujus Problematis solutione ingredi possumus, quoniam tum unius Fractionis partialis Denominator evanesceret. Ut autem id vitetur, Fractionibus partialibus haec detur forma: $\frac{X}{X'}=\frac{N}{(p+x)^2}+\frac{N'}{p+x}+\frac{N''}{q+x}$;

unde $\alpha+\beta x+\gamma x^2=Nq+N'pq+N''p^2$ $+(N+N'(p+q)+2pN'')x+(N'+N'')x^2$. Ergo

I. $Nq+N'pq+N''p^2=\alpha$; II. $N+N'(p+q)+2pN''=\beta$; III. $N'+N''=\gamma$ (§. 389.). Ex tertia Aequatione prodit $N''=\gamma-N'$. Si hunc valorem N'' ponimus in prima et tertia Aequatione, fit:

IV. $Nq-N'p(p-q)+p^2\gamma=\alpha$ et V. $N-(p-q)N'+2p\gamma=\beta$. Quintam hanc Aequationem, multiplicatam per q, subtrahamus quartae; fit:

VI. $-N'(p^2+q^2-2pq)+p^2\gamma-2pq\gamma=\alpha-\beta q$; unde

N'

$$N' = \frac{-\alpha + \beta q + \gamma(p^2 - 2pq)}{(p-q)^2};\ N'' = \gamma - N' = \frac{\alpha - \beta q + \gamma q^2}{(p-q)^2}.$$

Quinta Aequatio multiplicata per p subtrahatur quartae. Residuum est:

VII. $N(q-p) - p^2\gamma = \alpha - \beta p$, unde $N = \frac{\alpha - \beta p + p^2\gamma}{q-p}$;

$$\text{ut } \frac{3x^2+4}{x^3-x^2-8x-12} = \frac{3x^2+4}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{-16}{5\cdot(x+2)^2} + \frac{44}{25\cdot(x+2)} + \frac{31}{25\cdot(x-3)}.$$

Alia Methodus.

$X = N(q+x) + N'(p+x)(q+x) + N''(p+x)^2$, ergo $X - N\cdot(q+x) = (N'(p+x)(q+x) + N''\cdot(p+x)^2)$, ergo I. $N = \frac{X}{q-p}$, si $p = -x$, ergo $N = \frac{\alpha - \beta p + \gamma p^2}{q-p}$.

Sit $\frac{X - N(q+x)}{p+x} = P$, quae est Functio integra, quia $P = N'(q+x) + N''(p+x)$, ergo $N' = \frac{P}{q-p}$, si $x = -p$;

$$\text{Sed } P = \frac{X - N(q+x)}{p+x}$$

$$= \frac{(q-p)(\alpha + \beta x + \gamma x^2) - (\alpha - \beta p + \gamma p^2)(q+x)}{(q-p)(p+x)}$$

$$= \frac{q\beta\cdot(p+x) + q\gamma(x+p)(x-p) - \alpha(p+x) - p\gamma x\cdot(p+x)}{(q-p)(p+x)}$$

$= \frac{-\alpha + \beta q + q\gamma(x-p) - p\gamma x}{q-p}$; ergo si $x = -p$, erit

$P = \frac{-\alpha + \beta q + \gamma(p^2 - 2pq)}{(q-p)}$, atque $N' = \frac{-\alpha + \beta q + \gamma(p^2 - 2pq)}{(q-p)^2}$.

Ut N'' reperiatur, sit $X' = (x+q)S$, ergo $\frac{X}{X'} = \frac{X}{(x+q)S}$

=

$= \frac{N''}{x+q} + \frac{P}{S}$, ergo $X = N''S + P.(x+q)$, atque $X - N''S = P.(x+q) = o$, ergo $N'' = \frac{X}{S}$, si $x = -p$; vel $N'' = \frac{\alpha - \beta q + \gamma q^2}{(p-q)^2}$.

§. 414. *Coroll.* 1.

Si cum Factore Quadrato $(p+x)^2$ praeter Factorem simplicem $q+x$ plures Factores simplices, ut $(r+x)$, $(s+x)$... insunt Denominatori, N''', N^{IV}, N^{V} reperiuntur ex N', mutando q in r, in s, etc. ut v. c.

si $\frac{X}{X'} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}{(p+x)^2(q+x)(r+x)} = \frac{N}{(p+x)^2} + \frac{N'}{p+x} + \frac{N''}{q+x} + \frac{N'''}{r+x}$.

Sit $X' = (x+q)S$, ergo $S = (p+x)^2(r+x)$ atque $\frac{X}{X'} = \frac{N''}{x+q} + \frac{P}{S}$, unde $X = N''S + P.(x+q)$, ergo $X - N''S = P.(x+q) = o$, si $x = -q$; ergo $N'' = \frac{X}{S} = \frac{\alpha - \beta q + \gamma q^2 - \delta q^3}{(r-q)(p-q)^2}$, atque $N''' = \frac{\alpha - \beta r + \gamma r^2 - \delta r^3}{(q-r)(p-r)^2}$.

§. 415. *Problema.*

Mutare $\frac{X}{(p+x)^3 S}$ *in Fractiones partiales.*

Solutio.

Sit $\frac{X}{(p+x)^3 S} = \frac{N}{(p+x)^3} + \frac{N'}{(p+x)^2} + \frac{N''}{p+x} + \frac{P}{S}$, ubi P est Functio integra, ergo $X = NS + N'S.(p+x) + N''S(p+x)^2 + P.(p+x)^3$, unde $\frac{X - NS}{p+x} = N'S + N''S.(p+x) + P.(p+x)^2$.

I.

I. Ergo $N = \frac{X}{S}$, si $x = -p$.

Sit $\frac{X-NS}{p+x} = S'$, quae est Functio integra. Ergo $\frac{S'-N'S}{p+x}$ $= N''S + P.(p+x)$.

II. Ergo $N' = \frac{S'}{S}$, si $x = -p$.

Sit $\frac{S'-N'S}{p+x} = S''$, quae est Functio integra.

III. Ergo $P = \frac{S''-N''S}{p+x}$, atque $N'' = \frac{S''}{S}$, si $x = -p$.

Veluti $\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27} = \frac{5x^3-2}{(x-3)^3(x+1)} = \frac{133}{4.(x-3)^3}$ $+ \frac{407}{16.(x-3)^2} + \frac{313}{64.(x-3)} + \frac{7}{64.(x+1)}$.

In hoc exemplo est $X = 5x^3 - 2$; $S = x + 1$; $p = -3$, ergo si $x = 3$, erit $X = 133$ et $S = 4$, unde $N = \frac{133}{4}$. Deinde $S' = \frac{20x^2+60x+47}{4}$, ergo si $x = 3$, erit $S' = \frac{407}{4}$, atque $N' = \frac{407}{16}$. Tum $S'' = \frac{80x+73}{16}$, unde si $x = 3$, erit $S'' = \frac{313}{16}$ et $N'' = \frac{313}{64}$. Tandem $P(x-3) = \frac{80x+73}{16}$ $- \frac{313}{64}(x+1)$, ergo $P = \frac{7x-21}{64.(x-3)} = \frac{7}{64}$.

§. 416. *Coroll.* 1.

Si proponitur $\frac{X}{(p+x)^3}$, S est $= 1$ atque $P = 0$. Quapropter $N = X$, $N' = S' = \frac{X-N}{p+x}$, atque $N'' = S'' = \frac{S'-N'}{p+x}$, si $x = -p$

ut si $\frac{X}{(p+x)^3} = \frac{-1+x^2}{(2+x)^3}$, erit $p=2$, ergo $N=3$;

$N' = S' = \frac{-1+x^2-3}{x+2} = x-2 = -4$; $N'' = S'' = \frac{x+2}{x+2} = 1$.

Ergo $\frac{-1+x^2}{(2+x)^3} = \frac{3}{(2+x)^3} - \frac{4}{(2+x)^2} + \frac{1}{2+x}$.

Similiter $\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}$.

§. 417. *Coroll.* 2.

Similiter fit, si major est Potestas Factoris $p+x$. ubi Fractioni $\frac{X}{(p+x)^n S}$ haec danda est forma;

$$\frac{X}{X'} = \frac{X}{(p+x)^n S} = \frac{N}{(p+x)^n} + \frac{N'}{(p+x)^{n-1}} + \frac{N''}{(p+x)^{n-2}} \dots + \frac{Q}{p+x} + \frac{P}{S}.$$

§. 418. *Problema.*

Mutare $\frac{X}{X'} = \frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{(p+x)(q+x^2)}$ *in Fractiones partiales.*

Solutio.

Sit $\frac{X}{X'} = \frac{N+N'x}{q+x^2} + \frac{N''}{p+x}$. Multiplicatione per $(p+x)(q+x^2)$ prodit

$\alpha+\beta x+\gamma x^2 = Np + N''q + (N+N'p)x + (N'+N'')x^2$;

$N'' = \frac{\alpha-\beta p+\gamma p^2}{p^2+q}$ (§. 408.), ergo $N = \frac{\alpha-N''q}{p} = \frac{\alpha p+\beta q-\gamma pq}{p^2+q}$;

$N' = \gamma - N'' = \frac{-\alpha+\beta p+\gamma q}{p^2+q}$.

Veluti $\frac{2+3x+4x^2}{(5+x)(6+x^2)} = \frac{1}{31}\left(\frac{-92+37x}{6+x^2} + \frac{87}{5+x}\right)$. Nam $p=5$,

$q=6$,

$q = 6$, ergo $p^2 + q = 31$. $N = \frac{10 + 18 - 120}{31} = -\frac{92}{31}$;

$N' = \frac{-2 + 15 + 24}{31} = \frac{37}{31}$; $N'' = \frac{2 - 15 + 100}{31} = \frac{87}{31}$.

§. 419. *Problema.*

Si sunt duo numeri variabiles y *et* x, *quorum alter est alterius Functio, atque cognitum est:*

si x est $a, b, c, d, e, f \ldots$

esse y $a'. b', c', d', e', f' \ldots$

invenire Aequationem inter x *et* y.

Solutio.

I. *Primus casus. Si relatio inter* x *et* y *potest exprimi per Seriem* $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots$

Quoniam $A, B, C \ldots$ sunt Coefficientes indeterminati, ponere possumus:

$$y = A + \frac{B.(x-a)}{a} + \frac{C.(x-a)(x-b)}{ab} + \frac{D.(x-a)(x-b)(x-c)}{abc}$$
$$+ \frac{E.(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}{abcd} \text{ etc.} \ldots$$

atque definiendi sunt Coefficientes, quod hoc modo fieri potest:

1. Si $x = a$, erit $y = a' = A$, quoniam tum reliqui termini, ut $\frac{B.(x-a)}{a}$, in quibus omnibus est Factor $x-a$, evanescunt.

2. Si $x = b$, erit $y = b' = A + B\left(\frac{b-a}{a}\right)$, ergo $B = \frac{(b'-A)a}{b-a}$.

3. Si $x = c$, erit $y = c' = A + B\left(\frac{c-a}{a}\right) + C\frac{(c-a)(c-b)}{ab}$

ergo $\frac{(c-a)(c-b)}{ab} . C = c' - A - B . \left(\frac{c-a}{a}\right)$.

4. Si $x=d$, erit $y=d'$, atque

$$\frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{abc}.D=d'-A-B\left(\frac{d-a}{a}\right)-C.\frac{(d-a)(d-b)}{ab}.$$

Eodem modo reperitur:

$$\frac{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)}{abcd}E=e'-A-B.\left(\frac{e-a}{a}\right)-C.\frac{(e-a)(e-b)}{ab}$$

$$-D.\frac{(e-a)(e-b)(e-c)}{abc}.$$

Ex quo lex generalis perspicitur. Ex his Aequaquationibus reperiuntur Coefficientes $A, B, C\ldots$, ut

$A=a'$.

$B=a.\left(\frac{b'-a'}{b-a}\right)$.

$C=ab.\left(\frac{b'-a')}{(b-a)(b-c)}+\frac{c'-a'}{(c-a)(c-b)}\right)$.

$D=abc.\left(\frac{b'-a'}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c'-a'}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d'-a'}{(d-a)(d-b)(d-}\right.$

$E=abcd.\left(\frac{b'-a'}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)}+\frac{c'-a'}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)}\right)$

$+\frac{d'-a'}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)}+\frac{e'-a'}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)}\Big).$

ex quo patet lex generalis.

II. *Secundus casus. Si Relatio inter* x *et* y *potest exprimi per Seriem formae*

$y=\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\ldots$ Ponamus.

$$y=Ax+\frac{Bx.(x-a)}{a}+\frac{Cx.(x-a)(x-b)}{ab}+\frac{Dx.(x-a)(x-b)(x-c)}{abc}+\&c.$$

Eodem modo quo in primo casu reperitur:

$A=\frac{a'}{a}$; $\frac{b-a}{a}$ $B=\frac{b'}{b}-A$; $\frac{(c-a)(c-b)}{ab}.C=\frac{c'}{c}-A-B.\left(\frac{c-a}{a}\right)$;

$$\frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{abc}.D=\frac{d'}{d}-A-B.\left(\frac{d-a}{a}\right)-C.\frac{(d-a)(d-b)}{ab}.$$

 Un-

Unde

$$A=\frac{a'}{a};\; B=a\left(\frac{b'}{b.(b-a)}+\frac{a'}{a.(a-b)}\right);$$

$$C=ab\left(\frac{c'}{c.(c-a)(c-b)}+\frac{b'}{b.(b-a)(b-c)}+\frac{a'}{a.(a-b)(a-c)}\right)$$

$$D=abc\left(\frac{d'}{d.(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{c'}{c.(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{b'}{b(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{a'}{a.(a-b)(a-c)(a-d)}\right);$$

et ita reliqui Coefficientes.

III. *Tertius casus. Si Relatio inter x et y potest exprimi per Seriem* $y=\alpha x+\beta x^3+\gamma x^5+\delta x^7+\ldots$

Ponamus $y=Ax+\frac{Bx(x^2-a^2)}{a^2}+Cx.\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{a^2b^2}+Dx.\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)}{a^2b^2c^2}$; unde $A=\frac{a'}{a}$; $\frac{b^2-a^2}{a^2}.B=\frac{b'}{b}-A$; $\frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{a^2b^2}.C=\frac{c'}{c}-A-B.\frac{(c^2-a^2)}{a^2}$; $\frac{(d^2-a^2)(d^2-b^2)(d^2-c^2)}{a^2b^2c^2}D=\frac{d'}{d}-A-B.\frac{(d^2-a^2)}{a^2}-C.\frac{(d^2-a^2)(d^2-b^2)}{a^2b^2}$;

ex quo prodit:

$$A=\frac{a}{a'};\; B=a^2\left(\frac{b'}{b.(b^2-a^2)}+\frac{a'}{a.(a^2-b^2)}\right);$$

$$C=a^2b^2\left(\frac{c'}{c.(c^2-a^2)(c^2-b^2)}+\frac{b'}{b.(b^2-a^2)(b^2-c^2)}+\frac{a'}{a.(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\right);$$

et ita reliqui Coefficientes.

IV. *Quartus casus. Si Relatio inter x et y potest exprimi per Seriem* $y=\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8\ldots$

P

Ponamus $y = Ax^2 + Bx^2 . \frac{x^2 - a^2}{a^2} + \frac{Cx^2 . (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}{a^2\, b^2} + \ldots$

unde $A = \frac{a'}{a^2}$; $\frac{b^2 - a^2}{a^2} B = \frac{b'}{b^2} - A$; $\frac{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{a^2\, b^2} C = \frac{c'}{c^2} A - B . \frac{(c^2 - a^2)}{a^2}$

unde $A = \frac{a'}{a^2}$; $B = a^2 \left(\frac{b'}{b^2 . (b^2 - a^2)} + \frac{a'}{a^2 . (a^2 - b^2)} \right.$;

$$C = a^2 b^2 \left(\frac{c'}{c^2 . (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} + \frac{b'}{b^2 . (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \right.$$

$$\left. + \frac{a'}{a^2 . (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \right).$$

et ita reliqui Coefficientes.

§. 420. *Coroll.* I.

Si igitur Aequatio inter x et y, ut in primo casu, est formae: $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$ vel si $y = A + \frac{B . (x - a')}{a} + \frac{C . (x - a)(x - b)}{ab} \ldots$, atque ponitur $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 4$; $e = 5$, etc., erit:

$A = a'$

$B = b' - a'$

$C = c' - 2b' + a'$

$D = d' - 3c' + 3b' - a'$

$E = e' - 4d' + 6c' - 4b' + a'$, ubi numeri determinati sunt binomiales, atque universe $m$timus Coefficiens est:

$$M = \pm \left(a' - (n-1) b' + \frac{(n-1)(n-2)}{1 . 2} c' - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3} d' \ldots \right)$$

Ergo $y = a' + (b' - a')(x-1) + \frac{(c' - 2b' + a')(x-1)(x-2)}{1 . 2}$

$$+ \frac{(d' - 3c' + 3b' - a')(x-1)(x-2)(x-3)}{1 . 2 . 3} \ldots$$

§. 421.

§. 421. *Coroll.* 2.

Si Aequatio inter x et y est, ut in secundo casu, formae: $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots$, vel si $y = Ax + \frac{Bx.(x-a)}{a} + \frac{Cx.(x-a)(x-b)}{ab} + \ldots$ atque ponitur $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 4$ etc. erit:

$A = a'$

$2B = b' - 2a'$

$3C = c' - 3b' + 3a'$

$4D = d' - 4c' + 6b' - 4a'$, et ita deinceps; ubi numeri determinati sunt binominales, atque $m$timus Coefficiens est:

$$M = \pm\frac{1}{m}\left(ma' - \frac{m.(m-1)}{1.2}b' + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}c' \ldots\right.$$

$$\text{Ergo } y = a'x + \frac{(b'-2a')x.(x-1)}{1.2} + \frac{(c'-3b'+3a')x.(x-1)(x-2)}{1.2.3}$$

$$+ \frac{(d'-4c'+6b'-4a')x.(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} + \ldots$$

§. 422. *Coroll.* 3.

Ex $(n+1)$ terminis alicujus Seriei, in qua $n$timae Differentiae aequales sunt (§. 359.) invenitur y, sive quilibet $x$timus terminus, ope Aequationis §. 420.

$$y = a' + (b'-a')(x-1) + \frac{(c'-2b'+a')(x-1)(x-2)}{1.2} + .$$

Tum enim a', b', c', y significant primum, secundum, tertium ... x terminum, atque Aequatio inter x et y debet esse formae $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$

Est

Est eadem Aequatio, quae exposita est §. 358. I. si confertur cum §. 356.

Ergo si priores termini sunt 80, 52, 33, 21, erit $A = 80$; $B = -28$; $C = 9$; $D = -2$; E, atque reliqui Coefficientes evanescunt; unde

$$= 80 - 28.(x-1) + 9.\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} \quad \frac{2(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}$$

§. 423. *Coroll.* 4.

Ex $(n+1)$ terminis alicujus Seriei, in qua ultimae Differentiae aequales sunt (§. 359.) invenitur y, id est, Summa x terminorum, ope Aequationis (§. 421.)

$$= a'x + \frac{(b'-2a')x.(x-1)}{1.2} + \frac{(c'-3b'+3a')x.(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

quoniam tum Aequatio inter x et y debet esse formae $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$

In hac Aequatione a' est primus terminus, b', c', d', est summa duorum, trium, quatuor priorum terminorum, ergo in exemplo §. 422. est $a' = 80$, $b' = 132$, $c' = 165$, $d' = 186$;

unde $y = 80x - \frac{28x.(x-1)}{1.2} + \frac{9x.(x-1)(x-2)}{1.2.3}$

$$- \frac{2x.(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} = 80x - 14x.(x-1)$$

$$+ \frac{3x.(x-1)(x-2)}{2} - \frac{x.(x-1)(x-2)(x-3)}{3.4}.$$

§. 424. *Coroll.* 5.

Si Aequatio, ut in tertio casu, est formae:

$y =$

$y = \alpha x + \beta x^3 + \gamma x^5 \ldots$, vel si $y = Ax + \frac{Bx.(x^2 - a^2)}{a^2}$ $+ \frac{Cx.(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}{a^2 b^2} + \ldots$, atque ponitur $a = 1$, $b = 2$ $c = 3$, $d = 4 \ldots$, erit

$$A = a'$$

$$\begin{array}{lll} 3.\ 2, B = & 6B = b' - 2a'. \\ 6.\ 5.C = & 30C = c' - 4b' + 5a'. \\ 10.\ 14.D = & 140D = d' - 6c' + 14b' - 14a'. \\ 15.\ 42.E = & 630E = e' - 8d' + 27c' - 48b' + 42a' \\ 21.\ 132.F = & 2772F = f' - 10e' + 44d' - 110c' + 165b' - 132a'. \\ 28.\ 429.G = & 12012G = g' - 12f' + 65e' - 208d' + 429c' - 572b' \\ & + 429a'. \end{array}$$

Ergo si M est $m$timus Coefficiens, erit

$$\frac{m.(m+1)\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}.M = m' - (2m-2)l'$$
$$+ \left[\frac{(2m-2)(2m-3)}{1.2} - 1\right]k' - \left[\frac{(2m-2)(2m-3)(2m-4)}{1.2.3}\right.$$
$$\left. - (2m-2)\right]i' + \left[\frac{(2m-2)\ldots(2m-5)}{1.2.3.4} - \frac{(2m-2)(2m-3)}{1.2}\right]h'$$
$$\ldots \pm \frac{2.(m+2)(m+3)\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}a'.$$

Etenim ultimi termini a' Factor est:

$$= \frac{(2m-2)(2m-3)\ldots m}{1.2.3\ldots m-1} - \frac{(2m-2)(2m-3)\ldots m+2}{1.2\ldots m-3}.$$
$$= \frac{(2m-2)(2m-3)\ldots(m+2)}{1.2.3\ldots m-3}\left(\frac{m.(m+1)}{(m-1)(m-2)} - 1\right)$$
$$= \frac{(2m-2)(2m-3)\ldots(m+2)}{1.2\ldots(m-1)}.(4m-2)$$
$$= \frac{2(2m-1)(2m-2)(2m-3)\ldots(m+2)}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Fac-

atque Factor ipsius M est:

$$= \frac{m.(m+1)}{1.2} \cdot \frac{2.(2m-1)(2m-2)\ldots(m+2)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$= \frac{m.(m+1)\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)};$$

ergo $y = a'x + \frac{(b'-2a')x.(x^2-1)}{2.3} + \frac{(c'-4b'+5a')x.(x^2-1)(x^2-4)}{4.5.6}$

$+ \frac{(d'-6c'+14b'-14a')x.(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{4.9.10.14} + \ldots$

§. 425. *Coroll.* 6.

Si Aequatio, ut in quarto casu, est formae $y = \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 \ldots$, vel $y = Ax^2 + Bx^2 . \frac{(x^2 - a^2)}{a^2}$ $+ C.x^2 . \frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{a^2 b^2} + \ldots$, atque ponitur $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, etc. erit:

$$A = a'.$$

$3.\ 12.B =$	$36B = b' - 4a'.$
$6.\ 15.C =$	$90C = c' - 6b' + 15a'.$
$10.\ 56.D =$	$560D = d' - 8c' + 28b' - 56a'.$
$15.210.E =$	$3150E = e' - 10d' + 45c' - 120b' + 210a'.$
$21.792.F =$	$16632F = f' - 12e' + 66d' - 220c' + 495b' - 792a'$

Ergo si M est $m$timus Coefficiens erit:

$$\frac{m.(m+1)\ldots 2m}{2.1.2.3\ldots(m-1)} M = m' - 2ml' + \frac{2m.(2m-1)}{1.2} k'$$

$$- \frac{2m.(2m-1)(2m-2)}{1.2.3} i' \ldots \pm \frac{(m+2)(m+3)\ldots 2m}{1.2.3\ldots(m-1)} a';$$

ergo $y = a'x^2 + \frac{(b'-4a')x^2.(x^2-1)}{3.12}$

+

$$+\frac{(c'-6b'+15a')\,x^2\,.\,(x^2-1)(x^2-4)}{4\,.\,6\,.\,15}$$

$$+\frac{(d'-8c'+28b'-56a')\,x^2\,.\,(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)}{4\,.\,9\,.\,10\,.\,56}+\ldots$$

§. 426. *Animadv.*

Hae formulae (§. 419 — 425.) inserviunt interpolationi, quoniam pro x quilibet numerus sumi potest, sive fractus, sive integer. Confer. Klügel *Lexicon* ad vocem *Einschalten* T. II. p. 10 seqq. Lamberts *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik* T. III. *Zusätze zu den Logar. und Trigon. Tabellen* Tab. 38. La Grange *Memoires de l'Academie Franc.* A. 1771, atque 1792 et 1793. La Place *Mem. de l'Acad. Franc.* A. 1779. Newtom jam de his egit in ejus *Principiis Philos. Nat.* Lib. III. L. 5.

P. II. C. IV. SECTIO IV.

De aliis Seriebus et modis, quibus Fractio, vel Ratio inter duo Quanta exprimi posset. De Fractionibus continuis.

§. 427. *De Serie Fractionis, orta ex Numeratoris Multiplicatione.*

Sunt aliae Series, quibus exprimi possunt Fractiones, quarum Specimen primum prodeat ex continua

tinua Numeratoris Multiplicatione, hoc quidem modo.

Proponatur Fractio $\frac{x}{y}$, ubi $x<y$. Sint $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots \overset{(n)}{m}$, numeri integri, atque Numeratorum Multiplicatores; $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu} \ldots \overset{(n)}{\mu}$ sint Quoti integri, atque $\overset{(1)}{r}, \overset{(2)}{r}, \overset{(3)}{r} \ldots \overset{(n)}{r}$ sint Residua ex Divisione sed singula minora, quam ipsorum Divisores; ita quidem ut sit:

$$\frac{\overset{(1)}{m}.x}{y} = \overset{(1)}{\mu} + \frac{\overset{(1)}{r}}{y};\ \frac{\overset{(2)}{m}.\overset{(1)}{r}}{y} = \overset{(2)}{\mu} + \frac{\overset{(2)}{r}}{y};\ \frac{\overset{(3)}{m}.\overset{(2)}{r}}{y} = \overset{(3)}{\mu} + \frac{\overset{(3)}{r}}{y} \text{ etc. unde}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}} + \frac{\overset{(1)}{r}}{\overset{(1)}{m}.y};\ \frac{\overset{(1)}{r}}{y} = \frac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}} + \frac{\overset{(2)}{r}}{\overset{(2)}{m}.y};\ \frac{\overset{(2)}{r}}{y} = \frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}} + \frac{\overset{(3)}{r}}{\overset{(3)}{m}.y} \text{ et ita deinceps}$$

Ex his prodit Series:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}} + \frac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}} + \frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}} + \frac{\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m}} \ldots + \frac{\overset{(n)}{\mu} + \overset{(n)}{r} : y}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m} \ldots \overset{(n)}{m}}$$

Sit v. c. $\overset{(1)}{m}=2$; $\overset{(2)}{m}=3$; $\overset{(3)}{m}=4$; $\overset{(4)}{m}=5$; $\overset{(5)}{m}=6$; ... atque progrediantur Series, donec evanescat Residuum. Tum fit:

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{2.3.4.5} + \frac{5}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5}.$$

§. 428. *Coroll.* 1.

Sit $\overset{(1)}{m} = \overset{(2)}{m} = \overset{(3)}{m} = m$, ita ut Multiplicatores inter se aequales sint. Series fit:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{m} + \frac{\overset{(2)}{\mu}}{m^2} + \frac{\overset{(3)}{\mu}}{m^3} + \frac{\overset{(4)}{\mu}}{m^4} \ldots + \frac{\overset{(n)}{\mu} + \overset{(n)}{r} : y}{m^n};$$

velut si $m = 2$, erit $\frac{1}{7} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} \ldots + \frac{1 + \frac{1}{7}}{2^{3n}}$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} \ldots + \frac{1 + \frac{1}{7}}{8^n}$ (quod convenit cum §. 204. p. 236. ubi $a = \frac{1}{8} = q$; $m = n$).

§. 429. *Coroll.* 2.

Si $m = 10$, prodit mutatio Fractionis vulgaris in Fractionem decimalem (§. 293 seqq.)

$$\frac{x}{y} = \frac{\mu}{10} + \frac{\mu}{10^2} + \frac{\mu}{10^3} + \ldots \text{ ut } \frac{x}{y} = \frac{1}{7} = 0,(142857).$$

§. 430. *Coroll.* 3.

Similiter oriuntur Fractiones periodicae, quarum numerus fundamentalis m non est 10; quae eodem modo, quo Periodi decimales, designatae, hanc induunt formam:

$\frac{1}{7} = 0,(001)$, ubi $m = 2$; $\frac{1}{7} = 0,(010212)$, ubi $m = 3$;

$\frac{1}{7} = 0,(021)$, ubi $m = 4$; $\frac{1}{7} = 0,(032412)$, ubi $m = 5$;

$\frac{1}{7}$

$\frac{1}{7} = 0,(05)$, ubi $m = 6$; $\frac{1}{7} = 0,(1)$, ubi $m = 8$; et universe $\frac{1}{m-1} = 0,(1)$, si numerus fundamentalis est m; $\frac{1}{m+1} = 0,(0,\overline{m-1})$.

§. 431. *Coroll.* 4.

Quod de numeris, idem valet de quibuslibet Quantis. Quare si x et y sunt Quanta homogenea v. c. lineae rectae, Series indicat ipsorum rationem, ita ut exhibeatur modus, quo x per y, atque y per x metiri possimus. Si x et y sunt incommensurabilia, Series ipsa est infinita.

§. 432. *Coroll.* 5.

Utimur hoc modo exprimendi rationem in Divisione Quantorum. Ita ex Divisione diei (§. 129. 2.) prodit $\frac{6}{7}$ partes diei sunt $\frac{17}{24} + \frac{51}{24.60} + \frac{25}{24.60^2} + \frac{42 + \frac{6}{7}}{24.60^3}$, id est $17^h\ 51'\ 25''\ 42''' + \frac{6'''}{7}$

§. 433. *Coroll.* 6.

Si in Divisione non minor, ut plerumque fit, sed major sumitur Quotus, Residuum r fit negativum: ut si pro $\frac{27}{7} = 3 + \frac{6}{7}$ ponitur $4 - \frac{1}{7}$. Velut $\frac{1}{7} = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.7}$ ubi Residua sunt positiva, sed

$\frac{1}{7}$

$\frac{1}{7} = \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$ ubi Residua sunt negativa.

§. 434. *Alia Series.*

Proponatur Fractio $\frac{x}{y}$. Sint $\overset{(1)}{z}, \overset{(2)}{z}, \overset{(3)}{z} \ldots$ Divisores; $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots$ atque $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu} \ldots$ Quoti, et $\overset{(1)}{r}, \overset{(2)}{r}, \overset{(3)}{r} \ldots$ Residua ex Divisione, hac ratione.

1. $\frac{x}{\overset{(1)}{z}} = \overset{(1)}{\mu};\ \frac{y}{\overset{(1)}{z}} = \overset{(1)}{m} + \frac{\overset{(1)}{r}}{\overset{(1)}{z}}$, unde $y = \overset{(1)}{m}\overset{(1)}{z} + \overset{(1)}{r};\ x = \overset{(1)}{\mu}\overset{(1)}{z} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}$

2. $\frac{\overset{(1)}{r}}{\overset{(2)}{z}} = \overset{(2)}{\mu};\ \frac{y}{\overset{(2)}{z}} = \overset{(2)}{m} + \frac{\overset{(2)}{r}}{\overset{(2)}{z}}$, unde $y = \overset{(2)}{m}\overset{(2)}{z} + \overset{(2)}{r};\ \overset{(1)}{r} = \overset{(2)}{\mu}\overset{(2)}{z} = \frac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}}$

3. $\frac{\overset{(2)}{r}}{\overset{(3)}{z}} = \overset{(3)}{\mu};\ \frac{y}{\overset{(3)}{z}} = \overset{(3)}{m} + \frac{\overset{(3)}{r}}{\overset{(3)}{z}}$, unde $y = \overset{(3)}{m}.\overset{(3)}{z} + \overset{(3)}{r};\ \overset{(2)}{r} = \overset{(3)}{\mu}\overset{(3)}{z} = \frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}$

Ergo $\frac{x}{y} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}\left(1 - \frac{\overset{(1)}{r}}{y}\right);\ \frac{\overset{(1)}{r}}{y} = \frac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}}\left(1 - \frac{\overset{(2)}{r}}{y}\right);\ \frac{\overset{(2)}{r}}{y} = \frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}\left(1 - \frac{\overset{(3)}{r}}{y}\right)$.. deinceps. Ex quo sequitur Series:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}} - \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}} + \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}} - \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdot\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m}} \ldots \pm \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdots\overset{(n)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(n)}{m}}$$

primus terminus major, secundus minor est quam Fractio tota $\frac{x}{y}$, tertius est minor, et ita per vices termini majores et minores sunt.

§. 435.

§. 435. *Coroll.* 1.

Si x et y sunt Quanta v. c. lineae, quarum Ratio $\frac{x}{y}$ est definienda, haec methodus praescribit, ut eligatur mensura $\overset{(1)}{z}$, quae sit pars aliquota lineae x, ita ut x sit $= \overset{(1)}{\mu}\,\overset{(1)}{z}$. Si haec mensura etiam est pars aliquota lineae y, ita ut $y = \overset{(1)}{m}\,\overset{(1)}{z}$, erit $\frac{x}{y} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}$. Si secus est, ita ut sit $y = \overset{(1)}{m}\,\overset{(1)}{z} + \overset{(1)}{r}$, eligatur mensura $\overset{(2)}{z}$ quae sit hujus Residui $\overset{(1)}{r}$ pars $\overset{(1)}{\mu}$tima. Si haec mensura etiam est pars aliquota lineae y; ita ut sit $\frac{y}{\overset{(2)}{z}} = \overset{(2)}{m}$, erit $\frac{x}{y} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}} - \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}\,\overset{(2)}{m}}$.

Sed si $\overset{(1)}{z}$ non est pars aliquota lineae y, eodem modo progrediendum est. Si Quanta sunt incommensurabilia, semper aliquod est Residuum.

§. 436. *Coroll.* 2.

Series simplicior redditur si $\overset{(1)}{\mu} = \overset{(2)}{\mu}\,\overset{(3)}{\mu} \ldots = 1$. Tum enim fit:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\overset{(1)}{m}} - \frac{1}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}} + \frac{1}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}} - \frac{1}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m}} \ldots \pm \frac{1 - \frac{\overset{(n)}{r}}{y}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}\ldots\overset{(n)}{m}}$$

atque Aequationes sunt:

$\frac{y}{z}$

$$\frac{x}{y} = \overset{(1)}{m} + \frac{\overset{(1)}{r}}{x}\,;\ \frac{y}{\underset{(1)}{r}} = \overset{(2)}{m} + \frac{\overset{(2)}{r}}{\underset{(1)}{r}}\,;\ \frac{y}{\underset{(2)}{r}} = \overset{(3)}{m} + \frac{\overset{(3)}{r}}{\underset{(2)}{r}} \text{ etc.}$$

Ergo tum nulla fit Divisio Quanti x per x, sed solius y, quod primum per x, deinde per *primum*, tum per *secundum* dividitur Residuum et ita deinceps:

elut $87 = 3.23 + 18 = 4.18 + 15 = 5.15 + 12 = 7.12 + 3 = 29.3$

rgo $\frac{23}{87} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.5} - \frac{1}{3.4.5.7} + \frac{1}{3.4.5.7.29}$.

Si Residua sumuntur negativa, omnes Seriei termini redduntur positivi, ut

$$87 = 4.23 - 5 = 5.18 - 3 = 29.3,$$

$$\text{ergo } \frac{23}{87} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4.18} + \frac{1}{4.18.29}.$$

Si $x > y$, ponatur $\frac{x}{y} = m + \frac{R}{y}$;

rgo $y = \overset{(1)}{m} R + \overset{(1)}{r} =$ etc. ut $\frac{197}{87} = 2 + \frac{23}{87} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.4}$ etc.

Series, quae ita prodeunt, maxime sunt convergentes, quoniam Residua, atque igitur ejusdem numeri Divisores magis magisque diminuuntur; ex quo fit, ut Quoti, $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots$ increscant. Has Series primus exposuit Lambert.

Ut major fiat convergentia, Quoti majores semper sumantur, adeo ut Residua tum positiva, tum negativa sint, ut 3, 14159265 3589 7932 3846 2643 ...

$$= 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{7.113.4739} + \frac{1}{7.113.4739.46804} \text{ etc.}$$

Haec est ratio inter Diametrum et Peripheriam cir-

cir-

circuli, quae vulgo indicari solet litera π. Nam si Diameter est unitas, Perpheria est 3, 14159...

§. 437. *Fractio continua universalis.* *Definitio.*

Hac Serie ducimur ad eam conversionem Fractionis, qua singularem quandam induit formam, quam *Fractionem continuam* dicere solent. Hujus formae multiplex usus est in Arithmetica universali. Ut maxime generalis reddatur, ponamus:

$$\frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}+r};\ \overset{(1)}{r}=\frac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}+\overset{(2)}{r}};\ \overset{(2)}{r}=\frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}+\overset{(3)}{r}};\ \overset{(3)}{r}=\frac{\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(4)}{m}+\overset{(4)}{r}}\ldots\ \overset{(n)}{r}=\frac{\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n+1)}{m}+\overset{(n+1)}{r}}$$

ubi numeri 1, 2, 3 ... n, $n+1$ indicant, quotus sit Numerator, Divisor et Residuum.

Ex quo prodit haec forma Fractionis $\frac{\mu}{m}$:

$$\frac{\mu}{m}=\cfrac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}+\cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}+\cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}+\cfrac{\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(4)}{m}+\cfrac{\overset{(5)}{\mu}}{\overset{(5)}{m}}}}}}\quad \text{velut } \frac{\mu}{m}=\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7+\cfrac{8}{9+\cfrac{10}{11}}}}}$$

Posterius membrum hujus Aequationis dicitur *Fractio continua*, cui igitur voci haec vis est subjecta, ut sit *ea Fractio, cujus Denominator est Summa cujuslibet numeri et Fractionis, cujus Denomi-*

minator etiam est ejusmodi Summa et ita deinceps.

Caeterum $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu} \ldots$ atque $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots$ possunt etiam esse negativi.

§. 438. *Coroll.* 1.

Ut $\frac{\mu}{m}$ ita etiam $\overset{(1)}{r}, \overset{(2)}{r}, \overset{(3)}{r} \ldots$ per Fractiones continuas exprimere possumus, ut:

$$\overset{(1)}{r} = \cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m} + \cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m} + \cfrac{\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(4)}{m} +}}} \qquad \overset{(2)}{r} = \cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m} + \cfrac{\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(4)}{m} +}}$$

§. 439. *Coroll.* 2.

$$\frac{\mu}{m \cdot \overset{(1)}{\mu}} = \cfrac{1}{\overset{(1)}{m} + \cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m} + \cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m} +}}} \quad \text{ergo} \quad \frac{m \cdot \overset{(1)}{\mu}}{\mu} = \overset{(1)}{m} + \cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{m} + \cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(2)}{m} + \ldots}}$$

eodem modo $\frac{\mu}{2m} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{9 +}}}}$ ergo $\frac{2m}{\mu} = 3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{9 + \ldots}}}$

Qua-

Quare harum Formarum $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+f\dots}}$ et $\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f}}}$

altera in alteram mutari potest.

§. 440. *Coroll.* 3.

Fractio continua finita et infinita.

Fractio continua est finita, vel alicubi abrumpitur, si aliquod evanescit Residuum.

Nam $\overset{(n)}{r} = \cfrac{\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n+1)}{m} + \overset{(n+1)}{r}}$ ergo si $\overset{(n+1)}{r} = 0$, erit $\overset{(n)}{r} = \cfrac{\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n+1)}{m}}$.

ut si $\overset{(3)}{r} = 0$, erit $\overset{(2)}{r} = \cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}$, atque $\frac{\mu}{m} = \cfrac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}+\cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}+\cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}}}$

Sed si nullum potest evanescere Residuum, Fractio est *infinita*, id est, in infinitum usque excurrit; quod accidit in Functionibus irrationalibus et transcendentibus, ubi m et μ sunt Quanta incommensurabilia.

§. 441. *Coroll.* 4. *Termini Fractionis continuae. Definitio.*

Fractiones $\cfrac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}$, $\cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}}$, $\cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}$ ... dicuntur *termini Fractionis continuae*, ex quibus igitur $\overset{(1)}{\mu}$, $\overset{(2)}{\mu}$, $\overset{(3)}{\mu}$ ...

sunt *Numeratores* et $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots$ sunt *Denominatores terminorum.*

§. 442. *Coroll.* 5.

Numeratores et Denominatores terminorum $\frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}, \frac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}} \ldots$, salvo valore Fractionis continuae, per eundem numerum multiplicari vel dividi possunt, ut id fit in aliis Fractionibus (§. 164.), dummodo Numerator consequentis termini per eundem numerum multiplicetur vel dividatur, ut $\frac{a}{b+\frac{c}{d}} = \frac{1}{b:a+\frac{c:a}{d}}$. Haec Multiplicatio et Divisio saepe usu venit, ut simplicior reddatur Fractio, quae ut commode fiant, partienda est Fractio, ut si proponitur:

$$F = \cfrac{a\overset{(1)}{p}}{\overset{(1)}{p} + \cfrac{b\overset{(2)}{p} : a}{\left(\overset{(2)}{p}(a-b) : a\overset{(1)}{p}\right) + \cfrac{c\overset{(3)}{p} : b\overset{(1)}{p}}{\left(\overset{(3)}{p}(b-c) : b\overset{(2)}{p}\right) + \cfrac{d\overset{(4)}{p} : c\overset{(2)}{p}}{\overset{(4)}{p}(c-d) : c \ldots}}}}$$

$$\text{sed } \frac{a\overset{(1)}{p}}{\overset{(1)}{p} + b\overset{(2)}{p} : a} = \frac{a}{1 + \left(b\overset{(2)}{p} : a\overset{(1)}{p}\right)}; \quad \frac{b\overset{(2)}{p} : a\overset{(1)}{p}}{\left(\overset{(2)}{p}(a-b) : a\overset{(1)}{p}\right) + \left(c\overset{(3)}{p} : b\overset{(1)}{p}\right. \ldots}$$

$$= \frac{b}{a-b+\left(ac\overset{(3)}{p} : b\overset{(2)}{p}\right)} \; ; \; \frac{ac\overset{(3)}{p} : b\overset{(2)}{p}}{\left(\overset{(3)}{p}(b-c) : b\overset{(2)}{p}\right) + d\overset{(4)}{p} : c\overset{(2)}{p}} \, .$$

$$= \frac{ac}{b-c+\left(bd\overset{(4)}{p} : c\overset{(3)}{p}\right)} \; ; \; \frac{bd\overset{(4)}{p} : c\overset{(3)}{p}}{\overset{(4)}{p}(c-d) : \overset{(3)}{p}c} = \frac{bd}{c-d} ;$$

$$\text{ergo } F = \cfrac{a}{1+\cfrac{b}{a-b+\cfrac{ac}{b-c+\cfrac{bd}{c-d.}}}}$$

§. 443. *Fractiones partiales. Definitio.*

Pars Fractionis continuae, quae prodit, si aliquod Residuuum $\overset{(1)}{r}, \overset{(2)}{r}, \overset{(3)}{r} \ldots$ itaque aliquis Numerator $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu} \ldots$ tanquam evanescens sumitur, dicitur *Fractio partialis.* Designentur primae, secundae, tertiae ... Fractiones partiales literis $\overset{(1)}{P}, \overset{(2)}{P}, \overset{(3)}{P} \ldots \overset{(n-1)}{P}, \overset{(n)}{P}, \overset{(n+1)}{P}$.

Ergo $\overset{(1)}{P} = \dfrac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}$, ubi $\overset{(2)}{\mu} = \overset{(1)}{r} = o$.

$\overset{(2)}{P} = \cfrac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m} + \cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}}}$, ubi $\overset{(2)}{r} = \overset{(3)}{\mu} = o$, etc.

Omnino Fractio partialis sit $\overset{(n)}{P}$, si $\overset{(n)}{r} = o$, atque igitur $\overset{(n+1)}{\mu} = o$. Progreditur usque ad termi-

terminum $\frac{\overset{(n)}{\mu}}{\overset{(n)}{m}}$, quoniam $\overset{(n+1)}{\mu} = o$. Quare harum Fractionum partialium Numeratores designantur literis $\overset{(1)}{\pi}, \overset{(2)}{\pi}, \overset{(3)}{\pi} \ldots \overset{(n-1)}{\pi}, \overset{(n)}{\pi}, \overset{(n+1)}{\pi}$, Denominatores autem literis $\overset{(1)}{p}, \overset{(2)}{p}, \overset{(3)}{p} \ldots \overset{(n-1)}{p}, \overset{(n)}{p}, \overset{(n+1)}{p}$.

§. 444. *Coroll.*

Ex his patet, $\overset{(1)}{P}$ majorem esse tota Fractione, quoniam $\overset{(1)}{r} = o$, ergo $\frac{\mu}{m} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m} + \frac{\overset{(1)}{r}}{}} < \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}$. Omnino $\overset{(n)}{P}$ aut major aut minor est tota Fractione, si evanescente $\overset{(n)}{r}$, Residuum $\overset{(1)}{r}$ aut augetur, aut diminuitur. Quare $\overset{(2)}{P}$ tota Fractione *minor* est, quoniam evanescente $\overset{(3)}{r}$, augetur $\overset{(1)}{r}$. $\overset{(3)}{P}$ *major* est, quia, evanescente $\overset{(3)}{r}$, augetur $\overset{(2)}{r}$, itaque $\overset{(1)}{r}$ diminuitur et ita de consequentibus. Quare Fractiones partiales per vices sunt majores et minores tota Fractione, ita ut, quae $2n+1$ sunt ordinis, majores, sed quae sunt $2n$ ordinis, minores sint; vel $\overset{(2n+1)}{P} > F$, sed $\overset{(2n)}{P} < F$. In hisce tamen posuimus, omnia Residua $\overset{(1)}{r}, \overset{(2)}{r}, \overset{(3)}{r}, \overset{(4)}{r} \ldots$ esse positiva.

§. 445.

§. 445. *Theorema.*

Quaelibet Fractio partialis $\overset{(n)}{P}$ ex duabus antecedentibus ita reperitur, ut sit:

$$\overset{(n)}{P} = \frac{\overset{(n-1)}{\pi}\,\overset{(n)}{m} + \overset{(n-2)}{\pi}\,\overset{(n)}{\mu}}{\overset{(n-1)}{p}\,\overset{(n)}{m} + \overset{(n-2)}{p}\,\overset{(n)}{\mu}}$$

Demonstratio.

1. $\overset{(1)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\pi}}{\overset{(1)}{p}} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}$, quae est prima Fractio partialis. Ergo $\overset{(1)}{\pi} = \overset{(1)}{\mu}$ et $\overset{(1)}{p} = \overset{(1)}{m}$.
Nulla enim reductione Fractorum in his utimur.

2. $\overset{(2)}{P}$ reperitur, ponendo in prima Fractione $\overset{(1)}{m} + \frac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}}$ pro $\overset{(1)}{m}$;

unde $\overset{(2)}{P} = \frac{\overset{(2)}{\pi}}{\overset{(2)}{p}} = \frac{\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{m}+\overset{(2)}{\mu}} = \frac{\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{\pi}}{\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{p}+\overset{(2)}{\mu}}$ ergo $\overset{(2)}{\pi} = \overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{\pi}$, $\overset{(2)}{p} = \overset{(2)}{m}\cdot\overset{(1)}{p}+\overset{(2)}{\mu}$.

3. $\overset{(3)}{P}$ definitur, ponendo in $\overset{(2)}{P}$, $\overset{(2)}{m}+\frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}$ pro $\overset{(2)}{m}$; ergo $\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{\pi}$ fit

$\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{\pi} + \overset{(1)}{\pi}\frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}} = \overset{(2)}{\pi} + \overset{(1)}{\pi}\frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}$, atque $\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{p}+\overset{(2)}{\mu}$ fit $\overset{(1)}{p}\left(\overset{(2)}{m}+\frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}\right)+\overset{(2)}{\mu}$

$= \overset{(2)}{p} + \overset{(1)}{p}\frac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m}}$; ergo $\overset{(3)}{P} = \frac{\overset{(3)}{\pi}}{\overset{(3)}{p}} = \frac{\overset{(2)}{\pi}\,\overset{(3)}{m}+\overset{(1)}{\pi}\,\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(2)}{p}\,\overset{(3)}{m}+\overset{(1)}{p}\,\overset{(3)}{\mu}}$; ergo $\overset{(3)}{\pi} = \overset{(2)}{\pi}\,\overset{(3)}{m}+\overset{(1)}{\pi}\,\overset{(3)}{\mu}$, $\overset{(3)}{p} = \overset{(2)}{p}\,\overset{(3)}{m}+\overset{(1)}{p}\,\overset{(3)}{\mu}$.

4. $\overset{(4)}{P}$ reperitur, in $\overset{(3)}{P}$ ponendo $\overset{(3)}{m}+\frac{\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(4)}{m}}$ pro $\overset{(3)}{m}$. Tum eodem modo fit

$$\overset{(4)}{P}=\frac{\overset{(4)}{\pi}}{\overset{(4)}{p}}=\frac{\overset{(3)(4)}{\pi}\,m+\overset{(2)(4)}{\pi}\,\mu}{\overset{(3)(4)}{p}\,m+\overset{(2)(4)}{p}\,\mu}.$$

Ita progrediendo ex inductione patet lex generalis. Ut eadem ex accurata demonstratione perspiciatur, ostendendum est, si valet de $n$tima Fractione partiali, eam etiam valere de $n+1$ tima Fractione, id est:

si $\overset{(n)}{P}=\frac{\overset{(n-1)(n)}{\pi}\,m+\overset{(n-2)(n)}{\pi}\,\mu}{\overset{(n-1)(n)}{p}\,m+\overset{(n-2)(n)}{p}\,\mu}$ esse $\overset{(n+1)}{P}=\frac{\overset{(n)(n+1)}{\pi}\,m+\overset{(n-1)(n+1)}{\pi}\,\mu}{\overset{(n)(n+1)}{p}\,m+\overset{(n-1)(n+1)}{p}\,\mu}$

qnod ita colligitur:

Ut reperiatur $\overset{(n+1)}{P}$ ex $\overset{(n)}{P}$ ponendum est $\overset{(n)}{m}+\frac{\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n+1)}{m}}$ pro $\overset{(n)}{m}$.

$$\text{Ergo }\overset{(n+1)}{P}=\frac{\overset{(n-1)}{\pi}\left(\overset{(n)}{m}+\overset{(n+1)}{\mu}:\overset{(n+1)}{m}\right)+\overset{(n-2)(n)}{\pi}\,\mu}{\overset{(n-1)}{p}\left(\overset{(n)}{m}+\overset{(n+1)}{\mu}:\overset{(n+1)}{m}\right)+\overset{(n-2)(n)}{p}\,\mu}=\frac{\overset{(n)}{\pi}+\overset{(n-1)}{\pi}\,\overset{(n+1)}{\mu}:\overset{(n+1)}{m}}{\overset{(n)}{p}+\overset{(n-1)}{p}\,\overset{(n+1)}{\mu}:\overset{(n+1)}{m}}$$

$$=\frac{\overset{(n)(n+1)}{\pi}\,m+\overset{(n-1)(n+1)}{\pi}\,\mu}{\overset{(n)(n+1)}{p}\,m+\overset{(n-1)(n+1)}{p}\,\mu}.$$

Quare haec lex maxime est universalis atque hujus argumenti:

Numerator Fractionis partialis, quae usque ad ntimum terminum progreditur est Summa duorum Productorum, quae efficiuntur, si Denominator ntimi termini multiplicatur per Numeratorem Fractio-

tionis partialis proxime antecedentis, atque Numerator hujus ntimi termini per Numeratorem Fractionis partialis secundo loco antecedentis.

Denominator autem eodem modo definitur, dummodo in locum Numeratorum Fractionum partialium substituantur Denominatores.

§. 446. *Coroll.* I.

Duce hac lege facile computantur Fractiones partiales cujusque ordinis. Quod quo magis pateat, haec inspiciatur Tabula, ad cujus normam Fractiones reperiri possunt.

erminor. Numerator.	$\overset{(1)}{\mu}$;	$\overset{(2)}{\mu}$;	$\overset{(3)}{\mu}$;	$\overset{(4)}{\mu}$
. . . Denominat.	$\overset{(1)}{m}$;	$\overset{(2)}{m}$;	$\overset{(3)}{m}$;	$\overset{(4)}{m}$
action. partial. Num.	$\overset{(1)}{\mu}$;	$\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{\pi}$;	$\overset{(3)}{m}\,\overset{(2)}{\pi}+\overset{(3)}{\mu}\,\overset{(1)}{\pi}$;	$\overset{(4)}{m}\,\overset{(3)}{\pi}+\overset{(4)}{\mu}\,\overset{(2)}{\pi}$
. . . . . Den.	$\overset{(1)}{m}$;	$\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{p}+\overset{(2)}{\mu}$;	$\overset{(3)}{m}\,\overset{(2)}{p}+\overset{(3)}{\mu}\,\overset{(1)}{p}$;	$\overset{(4)}{m}\,\overset{(3)}{p}+\overset{(4)}{\mu}\,\overset{(2)}{p}$
ractiones Partiales $\frac{0}{1}$;	$\frac{\overset{(1)}{\pi}}{\overset{(1)}{p}}$;	$\frac{\overset{(2)}{\pi}}{\overset{(2)}{p}}$;	$\frac{\overset{(3)}{\pi}}{\overset{(3)}{p}}$;	$\frac{\overset{(4)}{\pi}}{\overset{(4)}{p}}$.

etc.

Proponatur Fractio continua $\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{6}{7+\cfrac{8}{9+\cfrac{10}{11+\cfrac{12}{13+\ldots}}}}}}$

Ter-

Term. Num.	2; 4	; 6	; 8	; 10
. . . Den.	3; 5	; 7	; 9	; 11
Fract. part. Num.	2; 5.2	; 7.10 + 6.2; 9.82	+ 8.10; 11.818	+ 10.82;
. . . . Den.	3; 5.3 + 4	; 7.19 + 6.3; 9.151	+ 8.19; 11.1511	+ 10.151;
. . . . Part.	$\frac{0}{1}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{10}{19}$	; $\frac{82}{151}$	; $\frac{818}{1511}$; $\frac{9818}{18131}$; $\frac{137450}{253835}$	;

Hae Fractiones partiales, si decimalibus indicantur, sunt:

0,6666...; 0,5263156...; 0,5430457...; 0,5413632...; 0,5415035...; 0,5414932...; 0,5414940... Ex quo concludimus, totam Fractionem esse majorem quam 0,5414932... sed minorem quam 0,5141940. Differentiae inter has Fractiones magis magisque diminuuntur. Sunt enim: − 0,1403510...; + 0,0167301...; − 0,0016825...; + 0,0001403; − 0,0000103; + 0,0000008.

§. 447. *Coroll.* 2.

Si Fractiones partiales antecedentibus Fractionibus non indicantur, ita definiuntur:

$$\overset{(1)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}}\,;\quad \overset{(2)}{P} = \frac{\overset{(2)}{m}.\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m} + \overset{(2)}{\mu}}\,;\quad \overset{(3)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}\left(\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m} + \overset{(3)}{\mu}\right)}{\overset{(1)}{m}\left(\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m} + \overset{(3)}{\mu}\right) + \overset{(2)}{\mu}.\overset{(3)}{m}}\,;$$

$$\overset{(4)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}\left(\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m} + \overset{(2)}{m}\,\overset{(4)}{\mu} + \overset{(4)}{m}\,\overset{(3)}{\mu}\right)}{\overset{(1)}{m}\left(\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m} + \overset{(2)}{m}\,\overset{(4)}{\mu} + \overset{(4)}{m}\,\overset{(3)}{\mu}\right) + \overset{(2)}{\mu}\left(\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m} + \overset{(4)}{\mu}\right)}.$$

etc.

§. 448. *Theorema.*

$$\overset{(n)}{P} - \overset{(n+1)}{P} = \frac{\overset{(n+1)}{\mu}\left(\overset{(n)}{P} - \overset{(n-1)}{P}\right)\overset{(n-1)}{p}}{\overset{(n+1)}{p}}.$$

De-

Demonstratio.

$$\overset{(n)}{P} - \overset{(1+n)}{P} = \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}} - \frac{\overset{(n+1)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{p}} = \frac{\overset{(n)}{\pi}\cdot\overset{(n+1)}{p} - \overset{(n)}{p}\cdot\overset{(n+1)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}\cdot\overset{(n+1)}{p}}.\ (\S.\ 184.)$$

Numerator est $\overset{(n)}{\pi}\left(\overset{(n)}{p}\,\overset{(n+1)}{m} + \overset{(n-1)}{p}\,\overset{(n+1)}{\mu}\right) - \overset{(n)}{p}\left(\overset{(n)}{\pi}\,\overset{(n+1)}{m} + \overset{(n-1)}{\pi}\,\overset{(n+1)}{\mu}\right)$ (§. 445.) $= \overset{(n+1)}{\mu}\left(\overset{(n-1)}{p}\,\overset{(n)}{\pi} - \overset{(n)}{p}\cdot\overset{(n-1)}{\pi}\right)$;

et cum sit $\overset{(n)}{P} - \overset{(n-1)}{P} = \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}} - \frac{\overset{(n-1)}{\pi}}{\overset{(n-1)}{p}} = \frac{\overset{(n)}{\pi}\cdot\overset{(n-1)}{p} - \overset{(n)}{p}\,\overset{(n-1)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}\cdot\overset{(n-1)}{p}}$ (§. 184.)

hic Numerator est $= \overset{(n+1)}{\mu}\left(\overset{(n)}{P} - \overset{(n-1)}{P}\right)\overset{(n)}{p}\cdot\overset{(n-1)}{p}$.

unde $\overset{(n)}{P} - \overset{(n+1)}{P} = \frac{\overset{(n+1)}{\mu}\left(\overset{(n)}{P} - \overset{(n-1)}{P}\right)\overset{(n-1)}{p}}{\overset{(n+1)}{p}}$.

§. 449. *Coroll.* 1.

$\overset{(2)}{P} - \overset{(1)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}\,\overset{(2)}{m}}{\overset{(2)}{m}\,\overset{(1)}{m} + \overset{(2)}{\mu}} - \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m}} = \frac{-\overset{(1)}{\mu}\,\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{p}\,\overset{(1)}{p}}$ (§. 445. et §. 184.);

ergo $\overset{(2)}{P} - \overset{(3)}{P} = -\frac{\overset{(1)}{\mu}\,\overset{(2)}{\mu}\,\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(2)}{p}\,\overset{(3)}{p}}$ (§. 448.); atque $\overset{(3)}{P} - \overset{(4)}{P} = \frac{\overset{(4)}{\mu}\cdot\left(\overset{(3)}{P} - \overset{(2)}{P}\right)\overset{(2)}{p}}{\overset{(4)}{p}}$

$= \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdot\overset{(4)}{\mu}}{\overset{(3)}{p}\,\overset{(4)}{p}}$; $\overset{(4)}{P} - \overset{(5)}{P} = \frac{\overset{(5)}{\mu}\left(\overset{(4)}{P} - \overset{(3)}{P}\right)\overset{(3)}{p}}{\overset{(5)}{p}} = -\frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdot\overset{(4)}{\mu}\cdot\overset{(5)}{\mu}}{\overset{(4)}{p}\cdot\overset{(5)}{p}}$.

Ergo universe $\overset{(n)}{P} - \overset{(n+1)}{P} = \pm\frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdot\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n)}{p}\;\overset{(n+1)}{p}}$, ubi signum est +, si n est numerus impar, sed —, si par est.

Hanc legem esse universalem patet, si demonstratum fuerit:

si $\overset{(n)}{P} - \overset{(n+1)}{P} = \pm \dfrac{\overset{(1)}{\mu}\overset{(2)}{\mu}\overset{(3)}{\mu}\cdots\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n)}{p}\cdot\overset{(n+1)}{p}}$, esse $\overset{(n+1)}{P} - \overset{(n+2)}{P}$

$$= \mp \frac{\overset{(1)}{\mu}\overset{(2)}{\mu}\overset{(3)}{\mu}\cdots\overset{(n+2)}{\mu}}{\overset{(n+1)}{p}\ \overset{(n+2)}{p}}.$$

Quod verum esse, patet ex §. 448. Nam $\overset{(n+1)}{P} - \overset{(n+2)}{P}$

$$= \frac{\overset{(n+2)}{\mu}\cdot(\overset{(n+1)}{P} - \overset{(n)}{P})\overset{(n)}{p}}{\overset{(n+2)}{p}} = \mp \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdots\overset{(n+2)}{\mu}}{\overset{(n+1)}{p}\ \overset{(n+2)}{p}}.$$

velut §. 446. $\frac{2}{3} - \frac{10}{19} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 19}$; $\frac{10}{19} - \frac{82}{151} = \frac{-2\cdot 4\cdot 6}{19\cdot 151}$

$\frac{82}{151} - \frac{818}{1511} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{151\cdot 1511}$ etc.

§. 450. *Coroll.* 2.

Quoniam duarum Fractionum $\overset{(n)}{P}$ et $\overset{(n+1)}{P}$ altera est major, altera est minor tota Fractione, sequitur, quamlibet Fractionem partialem $\overset{(n)}{P}$ minus differre a tota Fractione, quam $\dfrac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdots\overset{(n+1)}{\mu}}{(\overset{(n)}{p})^2}$, quoniam

$$\frac{\overset{(1)}{\mu}\ \overset{(2)}{\mu}\cdots\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n)}{p}\ \overset{(n+1)}{p}} < \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdots\overset{(n+1)}{\mu}}{(\overset{(n)}{p})^2}.$$

§. 451.

§. 451. *Coroll.* 3.

$$\overset{(n+1)}{P} = \overset{(n)}{P} \pm \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdots\overset{(n+1)}{\mu}}{\overset{(n)}{p}\ \overset{(n+1)}{p}}$$ (§. 149.). Signum est +, si n est numerus *par*, sed —, si est numerus *impar*.

§. 452. *Coroll.* 4.

$$\overset{(n)}{\pi}\ \overset{(n+1)}{p} - \overset{(n+1)}{\pi}\ \overset{(n)}{p} = (\overset{(n+1)}{P} - \overset{(n)}{P})\ \overset{(n)}{p}\cdot\overset{(n+1)}{p} = \pm\, \overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\ldots\ \overset{(n+1)}{\mu}.$$

§. 453. *Coroll.* 5.

Ex Cor. 4. sequitur: si $\overset{(n)}{\pi}$ et $\overset{(n)}{p}$, aut si $\overset{(n+1)}{\pi}$ atque $\overset{(n+1)}{p}$ habent Factorem communem, eundem etiam Factorem habere $\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}\cdots\overset{(n+1)}{\mu}$. Quod tamen ita verum est, ut omnes hi numeri sint integri.

Sit enim $\overset{(n)}{\pi} = e\beta$ atque $\overset{(n)}{p} = eb$, ubi e est Factor communis. Ergo $\overset{(n+1)}{p}\, e\beta - \overset{(n+1)}{\pi}\, eb = \pm\, \overset{(1)}{\mu}\,\overset{(2)}{\mu}\ldots\overset{(n+1)}{\mu}$; ergo $\overset{(n+1)}{p}\ \beta - \overset{(n+2)}{\pi}\ b = \pm \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdots\overset{(n+1)}{\mu}}{e}$. Sed prius membrum aequationis numerus est integer, quare idem est posterius membrum. Ergo si termini Fractionis $\overset{(n)}{P}$ vel $\overset{(n+1)}{P}$ habent Factorem communem, hunc Factorem habet Productum $\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdots\ \overset{(n+1)}{\mu}$.

§. 454.

§. 454. *Coroll.* 6.

Sit $\overset{(1)}{\mu} = \overset{(2)}{\mu} = \overset{(4)}{\mu} = \overset{(4)}{\mu} \ldots$ atque etiam $\overset{(1)}{m} = \overset{(2)}{m} = \overset{(3)}{m} \ldots$ adeo ut Fractio sit (ponendo μ et m pro $\overset{(1)}{\mu}$ et $\overset{(1)}{m}$):

$$x = \cfrac{\mu}{m + \cfrac{\mu}{m + \cfrac{\mu}{m + \text{ad infinitum.}}}}$$

Ex quo sequitur $x = \frac{\mu}{m+x}$, vel $mx + x^2 = \mu$, unde

$x^2 + mx + \frac{1}{4} m^2 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 = \mu + \frac{1}{4} m^2$, vel $x + \frac{m}{2} = \pm \left(\mu + \frac{1}{4} m^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (§. 114.); ergo $x = -\frac{m}{2} \pm \left(\mu + \frac{1}{4} m^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Sit $\mu = 5$ atque $m = 4$.

ergo $x = \cfrac{5}{4 + \cfrac{5}{4 + \cfrac{5}{4 +}}} = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3$,

id est: x habet duos valores, alterum -5, alterum $+1$, quorum tamen posterior solus hic valet. Fractiones partiales, si quaeruntur secundum regulam §. 446. sunt $\frac{5}{4}, \frac{20}{21}, \frac{105}{104}, \frac{520}{521} \ldots$ quae igitur magis magisque accedunt ad unitatem, atque per vices sunt majores et minores unitate.

§. 455.

§. 455. *Coroll.* 7.

Quoniam $\left(\mu + \frac{1}{4} m^2\right)^{\frac{1}{2}} = x + \frac{m}{2}$, possumus quamlibet radicem quadratam per ejusmodi Fractiones continuas exprimere; ut v. c. si proponitur $\sqrt{3}$, ita faciendum est, ut sit $\mu + \frac{1}{4} m^2 = 3$, quod fit si $\mu = 2$ atque $m = 2$.

Ergo $\sqrt{3} = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \text{ad infinitum}}}}$ Si autem proponitur $\sqrt{2}$ ponatur $\mu = 1$ atque $m = 2$, ergo $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$

Si $\sqrt{5}$ est quaerenda, ponatur vel $\mu = 4$ et $m = 2$, vel $\mu = 1$ et $m = 4$, unde

$$\sqrt{5} = 1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{4}{2 +}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}$$

§. 456. *Theorema.*

Fractio partialis hac Serie exprimi potest:

$$\overset{(n)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}} - \frac{\overset{(1)}{\mu} \cdot \overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{p} \cdot \overset{(2)}{p}} + \frac{\overset{(1)}{\mu} \cdot \overset{(2)}{\mu} \cdot \overset{(3)}{\mu}}{\overset{(2)}{p} \cdot \overset{(3)}{p}} - \frac{\overset{(1)}{\mu} \cdot \overset{(2)}{\mu} \cdot \overset{(3)}{\mu} \cdot \overset{(4)}{\mu} \ldots}{\overset{(3)}{p} \; \overset{(4)}{p}} \pm \frac{\overset{(1)}{\mu} \cdot \overset{(2)}{\mu} \ldots \overset{(n)}{\mu}}{\overset{(n-1)}{p} \; \overset{(n)}{p}}.$$

Demonstratio.

$$\overset{(1)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}}\text{; ergo } \overset{(2)}{P} = \overset{(1)}{P} - \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}\ \overset{(2)}{p}}\ (\S.\ 451.) = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}} - \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}\cdot\overset{(2)}{p}};$$

$$\overset{(3)}{P} = \overset{(2)}{P} + \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(2)}{p}\cdot\overset{(3)}{p}} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}} - \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}\ \overset{(2)}{p}} + \frac{\overset{(1)}{\mu}\cdot\overset{(2)}{\mu}\cdot\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(2)}{p}\ \overset{(3)}{p}}$$

et ita deinceps, ex quo satis patet veritas enunciationis. Hae Series sunt convergentes, si $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu} \ldots$, vel non crescunt, vel decrescunt.

§. 457. *Coroll.* 1.

Haec Series indicat totam Fractionem, si $\overset{(n+1)}{\mu} = o$.

§. 458. *Coroll.* 2.

Quoniam Fractio continua ita in Seriem mutari potest, vicissim Series aliqua numerorum in Fractionem continuam converti potest, ita ut haec Fractio Summam indicet Seriei. Quod fecit Eulerus in *Introductione in Analysin Infinitorum* p. 300. seqq. Quare de hac conversione haec pauca notentur.

§. 459. *Theorema.*

$$S = az - bz^2 + cz^3 - dz^4 + ez^5 - \ldots = \cfrac{az}{1 + \cfrac{bz}{a - bz + \cfrac{acz}{b - cz + \cfrac{bdz}{c - dz + \cfrac{cez}{d - e}}}}}$$

Demonstratio.

Ponatur $S = \overset{(0)}{P}$; ergo (§. 456.)

$az = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}}$; $bz^2 = \frac{\overset{(1)}{\mu}\,\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}\,\overset{(2)}{p}}$; $cz^3 = \frac{\overset{(1)}{\mu}\,\overset{(2)}{\mu}\,\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(2)}{p}\,\overset{(3)}{p}}$ etc., ergo $\overset{(1)}{\mu} = az\overset{(1)}{p}$;

$\overset{(2)}{\mu} = bz^2\,\overset{(1)}{p}\,\overset{(2)}{p} : az\overset{(1)}{p} = bz\overset{(2)}{p} : a$; $\overset{(3)}{\mu} = cz^3 \,.\, \overset{(2)}{p} . \overset{(3)}{p} : bz^2\,\overset{(1)}{p}\,\overset{(2)}{p}$ $= cz\overset{(3)}{p} : b\overset{(1)}{p}$. Similiter reperitur $\overset{(4)}{\mu} = dz\overset{(4)}{p} : c\overset{(2)}{p}$; $\overset{(5)}{\mu} = ez\overset{(5)}{p} : d\overset{(3)}{p}$, etc.

Eodem modo definiuntur Denominatores $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m}, \overset{(4)}{m} \ldots$ Etenim $\overset{(1)}{m} = \overset{(1)}{p}$; $\overset{(2)}{p} = \overset{(1)}{p}\,\overset{(2)}{m} + \overset{(2)}{\mu}$; $\overset{(3)}{p} = \overset{(2)}{p}\,\overset{(3)}{m} + \overset{(1)}{p}\,\overset{(3)}{\mu}$, caet. (§. 446.), unde $\overset{(2)}{m} = \frac{\overset{(2)}{p} - \overset{(2)}{\mu}}{\overset{(1)}{p}} = \frac{a.\overset{(2)}{p} - bz.\overset{(2)}{p}}{a\overset{(1)}{p}} = (a-bz)\overset{(2)}{p} : a\overset{(1)}{p}$

$\overset{(3)}{m} = \left(\overset{(3)}{p} - \overset{(1)}{p}\,\overset{(3)}{\mu}\right) : \overset{(2)}{p} = \left(\overset{(3)}{p} - \frac{cz}{b}\overset{(3)}{p}\right) : \overset{(2)}{p} = \overset{(3)}{p} . (b-cz) : b\overset{(2)}{p}$.

Similiter reperitur $\overset{(4)}{m} = \overset{(4)}{p}(c-dz) : \overset{(3)}{p}c$; $\overset{(5)}{m} = \overset{(5)}{p}(d-e) : \overset{(4)}{p}d$.

Si hosce valores ponimus in hac Fractione continua,

$$\overset{(0)}{P} = S = \cfrac{\overset{(1)}{\mu}}{\overset{(1)}{m} + \cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{\overset{(2)}{m} + \cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{\overset{(3)}{m} + \ldots}}}$$

atque simul ea reductione utimur, quae exposita est (§. 442.), prodit Fractio enunciata in Theoremate.

§. 460. *Coroll.* 1.

Dividatur aequatio per z, fit:

I.

I. $a-bz+cz^2-dz^3+ez^4\ldots=\cfrac{a}{1+\cfrac{bz}{a-bz+\cfrac{acz}{b-cz+\ldots}}}$

II. $1-bz+cz^2-dz^3\ldots=\cfrac{1}{1+\cfrac{bz}{1-bz+\cfrac{cz}{b-cz+\ldots}}}$

III. $\dfrac{1}{1-bz+cz^2-dz^3}\ldots=1+\cfrac{bz}{1-bz+\cfrac{cz}{b-cz+\ldots}}$

Ponatur in §. 459. $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ ... pro a, b, c, d. Fi reductione fit (§. 442.):

IV. $\frac{z}{a}-\frac{z^2}{b}+\frac{z^3}{c}-\frac{z^4}{d}\ldots=\cfrac{z}{a+\cfrac{a^2z}{b-az+\cfrac{b^2z}{c-bz+\cfrac{c^2z}{d-cz+\cfrac{d^2z}{e-dz+}}}}}$

V. $\frac{1}{a}-\frac{z}{b}+\frac{z^2}{c}-\frac{z^3}{d}\ldots=\cfrac{1}{a+\cfrac{a^2z}{b-az+\cfrac{b^2z}{c-bz+\ldots}}}$

VI. $\dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{z}{b}+\frac{z^2}{c}-\frac{z^3}{d}\ldots}=a+\cfrac{a^2z}{b-az+\cfrac{b^2z}{c-bz+\ldots}}$

Sed si z negative sumitur, Aequationes I. IV. fiunt.

VII. $a+bz+cz^2+dz^3+ez^4\ldots=\cfrac{a}{1-\cfrac{bz}{a+bz-\cfrac{acz}{b+cz-\cfrac{bdz}{c+dz-}}}}$

VIII. $\frac{z}{a}+\frac{z^2}{b}+\frac{z^3}{c}+\frac{z^4}{d}\ldots=\cfrac{z}{a-\cfrac{a^2z}{b+az-\cfrac{b^2z}{c+bz-\cfrac{c^2z}{d+cz-\cfrac{d^2z}{e+dz-}}}}}$

I

IX. $$\frac{1}{1+\frac{z}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{z^3}{d}\ldots}=1-\cfrac{z}{b+z-\cfrac{b^2z}{c+bz-\cfrac{c^2z}{d+cz+\ldots}}}$$

X. $$\frac{1}{1+bz+cz^2+dz^3\ldots}=1-\cfrac{bz}{1+bz-\cfrac{cz}{b+cz-\cfrac{dbz}{c+dz-\ldots}}}$$

Sit $a=b=c=d\ldots=1$

XI. $$1+z+z^2+z^3\ldots=\frac{1}{1-z}\ (\S.\ 333.)=\cfrac{1}{1-\cfrac{z}{1+z-\cfrac{z}{1+z-\cfrac{z}{1+z\ldots}}}}$$

et $$\frac{1}{1+z+z^2+z^3\ \ldots}=1-\cfrac{z}{1+z-\cfrac{z}{1+z-\cfrac{z}{1+z.}}}$$

XII. $$1-z+z^2-z^3+z^4=\frac{1}{1+z}=\cfrac{1}{1+\cfrac{z}{1-z+\cfrac{z}{1-z+\ldots}}}$$

et $$\frac{1}{1-z+z^2-z^3\ldots}=1+\cfrac{z}{1-z+\cfrac{z}{1-z+\cfrac{z}{1-z+\ldots}}}$$

Sit $z=1$.

XIII. $$a-b+c-d+e\ldots=\cfrac{a}{1+\cfrac{b}{a-b+\cfrac{ac}{b-c+\cfrac{bd}{c-d+\ldots}}}}$$

XIV. $$a+b+c+d+e=\cfrac{a}{1-\cfrac{b}{a+b-\cfrac{ac}{b+c-\cfrac{bd}{c+d-\ldots}}}}$$

XV. $$\frac{1}{1+b+c+d\ldots}=1-\cfrac{b}{1+b-\cfrac{c}{b+c-\cfrac{bd}{c+d-\ldots}}}$$

XVI. $$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\ldots=\cfrac{1}{a+\cfrac{a^2}{b-a+\cfrac{b^2}{c-b+\cfrac{c^2}{d-c+\ldots}}}}$$

XVII. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ldots=\cfrac{1}{a-\cfrac{a^2}{b+a-\cfrac{b^2}{c+b-\cfrac{c^2}{d+c-\ldots}}}}$

Ponantur pro $b, c, d, e\ldots$ producta $a, ab, abc, abcd\ldots$

XVIII. $\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}-\frac{1}{abcd}\ldots=\frac{1}{a+a^2}$

$=\cfrac{1}{a+\cfrac{a}{(b-1)+\cfrac{b}{(c-1)+\cfrac{c}{(d-1)+\cfrac{d}{(e-1)+}}}}}$

XIX. $\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}+\frac{1}{abcd}\ldots=\cfrac{1}{a-\cfrac{a}{(b+1)-\cfrac{b}{(c+1)-\cfrac{c}{(d+1)-\cfrac{d}{(e+1)-\ldots}}}}}$

§. 461. *Coroll.* 2.

Exemplo inserviant;

I. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\cfrac{36}{1+\ldots}}}}}}}$ (qui est Log. nat. 2.)

II. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3-\cfrac{4}{5-\cfrac{9}{7-\cfrac{16}{9-\ldots}}}}}$

III.

II. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ldots}}}}}}$

V. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots=\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{4-\cfrac{9}{8-\cfrac{25}{12+\cfrac{49}{16+\ldots}}}}}$

(qui est arcus $90°$; si radius est unitas).

$$-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}\ldots=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\ldots}}}}}$$

Hoc igitur modo Summa Progressionis Harmonicae per Fractionem continuam designatur. Confer. §. 258—261.

$$=1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}\ldots=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ldots}}}}}$$

§. 462. *Coroll.* 3.

Possumus $(1\pm z)^m$ et $(1\pm z)^{-m}$ per Fractionem continuam exprimere, duce §. 459 et §. 460. VII. Etenim secundum §. 460. VII. atque §. 347 et §. 350.

$(1+z)^m$

$$(1+z)^m = 1+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5 \ldots = \cfrac{1}{1-\cfrac{bz}{1+bz-\cfrac{cz}{b+cz-\cfrac{\ldots}{c\ldots}}}}$$

ubi $b = m$
$c = \frac{1}{2}(m-1)b$
$d = \frac{1}{3}(m-2)c$
$e = \frac{1}{4}(m-3)d$
$f = \frac{1}{5}(m-4)e$ etc.

$$\text{ergo } (1+z)^m = \cfrac{1}{1-\cfrac{mz}{1+mz-\cfrac{(m-1)z}{2+(m-1)z-\cfrac{2(m-2)z}{3+(m-2)z-\cfrac{3(m\ldots}{4+(\ldots}}}}}$$

et quoniam $(1+z)^m = \frac{1}{(1-z)^{-m}}$ possumus etiam ponendo m negativum, hanc ipsi dare formam:

$$(1+z)^m = 1+\cfrac{mz}{1-mz+\cfrac{(m+1)z}{2-(m+1)z+\cfrac{2.(m+2)z}{3-(m+2)z+\cfrac{3.(m+3)z}{4-(m+3)\ldots}}}}$$

Prior Fractio abrumpitur atque est finita, s m est positivus, et integer; posterior autem, si m est negativus et integer, ut:

$$(1+z)^{-m} = 1-\cfrac{mz}{1+mz-\cfrac{(m-1)z}{2+(m-1)z-\cfrac{2(m-2)z}{3+(m-2)z+\ldots}}}$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{mz}{1-mz+\cfrac{(m+1)z}{2-(m+1)z+\cfrac{2(m+2)z}{3-(m+2)z+\ldots}}}}$$

veluti, si z ponitur negativus

$$\frac{1}{(1-z)^2}=1+\frac{2z}{1-2z+\frac{z}{2-z}}\;;\quad \frac{1}{(1-z)^3}=1+\frac{3z}{1-3z+\frac{z}{1-z+\frac{z}{3-z.}}}$$

$$\frac{1}{(1-z)^4}=1+\frac{4z}{1-4z+\frac{3z}{2-3z+\frac{4z}{3-2z+\frac{3z}{4-z.}}}}$$

$$\frac{1}{(1-z)^5}=1+\frac{5z}{1-5z+\frac{2z}{1-2z+\frac{z}{1-z+\frac{z}{2-z+\frac{2z}{5-z.}}}}}$$

§. 463. *Coroll.* 4.

Continua Divisione alia reperitur forma Fractionis continuae, quae exprimit potestatem Binomii $(1+x)^m$. Sed quoniam Series:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m.(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

est infinita, substitutionibus utendum est. Ut facilior reddatur calculus ponamus: $(1+x)^m=1+ax+abx^2+abcx^3+abcdx^4+abcdex^5+abcdefx^6+\ldots$, ubi $a=m$; $b=\frac{m-1}{2}$; $c=\frac{m-2}{3}$; $d=\frac{m-3}{4}$; $e=\frac{m-4}{5}$; $f=\frac{m-5}{6}$; $g=\frac{m-6}{7}$ etc.

Sit

Sit $(1+x)^m = 1 + axP$,

$$\begin{aligned} P &= 1 + bxQ, \quad T = 1 + fxU \\ Q &= 1 + cxR, \quad U = 1 + gxV \\ R &= 1 + dxS, \quad V = 1 + hxW, \text{ etc.} \\ S &= 1 + exT. \end{aligned}$$

adeo ut sit
$$\begin{aligned} P &= 1 + bx + bcx^2 + bcdx^3 + \ldots \\ Q &= 1 + cx + cdx^2 + cdex^3 + \ldots \\ R &= 1 + dx + dex^2 + defx^3 + \ldots \\ S &= 1 + ex + efx^2 + efgx^3 + \ldots \\ T &= 1 + fx + fgx^2 + fghx^3 + \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Ergo

I. $(1+x)^m = 1 + axP = 1 + mxP = 1 + \frac{mx}{1:P}$.

II. $\frac{1}{P} = \frac{1}{1+bxQ} = 1 - \frac{bxQ}{1+bxQ}$. Sit $A = \frac{1+bxQ}{Q}$, ut

$\frac{1}{P} = 1 - \frac{bx}{A} = 1 - \frac{(m-1)x}{2A}$.

Atque $(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{(m-1)x}{2A}}$.

III. $A = \frac{1 + bx + bcx^2 R}{1 + cx + cdx^2 S}$.

In his atque in sequentibus Fractionibus A, B, C, D ... Multiplicatores ipsius x^2 designentur per M, N', N'' etc. Ergo

$$A = \frac{1+bx+Mx^2}{1+cx+Nx^2} = 1 + \frac{(b-c)x\left(1+\left(\frac{M-N}{b-c}\right)x\right)}{1+cx+Nx^2}.$$

Sit $B = \cfrac{1+cx+Nx^2}{1+\left(\cfrac{M-N}{b-c}\right)x}$ ergo $A = 1+(b-c)\frac{x}{B}$; $2A = 2 + \frac{(m+1}{3B}$

al

atque $(1+x)^m = 1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{(m-1)x}{2+\cfrac{(m+1)x}{3B.}}}$

$$\frac{M-N}{b-c}=c.\left(\frac{bR-dS}{b-c}\right)=c.\frac{b-d}{b-c}+cdx\left(\frac{bS-eT}{b-c}\right)=\frac{3}{2}c+cdx\left(\frac{bS-eT}{b-c}\right)$$

$$B=\frac{1+cx+Nx^2}{1+\frac{3}{2}cx+\left(\frac{bS-eT}{b-c}\right)cdx^2}=\frac{1+cx+Nx^2}{1+\frac{3}{2}cx+N'x^2}=1-\frac{cx}{2}\frac{\left(1-(N-N')\frac{2x}{c}\right)}{1+\frac{3}{2}cx+N'x^2.}$$

Sit $C=\dfrac{1+\frac{3}{2}cx+N'x^2}{1-(N-N')\frac{2x}{c}}$ ergo $B=1-\dfrac{cx}{2C}$ atque $3B=3-\dfrac{(m-2)x}{2C}.$

$$\frac{N-N'}{cd}=S-\left(\frac{bS-eT}{b-c}\right)=\frac{eT-cS}{b-c}=\frac{c-c}{b-c}+\left(\frac{fU-eT}{b-c}\right)ex=-\frac{4}{5}+\left(\frac{fU-eT}{b-c}\right)e.$$

ergo $=C\ \dfrac{1+\frac{3}{2}cx+N'x^2}{1+\frac{8}{5}dx-\left(\frac{fU-eT}{b-c}\right)2dex^2}=\dfrac{1+\frac{3}{2}cx+N'x^2}{1+\frac{8}{5}dx-N''x^2}$

$$=1+\frac{\left(\frac{3}{2}c-\frac{8}{5}d\right)x+(N'+N'')x^2}{1+\frac{8}{5}dx-N''x^2.}$$

sed $\frac{3}{2}c-\frac{8}{5}d=\frac{m+2}{10}$ ergo $C=1+\left(\frac{m+2}{10}\right)x\ \dfrac{\left(1+(N'+N'')\frac{10x}{m+2}\right)}{1+\frac{8}{5}dx-N''x^2.}$

it $D=\dfrac{1+\frac{8}{5}dx-N''x^2}{1+(N'-N'')\frac{10x}{m+2}}$ ergo $C=1+\dfrac{(m+2)x}{10D}$ ergo $2C=2+\dfrac{(m+2)x}{5D}$

V.

V. $N'' - N''' = \left(\frac{bS - eT}{b - c}\right) cd + \left(\frac{fU - cT}{b - c}\right) 2de = \left(\frac{b - e}{b - c}\right) cd - ($

$+ \left(\frac{bT - fU}{b - c}\right) ecdx - \left(\frac{gV - cU}{b - c}\right) 2def$; ubi $\frac{b - e}{b - c}\, cd - \left(\frac{f - c}{b - c}\right) 2de$

ergo $D = \dfrac{1 + \frac{8}{5}\, dx - N''x^2}{1 + 2dx + \left(ce\left(\frac{bT - fU}{b - c}\right) + fc\left(\frac{gV - cU}{b - c}\right)\right)\frac{10dx^2}{m + 2}} = \dfrac{1 + \frac{8}{5} d}{1 + 2d}$

$= 1 + \dfrac{\left(\frac{8}{5} - 2\right) dx - (N'' + N''')x^2}{1 + 2dx + N'''x^2} = 1 - \frac{2}{5} dx\, \dfrac{\left(1 - \frac{5}{2d}(N\right.}{1 + 2dx}$

Sit $E = \dfrac{1 + 2dx + N'''x^2}{1 - \frac{5}{2d}(N'' + N''')x.}$

Ergo $D = 1 - \frac{2}{5}\,\frac{dx}{E}$ atque $5D = 5 - \frac{(m - 3)x}{2E}$.

Unde $3B = 3 - \cfrac{(m - 2)x}{2 + \cfrac{(m + 2)x}{5 - \cfrac{(m - 3)x}{2E.}}}$

Si ita progredimur, invenimus hanc formam:

$(1 + x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{(m - 1)x}{2 + \cfrac{(m + 1)x}{3 - \cfrac{(m - 2)x}{2 + \cfrac{(m + 2)x}{5 - \cfrac{(m - 3)x}{2 + (}}}}}}$

vel hoc modo

$(1 + x) = 1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{(m - 1)x : 2}{1 + \cfrac{(m + 1)x : 3.2}{1 - \cfrac{(m - 2)x : 3.2}{1 + \cfrac{(m + 2)x : 5.2}{1 - \cfrac{(m - 3)x : 5}{1 + (}}}}}}$

niam $(1+x)^m = \frac{1}{(1+x)^{-m}}$ erit etiam $(1+x)^m$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{mx}{1 + \cfrac{(m+1)x}{2 - \cfrac{(m-1)x}{3 + \cfrac{(m+2)x}{2 - \cfrac{(m-2)x}{5 + \cfrac{(m+3)x}{2 - \cfrac{(m-3)x}{7 + \dots}}}}}}}}$$

Lagrange (*Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin* 1776) hanc reperit formam ex calculo Differentiali. Sed noster calculus docet hac simplici continua Divisione eam etiam reperiri. Si m est numerus integer, Fractio est finita. Sit $m=4$:

$$(1+x)^4 = 1 + \cfrac{4x}{1 - \cfrac{3x}{2 + \cfrac{5x}{3 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{3x}{5 - \cfrac{x}{2+x}}}}}} \qquad \frac{1}{(1+x)^4} = 1 - \cfrac{4x}{1 + \cfrac{5x}{2 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 - \cfrac{x}{5 + \cfrac{7x}{2 - \cfrac{x}{7+4x}}}}}}}$$

§. 464. *Coroll.* 5.

Similiter si alia substituimus in locum Quantorum $a, b, c, d \dots$ et z reperimus:

$$S = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} \cdot \frac{y}{z} + \frac{\gamma}{c} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^2 - \frac{\delta}{d}\left(\frac{y}{z}\right)^3 + \frac{\varepsilon}{e} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^4 - \dots$$

=

$$=\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta a^2 y}{(abz-\beta a y)+\cfrac{\alpha\gamma b^2 yz}{(\beta cz-\gamma by)+\cfrac{\beta\delta c^2 yz}{(\gamma dz-\delta cy)+\cfrac{\gamma\varepsilon d^2 yz}{(\delta ez-\varepsilon dy)+\cfrac{\delta\zeta e^2 yz}{\varepsilon fz-\zeta ey}}}}}}.$$

$$S=\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha\beta y}{abz}+\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}\left(\frac{y}{z}\right)^2-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}\left(\frac{y}{z}\right)^3+\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{abcde}\left(\frac{y}{z}\right)^4-.$$

$$=\cfrac{\alpha z}{az+\cfrac{\beta ayz}{(bz-\beta y)+\cfrac{\gamma byz}{(cz-\gamma y)+\cfrac{\delta cyz}{(dz-\delta y)+\cfrac{\varepsilon dyz}{(ez-\varepsilon y)+\ldots}}}}}$$

§. 465. *De Fractione continua particulari, ubi Numeratores terminorum sunt unitates.*

Formulae et leges, quae expositae sunt, simpliciores redduntur, si (§. 437.) $\overset{(1)}{\mu}=\overset{(2)}{\mu}=\overset{(3)}{\mu}\ldots=1.$ Tum enim fit:

$$\frac{\mu}{m}=\cfrac{1}{\overset{(1)}{m}+\cfrac{1}{\overset{(2)}{m}+\cfrac{1}{\overset{(3)}{m}+\cfrac{1}{\overset{(4)}{m}+\ldots}}}}$$

atque

$$\frac{m}{\mu}=\overset{(1)}{m}+\cfrac{1}{\overset{(2)}{m}+\cfrac{1}{\overset{(3)}{m}+\cfrac{1}{\overset{(4)}{m}+\ldots}}}$$

ſlut $\frac{\mu}{m} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\dots}}}}$ atque $\frac{m}{\mu} = 2 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\dots}}}$

$\frac{\mu}{m}$ est Fractio vera, $\frac{m}{\mu}$ est Fractio spuria, quae in veram mutatur, aut invertendo, ut si $\frac{m}{\mu}$ convertitur in $\frac{\mu}{m}$, aut numerum integrum transferendo ad prius aequationis membrum, ut:

$$\frac{m}{\mu} - 2 = \frac{m - 2\mu}{\mu} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\dots}}}$$

Ejusmodi Fractiones continuae particulares maxime sunt in usu. Quare de iis earumque usu haec pauca addantur.

§. 466. *De metienda ratione inter duo Quanta per ejusmodi Fractionem continuam.*

Haec Fractio, cujus numeratores terminorum sunt unitates, oritur ex continua divisione atque definiendae rationi inter duo Quanta inservire potest. Etenim metiendo Quantum *A* per Quantum *B*, quod minus est, definimus numerum, qui indicat, quoties *B* aut ejus pars aliquota contineatur in *A* (§. 50.), qui numerus est *Exponens Rationis.* Hic Exponens, qui indicetur litera *e*, ita ut sit

A

$A:B=c:1$ (§. 50 et 61.) ita per Fractionem continuam definiri potest:

Sint propositae Aequationes:

1. $A=aB+C$, ergo $\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}=a+\frac{1}{B:C}$ (§. 133. 3.)

2. $B=bC+D$, ergo $\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C}=b+\frac{1}{C:D}$.

3. $C=cD+E$, ergo $\frac{C}{D}=c+\frac{E}{D}=c+\frac{1}{D:E}$.

4. $D=dE+F$, ergo $\frac{D}{E}=d+\frac{F}{E}=d+\frac{1}{E:F}$.

et ita deinceps, ubi $A, B, C, D, E, F \ldots$ sunt Quanta ejusdem generis; $a, b, c, d \ldots$ sunt numeri integri, ergo $C, D, E, F \ldots$ sunt Residua ex Divisione, ita quidem ut, cum sit $C<B$; $D<C$; $E<D \ldots$, magis magisque diminuantur. Quamnam vim habeant hae Aequationes in definienda Ratione inter A et B, hoc modo perspicitur.

Sit $A=aB$, ergo $a=c$, atque B est a tima pars ipsius A, C est $=0$. Hic casus est simplicissimus.

Si autem B non est pars aliquota ipsius A, ita ut A sit major quam aB, sed minor quam $(a+1)B$, erit aliquod Residuum $C=A-aB$, quod minus est quam B. Si hoc Residuum C est b tima pars ipsius B, D evanescit, atque $\frac{B}{C}=b$, et $\frac{A}{B}=a+\frac{1}{b}$.

At vero, si C non est pars aliquota ipsius B, ita ut B sit major quam bC sed minor quam $(b+1)C$, erit aliquod Residuum $D=B-bC$, quod minus

nus est quam *C*. Si hoc Residuum *D* est *c* tima pars ipsius *C*, erit $E = o$; $\frac{C}{D} = c$; $\frac{B}{C} = b + \frac{1}{c}$;

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}.$$

Sed si *D* non est pars aliquota ipsius *C*, eodem modo progrediendum est. Ex quo liquet rationem inter *A* et *B* exprimi per Fractionem continuam, ubi $\overset{(1)}{\mu} = \overset{(2)}{\mu} = \overset{(3)}{\mu} \dots = 1$. Si aliquod Residuum est $= o$, haec Fractio est *finita*, velut: si $F = o$, erit

$$\frac{D}{E} = d;\ \frac{C}{D} = c + \frac{1}{d};\ \frac{B}{C} = b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}};\ \frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}.$$

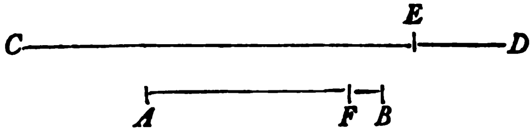
ubi $a = o$, si $A < B$.

Sed si nullum evanescit Residuum, Fractio *in infinitum excurrit*.

Sint v. c. duae lineae rectae *CD* et *AB*, quarum Ratio quaeritur. Sit $CD = 2AB + ED$,

$$AB = 3ED + FB,$$
$$ED = 4FB,$$

ergo $\frac{CD}{AB} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}} = \frac{30}{13}$.



§. 467. *De mutanda Fractione vulgari in Fractionem ejusmodi continuam.*

Eodem modo Fractio vulgaris mutatur in Fractionem continuam, dividendo subinde Fractionis terminos per Numeratorem, donec nullum est Residuum, vel Numerator ipse est unitas, velut:

$$\frac{239}{677}=\frac{1}{677:239}=\cfrac{1}{2+\cfrac{199}{239}};\quad \frac{199}{239}=\frac{1}{239:199}=\cfrac{1}{1+\cfrac{40}{199}};$$

$$\frac{40}{199}=\frac{1}{199:40}=\cfrac{1}{4+\cfrac{39}{40}};\quad \frac{39}{40}=\frac{1}{40:39}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{39}};$$

ergo
$$\frac{239}{677}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{39}}}}}.$$
ubi ultimus Numerator est ipsa unitas.

Ita etiam
$$\frac{1112}{1232}=\frac{139}{154}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{8}{24}}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}.$$

atque
$$\frac{997}{983}=1+\cfrac{1}{71+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}.$$
ubi ultimus Numerator non est unitas, sed tamen pars aliquota Denominatoris.

§. 468. *Coroll.* 1.

Termini Fractionis sunt $\frac{1}{\overset{(1)}{m}}$; $\frac{1}{\overset{(2)}{m}}$; $\frac{1}{\overset{(3)}{m}}$ ... §. 441.

atque Fractiones partiales (§. 443.):

$$\overset{(1)}{P} = \frac{1}{\overset{(1)}{m}}; \quad \overset{(2)}{P} = \frac{1}{\overset{(1)}{m} + \frac{1}{\overset{(2)}{m}}} = \frac{\overset{(2)}{m}}{\overset{(1)}{m}\,\overset{(2)}{m} + 1}$$

$$\overset{(3)}{P} = \frac{\overset{(3)}{m}\,\overset{(2)}{m} + 1}{\overset{(3)}{m}\left(\overset{(1)}{m}\,\overset{(2)}{m} + 1\right) + \overset{(1)}{m}}.$$

$$\overset{(4)}{P} = \frac{\overset{(4)}{m}\left(\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m} + 1\right) + \overset{(2)}{m}}{\overset{(4)}{m}\left(\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m} + \overset{(1)}{m} + \overset{(3)}{m}\right) + \overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m} + 1};$$

$$\overset{(5)}{P} = \frac{\overset{(5)}{m}\left(\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m} + \overset{(2)}{m} + \overset{(4)}{m}\right) + \overset{(2)}{m}\,\overset{(3)}{m} + 1}{\overset{(5)}{m}\left(\overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m} + \overset{(2)}{m} + \overset{(4)}{m} + \overset{(3)}{m}\,\overset{(4)}{m} + 1\right) + \overset{(1)}{m}\left(\overset{(2)}{m}\,\overset{(3)}{m} + 1\right) + \overset{(3)}{m}}$$

et ita deinceps $\overset{(n+1)}{P}$ invenitur ex $\overset{(n)}{P}$, mutando $\overset{(n)}{m}$ in $\overset{(n)}{m} + \frac{1}{\overset{(n+1)}{m}}$

(§. 445.) unde $\overset{(n)}{P} = \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}} = \frac{\overset{(n)}{m}\,\overset{(n-1)}{\pi} + \overset{(n-2)}{\pi}}{\overset{(n)}{m}\,\overset{(n-1)}{p}\;\;\overset{(n-2)}{p}}$, atque $\overset{(n+1)}{P} = \frac{\overset{(n+1)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{p}}$

$$= \frac{\overset{(n+1)}{m}\,\overset{(n)}{\pi} + \overset{(n-1)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{m}\,\overset{(n)}{p} + \overset{(n-1)}{p}}.$$

§. 469. *Coroll.* 2.

Ex hoc sequitur $\overset{(n)}{\pi} > \overset{(n-1)}{\pi}$ atque $\overset{(n)}{p} > \overset{(n-1)}{p}$, quo-

niam

niam $\overset{(n)}{m} + \frac{1}{\overset{(n+1)}{m}} > \overset{(n)}{m}$ Ergo Numeratores et Denominatores harum Fractionum continuarum magis magisque increscunt, atque igitur formant Series adscendentes.

§. 470. *Coroll.* 3.

$\overset{(2n)}{P}$ minor est quam Fractio tota x, sed $\overset{(2n+1)}{P}$ major est (§. 444.)

§. 471. *Coroll.* 4.

Quoniam tota Fractio pendet ex solis numeris $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots$ hoc breviore modo notari solet $x = \left\{ \overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m}, \overset{(4)}{m} \ldots \overset{(n)}{m} \right\}$, si $\overset{(n)}{P} = x$; veluti $x = \{3, 4, 5, 6\}$

$$= \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}} \quad \text{ubi } \overset{(4)}{P} = x.$$

§. 472. *Coroll.* 5.

Ex Aequatione $\overset{(n)}{P} = \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}} = \frac{\overset{(n)}{m}\overset{(n-1)}{\pi} + \overset{(n-2)}{\pi}}{\overset{(n)}{m}\overset{(n-1)}{p} + \overset{(n-2)}{p}}$ patet:

Ut reperiatur Numerator $\left(\overset{(n)}{\pi}\right)$ *ntimae Fractionis partialis, Numerator* $\left(\overset{(n-1)}{\pi}\right)$ *Fractionis proxime an-*

antecedentis multiplicatur per $\left(\overset{(n)}{m}\right)$ ntimum *Denominatorem, atque huic Producto additur Numerator Fractionis secundo loco antecedentis. Eodem modo reperitur Denominator, si pro Numeratoribus Fractionum partialium sumuntur Denominatores.*

Quod Schemate §. 446. repraesentatur, si pro $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu}, \overset{(4)}{\mu} \ldots$ unitas ponitur.

norum Denominatores sive indices sunt	$\overset{(1)}{m}\,;\,\overset{(2)}{m}\,;\,\overset{(3)}{m}\,\ldots\,\overset{(n)}{m}$
num part. Numeratores	$1\,;\,\overset{(2)}{m}\overset{(1)}{\pi}\,;\,\overset{(3)}{m}\overset{(2)}{\pi}+\overset{(1)}{\pi}\ldots\overset{(n)}{m}\overset{(n-1)}{\pi}+$
. . Denominatores	$\overset{(1)}{m}\,;\,\overset{(2)}{m}\overset{(1)}{p}+1\,;\,\overset{(3)}{m}\overset{(2)}{p}+\overset{(1)}{p}\ldots\overset{(n)}{m}\overset{(n-1)}{p}+$
nes partiales	$\frac{0}{1}\,;\,\frac{\overset{(1)}{\pi}}{\overset{(1)}{p}}\,;\,\frac{\overset{(2)}{\pi}}{\overset{(2)}{p}}\,;\,\frac{\overset{(3)}{\pi}}{\overset{(3)}{p}}\ldots\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}.$

velut si $F = \{2, 1, 4, 1, 39\}$ erunt:

Indices	2 ;	1 ;	4 ;	1 ;	39.	
Fr. part. Numeratores	1 ;	1 ;	4+1 ;	5+1 ;	6 . 39+5.	
. . . Denominat.	2 ;	3 ;	12+2 ;	14+3 ;	17 . 39+14.	
Fract. part.	$\frac{0}{1}$; $\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{3}$;	$\frac{5}{14}$;	$\frac{6}{17}$;	$\frac{239}{677}$.	

§. 473. *Coroll. 6.*

$\overset{(n)}{P}-\overset{(n+1)}{P}=\left(\overset{(n)}{P}-\overset{(n-1)}{P}\right)\overset{(n-1)}{p}:\overset{(n+1)}{p}$. Sed $\overset{(n-1)}{p}<\overset{(n+1)}{p}$ (§. 469.), ergo $\overset{(n)}{P}-\overset{(n+1)}{P}<\overset{(n)}{P}-\overset{(n-1)}{P}$; id est *Differentia inter duas proximas Fractiones partiales atque igitur etiam inter Fractionem totam et par-*

tialem magis magisque diminuitur. Quare Fractio partialis magis magisque ad totam Fractionem accedit.

§. 474. *Coroll. 7.*

$\overset{(2n+1)}{P} = \overset{(2n)}{P} + \frac{1}{\overset{(2n+1)}{p}\overset{(2n)}{p}}$, sed $\overset{(2n)}{P} = \overset{(2n-1)}{P} - \frac{1}{\overset{(2n-1)}{p}\overset{(2n)}{p}}$ (§. 451.); velut (§. 472.) $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$; $\frac{5}{14} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 14}$; $\frac{6}{17} = \frac{5}{14} - \frac{1}{14 \cdot 17}$. Quare quae sunt formae $\overset{(2n+1)}{P}$ majores sunt, sed quae sunt formae $\overset{(2n)}{P}$ minores sunt quam Fractio tota (§. 444.).

§. 475. *Coroll. 8.*

Ex §. 453. sequitur, neque $\overset{(n)}{\pi}$ et $\overset{(n)}{p}$, neque $\overset{(n-1)}{\pi}$ et $\overset{(n-1)}{p}$ habere Factorem communem, quoniam $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu} \ldots = 1$

Ergo Fractiones $\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}$ et $\frac{\overset{(n-1)}{\pi}}{\overset{(n-1)}{p}}$ ad minimos terminos reductae sunt.

§. 476. *Coroll. 9.*

Quoniam $\overset{(n)}{p} > \overset{(n-1)}{p}$ (§. 469.) atque igitur $\frac{1}{\left(\overset{(n)}{p}\right)^2} < \frac{1}{\overset{(n)}{p}\overset{(n-1)}{p}}$ et $\frac{1}{\left(\overset{(n-1)}{p}\right)^2} > \frac{1}{\overset{(n)}{p}\overset{(n-1)}{p}}$, erit $\overset{(n)}{P} - \overset{(n-1)}{P} = \pm \frac{1}{\overset{(n)}{p} \cdot \overset{(n-1)}{p}} > \frac{1}{\left(\overset{(n)}{p}\right)^2}$ et $< \frac{1}{\left(\overset{(n-1)}{p}\right)^2}$; id est:

Dif-

Differentia duarum Fractionum partialium sibi proximarum $\overset{(n)}{P}$ et $\overset{(n-1)}{P}$ major est quam $\frac{1}{\left(\overset{(n)}{p}\right)^2}$ sed minor quam $\frac{1}{\left(\overset{(n-1)}{p}\right)^2}$.

§. 477. *Coroll.* 10.

Quoniam autem valor totius Fractionis x est inter valores harum duarum Fractionum partialium (§. 470.), sequitur Differentiam inter Fractionem totam et partialem esse minorem quam hanc Differentiam atque igitur minorem quam $\frac{1}{\left(\overset{(n-1)}{p}\right)^2}$.

§. 478. *De terminis negativis Fractionis continuae, ex Divisione ortis.*

Si in Divisione semper sumuntur Quoti minores, omnia Residua sunt positiva, atque Fractionis omnes termini sunt positivi; ut:

$$\frac{29}{23} = 1 + \frac{6}{23} = 1 + \cfrac{1}{3 + \frac{5}{6}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{6}}},\text{ubi}$$

Quoti minores sunt 1, 3, 1. In hac Divisione Residuum potest esse majus quam dimidius Divisor, veluti in Quoto $\frac{5}{6}$ ubi $5 > \frac{6}{2}$. At vero, ut diminuatur terminorum numerus, illi soli Quoti sumantur, qui praebent *Residuum*, quod dicunt *minimum*, id est, quod non est majus quam dimidius

dius Divisor, sive id sit negativum sive positivum, ut $\frac{29}{23} = 1 + \frac{6}{23} = 1 + \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{6}}$ ubi 4 est major Quotus, atque Residuum negativum.

Mutando igitur terminos positivos in negativos, eorum numerus saepe diminuitur; quod quomodo fiat, in sequentibus explicatur.

§. 479. *Problema.*

$a - \frac{r}{b}$ mutare in Fractionem continuam, cujus termini sint positivi.

Solutio.

$$a - \frac{r}{b} = a - 1 + \left(1 - \frac{r}{b}\right) = a - 1 + \frac{b-r}{b} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{r}{b-r}}$$

ubi $r < b$

ut $5 - \frac{7}{11} = 4 + \frac{4}{11} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}.$

§. 480. *Coroll.* 1.

Ergo $a - \frac{1}{b} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b-1}}$. Quare tres termini hujus formae $a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b-1}}$ semper reduci possunt ad formam $a - \frac{1}{b}$, aut, si sunt formae

$a +$

$a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}$ ad formam $a+1-\cfrac{1}{b+1}$; qua ratione uno diminuuntur termino, ut $3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=4-\frac{1}{3}$ et vicissim, qui sunt posterioris formae, ad priorem reduci possunt.

§. 481. *Coroll.* 2.

Quoniam $(a+1)-\frac{1}{(b+1)}=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}$ erit:

$$+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}}}}=(a+1)-\cfrac{1}{(b+1)+\cfrac{1}{(c+1)-\cfrac{1}{(d+1)+\cfrac{1}{(e+1)-\cfrac{1}{(f+1}}}}}$$

velut $1-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{5}}}$; $=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}$.

§. 482. *Coroll.* 3.

1. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}=1-\frac{1}{b+1}$. Ponatur deinceps $1+\frac{1}{b}$ pro b.

Ergo $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}=1-\frac{1}{b+1}$ pro $\frac{1}{b}$, unde

2.

2. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b}}} = 1 - \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{b}} \quad \left(= \dfrac{3}{5} \text{ si } b = 2\right).$

3. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b}}}} = 1 - \dfrac{1}{3-\dfrac{1}{b+1}} \quad \left(= \dfrac{5}{8} \text{ si } b = 2\right).$

4. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b}}}}} = 1 - \dfrac{1}{3-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{b}}} \quad \left(= \dfrac{8}{13} \text{ si } b = 2\right).$

5. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b}}}}}} = 1 - \dfrac{1}{3-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{b+1}}} \quad \left(= \dfrac{13}{21} \text{ si } b = 2\right)$

6. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b}}}}}}} = 1 - \dfrac{1}{3-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{b}}}} \quad \left(= \dfrac{21}{34} \text{ si } b = 2\right)$

§. 483. *Coroll.* 4.

Fractiones, quibus sunt termini negativi tractantur, ut, quibus sunt soli termini positivi, sed Denominatores diversis signis afficiuntur, ut:

$$x = a - \dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c-\dfrac{1}{d+\dfrac{1}{e}}}} = a + \dfrac{1}{-b+\dfrac{1}{-c+\dfrac{1}{d+\dfrac{1}{e}}}}$$

$$= a + \left\{-b, -c, d, e\right\}$$

velut Fractiones §. 481, 482. ita designari possunt:

$$1 + \left\{-3, -4, 5\right\} = \left\{1, 2, 3, 1, 4\right\}.$$

1+

$$1+\left\{-(b+1)\right\}=\left\{1,b\right\}$$

$$1+\left\{-2,-b\right\}=\left\{1,1,b\right\}$$

$$1+\left\{-3,(b+1)\right\}=\left\{1,1,1,b\right\}$$

$$1+\left\{-3,2,b\right\}=\left\{1,1,1,1,b\right\}$$

$$1+\left\{-3,3,-(b+1)\right\}=\left\{1,1,1,1,1,b\right\}$$

$$1+\left\{-3,3,-2,-b\right\}=\left\{1,1,1,1,1,1,b\right\}$$

§. 484. *Coroll.* 5.

In mutandis terminis negativis in positivos accidere potest, ut aliquis Denominator evanescat, quod fit v. c. si §. 481. $b+1$, $c+1$ fiunt unitates. Tum autem Fractiones simpliciores redduntur, ut $a+1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{c}}=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{0+\cfrac{1}{c}}}=a+\cfrac{1}{1+c}$.

§. 485. *Fractiones continuae periodicae*,

Si in Fractione continua infinita, ubi $\overset{(1)}{\mu}=\overset{(2)}{\mu}=\overset{(3)}{\mu}\ldots=1$, eadem semper redit Series Denominatorum, Fractio dicitur *periodica*. Species ejus definitur numero Denominatorum, ex quo Series vel Periodus constat, ut:

$x=$

$x = \left\{ a, a, a \ldots \text{ ad inf.} \right\}$ ubi Periodus constat ex uno Denominatore.
$x = \left\{ a, b, a, b \ldots \text{ ad inf.} \right\}$ ubi ex duobus.
$x = \left\{ a, b, c, a, b, c \text{ ad inf.} \right\}$ ubi ex tribus constat; et ita deinceps.

§. 486. Coroll. 1.

Possunt repraesentari forma Fractionis finitae.

Nam $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ldots}}} = \cfrac{1}{a+x}$; $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+x}}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+x}}$

$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c+x}}}$; $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d+x}}}}$ et ita deinceps.

Periodus uncis includi solet:

ut $x = \left(\frac{1}{a}\right)$; $x = \left(\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b}}\right)$; $x = \left(\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}}\right)$;

vel etiam ita: $x = (a)$; $x = (a, b)$; $x = (a, b, c)$.

§. 487. Coroll. 2.

Quare inserviunt exprimendis Radicibus quadratis numerorum. Etenim

I. Si $x = \frac{1}{a+x} = (a)$, erit $ax + x^2 = 1$, aut si $a = 2h$, erit $2hx + x^2 = 1$, vel $2hx + x^2 + h^2 = (x+h)^2 = 1 + h^2$, vel $x + h = \sqrt{(1+h^2)}$, unde

$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{4}\right)}$, vel $2x + a = \sqrt{(4 + a^2)} = a + 2\left(\frac{1}{a}\right)$

ve-

veluti si $a=1$, erit $\sqrt{5}=1+2.(1)$. Verum

$\frac{1}{2}\sqrt{(4+a^2)}=\frac{a}{2}+(a)$. Quare ponendo deinceps

$a=1, 3, 5, 7, 9$ erunt:

$\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}\sqrt{13}$; $\frac{1}{2}\sqrt{29}$; $\frac{1}{2}\sqrt{53}$; $\frac{1}{2}\sqrt{85}$

$=\frac{1}{2}+(1)$; $\frac{3}{2}+(3)$; $\frac{5}{2}+(5)$; $\frac{7}{2}+(7)$; $\frac{9}{2}+(9)$

Si autem a est numerus par, ponatur $a=2p$, unde

$\sqrt{(4+a^2)}=\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{4}\right)}=\sqrt{(1+p^2)}=p+(2p)$. Ponendo

$p=1, 2, 3, 4\ldots$ erunt

; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{37}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{65}$

(2) ; $2+(4)$; $3+(6)$; $4+(8)$; $5+(10)$; $6+(12)$; $7+(14)$; $8+(16)$ etc.

I. Si $x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}=(a, b)$, erit $x=\frac{b+x}{ax+ab+1}$,

unde $ax^2+abx=b$, ergo $x^2+bx=\frac{b}{a}$.

Unde $x^2+bx+\frac{1}{4}b^2=\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2=\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}$, ergo

$x+\frac{1}{2}b=\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{b}{a}\right)}=\frac{1}{2}b+(a, b)$, velut si

$b=18$, $a=6$, erit $\sqrt{84}=9+(6.18)$.

$=1$, atque $b=2p$, unde $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{b}{a}\right)}=\sqrt{(p^2+2p)}=p+(1, 2p)$.

si p deinceps est $1, 2, 3, 4\ldots$ prodit:

; $\sqrt{8}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{35}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{63}\ldots$

$1, 2)$; $2+(1, 4)$; $3+(1, 6)$; $4+(1, 8)$; $5+(1, 10)$; $6+(1, 12)$; $7+(1, 14)\ldots$

$=2$, atque $b=2p$, unde $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}+\frac{b}{a}\right)}=\sqrt{(p^2+p)}=p+(2, 2p)$.

si p deinceps est $2, 3, 4\ldots$ prodit:

; $\sqrt{12}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{42}$; $\sqrt{56}\ldots$

$, 4)$; $3+(2, 6)$; $4+(2, 8)$; $5+(2, 10)$; $6+(2, 12)$; $7+(2, 14)\ldots$

prodeunt $\frac{e}{ma}\sqrt{z} = \frac{b}{2m} + \left(ma,\ \frac{b}{m}\right)$, atque

$\frac{em}{a}\sqrt{z} = \frac{bm}{2} + \left(\frac{a}{m},\ bm\right)$.

Radices numerorum designatae per Fractiones periodi
ubi $ab = 2\sqrt{(e^2 z + 1)} - 2$.

e	ab	a	b	$\frac{e}{a}\sqrt{z} = \frac{1}{2}b + (a, b$
2	4	2	2	$\sqrt{2} = 1 + (2)$.
		1	4	$2\sqrt{2} = \sqrt{8} = 2 + (1$
12	32	4	8	$3\sqrt{2} = 4 + (4, 8) =$
		2	16	$\sqrt{72} = 8 + (2, 16)$.
70	196	14	14	$5\sqrt{2} = 7 + (14) = \sqrt{5}$
408	1152	32	36	$12\frac{3}{4}\sqrt{2} = 18 + (32, 3$
1	2	1	2	$\sqrt{3} = 1 + (1, 2)$.
4	12	1	12	$4\sqrt{3} = 6 + (1, 12)$:
		2	6	$2\sqrt{3} = 3 + (2, 6) =$
15	50	5	10	$3\sqrt{3} = 5 + (5, 10)$:
		1	50	$15\sqrt{3} = 25 + (1, 50)$
4	16	4	4	$\sqrt{5} = 2 + (4) = \frac{1}{2}\sqrt{}$
		1	16	$\sqrt{80} = 8 + (1, 16)$.
72	320	8	40	$9\sqrt{5} = 20 + (8, 40)$:
2	8	2	4	$\sqrt{6} = 2 + (2, 4); \sqrt{24} =$
20	96	1	96	$20\sqrt{6} = 48 + (1, 96)$:
198	968	22	44	$9\sqrt{6} = 22 + (22, 44)$:

e	ab	a	b	$\frac{e}{a}\sqrt{z}=\frac{1}{2}b+(a,b)$.
3 48	14 252	1 6	14 42	$3\sqrt{7}=7+(1,14)=\sqrt{63}$. $8\sqrt{7}=21+(6,42)=4\sqrt{28}$.
6	36	6	6	$\sqrt{10}=3+(6)$. $\sqrt{40}=6+(3,12)$. $\sqrt{90}=9+(2,18)$.
3 60	18 396	3 6	6 66	$\sqrt{11}=3+(3,6)$. $\sqrt{99}=9+(1,18)$. $10\sqrt{11}=33+(6,66)=5\sqrt{44}$.
180 $\frac{3}{2}$	$(36)^2$ 9	36 3	36 3	$5\sqrt{13}=18+(36)=\frac{5}{2}\sqrt{52}$. $\frac{1}{2}\sqrt{13}=\frac{3}{2}+(3)$.
4	28	4	7	$\sqrt{14}=\frac{7}{2}+(4,7)$ $\sqrt{56}=7+(2,14)$.
1 8	6 60	1 4	6 15	$\sqrt{15}=3+(1,6)=\frac{1}{2}\sqrt{60}$. $2\sqrt{15}=\frac{15}{2}+(4,15)=\sqrt{60}$.
8	64	8	8	$\sqrt{17}=4+(8)=\frac{1}{2}\sqrt{68}$. $\sqrt{68}=8+(4,16)$.
39 13260	338 115596	13 78	26 1482	$3\sqrt{19}=13+(13,26)$. $170\sqrt{19}=741+(78,1482)$ $=85\sqrt{76}$.
12 $\frac{1}{2}$	108 3	12 1	9 3	$\sqrt{21}=\frac{9}{2}+(12,9)$. $\sqrt{84}=9+(6,18)$. $\frac{1}{2}\sqrt{21}=\frac{3}{2}+(1,3)$
42	392	14	28	$3\sqrt{22}=14+(14,28)$. $3\sqrt{88}=28+(7,56)$.

z	c	ab	a	b	$\frac{c}{a}\sqrt{z} = \frac{1}{2}b + (a, b$
23	5 240	46 2300	1 10	46 230	$5\sqrt{23} = 23 + (1, 4$ $24\sqrt{23} = 115 + (1$ $= 12\sqrt{92}.$
26	10	100	10	10	$\sqrt{26} = 5 + (10).$
29	1820 $\frac{5}{2}$	$(140)^2$ 25	140 5	140 5	$13\sqrt{29} = 70 + (140$ $\frac{1}{2}\sqrt{29} = \frac{5}{2} + (5).$
30	2	20	2	10	$\sqrt{30} = 5 + (2, 10).$
31	273	$7^2.62$	7	434	$39\sqrt{31} = 217 + (7$
33	4	44	4	11	$\sqrt{33} = \frac{11}{2} + (4, 11).$
34	6	68	2	34	$3\sqrt{34} = 17 + (2, 3$
35	1	10	1	10	$\sqrt{35} = 5 + (1, 10).$
37	12	144	12	12	$\sqrt{37} = 6 + (12).$
38	6	72	6	12	$\sqrt{38} = 6 + (6, 12).$
39	4	48	4	12	$\sqrt{39} = 6 + (4, 12).$
41	320	64^2	64	64	$5\sqrt{41} = 32 + (64).$
42	2	24	2	12	$\sqrt{42} = 6 + (2, 12).$
43	531	$2.(59)^2$	59	118	$9\sqrt{43} = 59 + (59,$
46	3588	$4.(23)^3$	46	1058	$78\sqrt{46} = 529 + (46$
47	7	94	1	94	$7\sqrt{47} = 47 + (1, 94$
51	7	98	7	14	$\sqrt{51} = 7 + (7, 14).$

:	e	ab	a	b	$\frac{e}{a}\sqrt{z}=\frac{1}{2}b+(a,b)$.
3	9100 $\frac{7}{2}$	$(364)^2$ 49	364 7	364 7	$25\sqrt{53}=182+(364)$. $\frac{1}{2}\sqrt{53}=\frac{7}{2}+(7)$.
5	12	176	4	44	$3\sqrt{55}=22+(4,44)$.
7	20	300	20	15	$\sqrt{57}=\frac{15}{2}+(20,15)$.
8	2574	$(198)^2$	2	19602	$1282\sqrt{58}=9801+(2, 1960$
9	69	2.23^2	23	46	$3\sqrt{59}=23+(23,46)$.
1	59436 ×3805	$(59436)^2$	59436	59436	$3805\sqrt{61}=29718+(59,43$
2	8	124	2	62	$4\sqrt{62}=31+(2,62)$
5	16	256	16	16	$\sqrt{65}=8+(16)$.
6	8	128	8	16	$\sqrt{66}=8+(8,16)$.
7	5967	$2.(221)^2$	221	442	$27\sqrt{67}=221+(221,442$
9	$\frac{3}{2}$ 936	23 15548	1 26	23 598	$\frac{3}{2}\sqrt{69}=\frac{23}{2}+(1,23)$. $36\sqrt{69}=299+(26,598$
0	30	500	10	50	$3\sqrt{70}=25+(10,50)$.
1	413	6958	7	994	$59\sqrt{71}=497+(7,994)$.
3	267000	$(2136)^2$	2136	2136	$125\sqrt{73}=1068+(2136)$
4	430	86^2	86	86	$5\sqrt{74}=43+(86)$.
7	$\frac{1}{2}$ 40	7 700	1 10	7 70	$\frac{1}{2}\sqrt{77}=\frac{7}{2}+(1,7)$. $4\sqrt{77}=35+(10,70)$.
8	6	104	2	52	$3\sqrt{78}=26+(2,52)$.
9	9	158	1	158	$9\sqrt{79}=79+(1,158)$.

z	e	ab	a	b	$\frac{e}{a}\sqrt{z} = \frac{1}{2}b + (a, b)$.
82	18	324	18	18	$\sqrt{82} = 9 + (18)$.
83	9	162	9	18	$\sqrt{83} = 9 + (9, 18)$.
85	$\frac{9}{2}$	81	9	9	$\frac{1}{2}\sqrt{85} = \frac{9}{2} + (9)$.
	30996	571540	82	6970	$378\sqrt{85} = 3485 + 8$
86	1122	$2.(102)^2$	102	204	$11\sqrt{86} = 102 + (102$
87	3	54	3	18	$\sqrt{87} = 9 + (3, 18)$.
89	53000	$(1000)^2$	1000	1000	$53\sqrt{89} = 500 + (100$
91	165	3146	11	286	$15\sqrt{91} = 143 + (11$
93	$\frac{3}{2}$	27	3	9	$\frac{1}{2}\sqrt{93} = \frac{9}{2} + (3, 9)$.
	1260	$3.(90)^2$	9	2700	$140\sqrt{93} = 1350 + (9$
94	221064	$47.(302)^2$	302	14194	$732\sqrt{94} = 7097 + (302, 14194)$.
95	4	76	4	19	$\sqrt{95} = \frac{19}{2} + (4, 19)$.
97	6377352	$(11208)^2$	11208	11208	$569\sqrt{97} = 5604 + (1$

§. 489. *Coroll.* 1.

Quo majus est ab, eo magis convergit Series, ergo ut augeatur convergentia, augendum est ab, quod fit, si quaeritur numerus E major quam e, ita quidem ut $E^2z + 1$ sit etiam quadratus. Hic autem numerus facile reperitur ex cognito numero e.

Sit $e^2z + 1 = f^2$, atque $E^2z + 1 = F^2$, atque cog-

cognitum sit, si $e=s$, esse $s^2z+1=t^2$ numerum quadratum. Ergo $F^2-E^2z=f^2-e^2z$; $1=t^2-s^2z$ unde $F^2-E^2z=(f^2-e^2z)(t^2-s^2z)=f^2t^2-t^2e^2z-s^2f^2z+e^2s^2z^2$. Sit $F=ft+esz$, unde $E^2=2efst+t^2e^2+s^2f^2=(te+sf)^2$, ergo $E=te+sf$.

Exempla. Sit $z=2$.

Ergo $s=2$, $t=3$, unde $F=3f+4e$; $E=2f+3e$; $ab=(F-1)2$; ex quibus eadem ratione prodit $F'=3F+4E$; $E'=2F+3E$, atque ex his $F''=2F'+3E'$; $E''=3E'+2F'$, etc. Quare hae sunt Aequationes fundamentales, si $z=2$; ergo

$F=3$, 17 , 99 , 577 , 3363 , 19601 , 114243.
$E=2$, 12 , 70 , 408 , 2378 , 13860 , 80782.
$ab=4$, 32 , 196 , 1152 , 6724 , 39200 , 228484.

ergo $12\sqrt{2}=16+(1,32)$.
$70\sqrt{2}=98+(1,196)$.
vel $5\sqrt{2}=7+(14)$.

$408\sqrt{2}=576+(1,1152)$.
vel $17\sqrt{2}=24+(24,48)$.

$2378\sqrt{2}=3362+(1,6724)$.
vel $29\sqrt{2}=41+(82)$.
$13860\sqrt{2}=19600+(1,39200)$.
vel $693\sqrt{2}=980+(20,1960)$.
$80782\sqrt{2}=114242+(1,228484)$.
vel $169\sqrt{2}=239+(478)$.

Sit $z=3$.

ergo $s=1$, $t=2$, unde $F=2f+3e$; $E=f+2e$.
ergo $F=2$, 7, 26, 97, 362, 1351, 5042, 18817, 70226.
$E=1$, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, 10864, 40545.
$ab=2$, 12, 50, 192, 722, 2700, 10082, 37632, 140450, etc.

unde $\sqrt{3} = 1 + (1, 2)$.

$4\sqrt{3} = 6 + (1, 12)$, vel $2\sqrt{3} = 3 + (2, 6)$.

$15\sqrt{3} = 25 + (1, 50)$, vel $3\sqrt{3} = 5 + (5, 10)$.

$56\sqrt{3} = 96 + (1, 192)$, vel $7\sqrt{3} = 12 + (8, 24)$.

$209\sqrt{3} = 361 + (1, 722)$, vel $11\sqrt{3} = 19 + (19, 38)$.

$780\sqrt{3} = 1350 + (1, 2700)$, vel $26\sqrt{3} = 45 + (30, 9$

$2911\sqrt{3} = 5041 + (1, 10082)$, vel $41\sqrt{3} = 71 + (71, 14$

$10864\sqrt{3} = 18816 + (1, 37632)$, vel $97\sqrt{3} = 168 + (112, 33$

$40545\sqrt{3} = 70225 + (1, 140450)$, vel $153\sqrt{3} = 265 + (265, 53$

Sit $z = 5$.

ergo $s = 4$, $t = 9$, unde $F = 9f + 20e$; $E = 9e + 4$

$F = 9, 161, 2889, 51941, 931149$.

$E = 4, 72, 1292, 23184, 416430$.

$ab = 16, 320, 5776, 103880, 1862296$.

Hac quidem ratione tanta reddi potest convergentia, ut Fractione ipsa periodica (a, b) non amplius opus sit, sed sufficiat $\frac{b}{2}$ ad radicem usque ad certum quendam limitem vere exprimendam, veluti si $z = 97$, erit $s = 6377352$, $t = (11208)^2$

unde $F = (11208)^2 f + 97 \cdot 6377352\, e$

atque $E = (11208)^2 e + 6377352 f$.

ergo $F = (11208)^3 + 97 \cdot (6377352)^2$

$E = (11208)^2\, 12754704$.

§ 490. *Alia Methodus definiendi Radices quadratas.*

Methodus, quam descripsimus, qua Radices quadratae omnes fiunt formae $\frac{e}{a}\sqrt{z} = \frac{1}{2}b + (a, b)$ prorsus rei accommodata esse videtur, neque esse ali-

aliquid, quod amplius desideretur. Verum Mathematici etiam conati sunt ita exprimere Radices, ut omnes fiant formae

$x = p+(p', p'', p''', p'''' \ldots)$; quod fit, si

$x = p+\frac{1}{x'}$; $x' = p' + \frac{1}{x''}$, $x'' = p'' + \frac{1}{x'''}$ etc.

Continua igitur Divisione utendum est, quae institui potest ducibus formulis

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm b} = \frac{\sqrt{a}\mp b}{(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)} = \frac{\sqrt{a}\mp b}{a^2-b^2}$$

Proponatur exprimere $\sqrt{28}$ per Fractionem continuam periodicam, ubi igitur:

$$x = \sqrt{28} = 5 + \frac{\sqrt{28}-5}{1} = p + \frac{1}{x'}.$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{28}-5} = \frac{\sqrt{28}+5}{28-25} = \frac{\sqrt{28}+5}{3} = \frac{\sqrt{28}-4+9}{3}$$

$$= 3 + \frac{\sqrt{28}-4}{3} = p' + \frac{1}{x''}.$$

$$x'' = \frac{3}{\sqrt{28}-4} = \frac{3.(\sqrt{28}+4)}{12} = \frac{\sqrt{28}+4}{4} = \frac{\sqrt{28}-4+8}{4}$$

$$= 2 + \frac{\sqrt{28}-4}{4} = p'' + \frac{1}{x'''}.$$

$$x''' = \frac{4}{\sqrt{28}-4} = \frac{4(\sqrt{28}+4)}{12} = \frac{\sqrt{28}+4}{3} = \frac{\sqrt{28}-5+9}{3}$$

$$= 3 + \frac{\sqrt{28}-5}{3} = p''' + \frac{1}{x^{\mathrm{IV}}}.$$

$$x^{\mathrm{IV}} = \frac{3}{\sqrt{28}-5} = \frac{3(\sqrt{28}+5)}{3} = \sqrt{28}+5 = 10+\sqrt{28}-5 = p^{\mathrm{IV}} + \frac{1}{x^{\mathrm{V}}}.$$

$$x^{\mathrm{V}} = \frac{1}{\sqrt{28}-5} = x'.$$

Quo-

Quoniam igitur ad x' regressi sumus, desinit Periodus, atque eadem denuo incipit a secundo Quoto sive numero. Ultimus numerus Periodi est duplus primus numerus. Ergo $\sqrt{28} = 5 + (3, 2, 3, 10, 3, 2, 3, 10, 3 \ldots)$. Fractiones partiales sunt $\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{37}{7}, \frac{127}{24}, \frac{1307}{247}, \ldots$

Eodem modo reperimus:

$\sqrt{31} = 5 + (1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10)$ ubi Fractiones partiales sunt $5, 6, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{657}{118}, \frac{863}{155}, \frac{1520}{273}, \ldots$

Hae Fractiones multo minus sunt convergentes quam quae secundum §. 488. reperiuntur. Ita Fractiones partiales $\sqrt{28}$, juxta formulam $4\sqrt{28} = 21 + (6, 42)$, sunt $\frac{21}{4}, \frac{127}{24}, \frac{5355}{1012}$, etc.; ubi secunda Fractio $\frac{127}{24}$ est quarta Seriei $\frac{5}{1}, \frac{16}{3} \ldots$ Secundum Formulam $39\sqrt{31} = 217 + (7, 434)$, Fractiones partiales $\sqrt{31}$ reperiuntur esse $\frac{217}{39}, \frac{1520}{273}, \frac{659897}{3039}$, ubi secunda Fractio est octava Seriei $5, 6, \frac{11}{2} \ldots$

§. 491. *Animadv.*

Usurpari etiam potest haec Formula:

$$(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}+a) = x - a^2, \text{ ergo } \sqrt{x}-a = \frac{x-a^2}{\sqrt{x}+a} = \frac{x-a^2}{2a+\sqrt{x}-}$$

Quoniam ipsa Quantitas $\sqrt{x}-a$ est pars Deno-

nominatoris, haec Aequatio est Fractionum periodicarum. Ergo $\surd x - a = \cfrac{x-a^2}{2a+\cfrac{x-a^2}{2a+\ldots}}$

vel $\surd x - a = \left(\frac{x-a^2}{2a}\right)$.

Sit $x-a^2=b$, atque $2a=bm$, unde $m=\frac{2a}{x-a^2}$.

atque $\surd x = a + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{bm+\cfrac{1}{m+\ldots}}} = a+(m, bm) = a+(m, 2a)$.

ubi a est numerus integer, proxime accedens ad $\surd x$.

Indicat igitur Periodos ex duabus Fractionibus, quarum Numeratores sunt unitates, si $\frac{2a}{x-a^2}$ est integer, velut si $x=6$, $a=2$, erit $b=2$, $m=2$. atque $\surd 6 = 2+(2, 4)$.

Hae duae Fractiones in unam contrahi possunt si $b=1$, vel si $x=1+a^2$, velut si $x=37$, $a=6$, erit $b=1$, $m=12$, unde $\surd 37 = 6+(12)$.

Hanc formulam exposuit Vorsselman de Heer in ejus *Dissertatione de Fractionibus continuis* p. 55.. Est casus specialis formulae $\frac{e}{a}\surd z = \frac{1}{2}b+(a, b)$. Nam si pro a, m, x ponitur $\frac{1}{2}b, a, z$, fit $\surd z = \frac{1}{2}b+(a, b)$ quae est illa ipsa formula si $e=a$. Caeterum simplicissimo modo designat Fractiones continuas periodicas, quarum Numeratores non sunt unitates ut $\surd 69 = 8+\left(\frac{5}{16}\right)$.

§. 492.

§. 492. *Fractiones continuae, quarum Denominatores sunt unitates.*

Ut Fractiones continuae, positis $\overset{(1)}{\mu} = \overset{(2)}{\mu} = \overset{(3)}{\mu} \ldots = 1$, ita etiam positis $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots = 1$ simpliciorem accipiunt formam. In hanc autem formam quaelibet Fractio continua mutari potest.

Sit $P = \cfrac{a'}{a + \cfrac{b'}{b + \cfrac{c'}{c + \cfrac{d'}{d + \cfrac{e'}{e + \ldots}}}}}$ ergo $P = \cfrac{a' : a}{1 + \cfrac{b' : ab}{1 + \cfrac{c' : bc}{1 + \cfrac{d' : cd}{1 + \cfrac{e' : de}{1 + \ldots}}}}}$

Sit $\frac{a'}{a} = \overset{(1)}{\mu}$; $\frac{b'}{ab} = \overset{(2)}{\mu}$; $\frac{c'}{bc} = \overset{(3)}{\mu}$; $\frac{d'}{cd} = \overset{(4)}{\mu}$, etc.

unde $\overset{(n)}{P} = \cfrac{\overset{(1)}{\mu}}{1 + \cfrac{\overset{(2)}{\mu}}{1 + \cfrac{\overset{(3)}{\mu}}{1 + \cfrac{\overset{(4)}{\mu}}{1 + \cfrac{\overset{(5)}{\mu}}{1 + \ldots}}}}}$

Quare leges, quae de his valent Fractionibus sequuntur ex iis, quae exposita sunt §. 437—455. si ponitur $\overset{(1)}{m} = \overset{(2)}{m} = \overset{(3)}{m} = \overset{(4)}{m} \ldots = 1$.

Velut (§. 445.) $\overset{(n)}{P} = \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}$ ubi $\overset{(n)}{\pi} = \overset{(n-1)}{\pi} + \overset{(n)}{\mu}\overset{(n-2)}{\pi}$ atque $\overset{(n)}{p} = \overset{(n-1)}{p} + \overset{(n)}{\mu}\overset{(n-2)}{p}$

Quare $\overset{(1)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{1}$; $\overset{(2)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}}{1+\overset{(2)}{\mu}}$; $\overset{(3)}{P} = \frac{\overset{(1)}{\mu}(1 + \overset{(3)}{\mu})}{1 + \overset{(2)}{\mu} + \overset{(3)}{\mu}}$

$\overset{(4)}{P}$

$\overset{(4)}{p} = \frac{\overset{(1)}{\mu}(1+\overset{(3)}{\mu}+\overset{(4)}{\mu})}{1+\overset{(2)}{\mu}+\overset{(3)}{\mu}+\overset{(4)}{\mu}+\overset{(2)}{\mu}\overset{(4)}{\mu}}$, atque $\frac{\overset{(1)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}} = 1$; $\frac{\overset{(2)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}} = 1$

$\frac{\overset{(3)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}} = 1 + \overset{(3)}{\mu}$; $\frac{\overset{(4)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}} = 1 + \overset{(3)}{\mu} + \overset{(4)}{\mu}$ etc. Ita etiam

$\overset{(1)}{p} = 1$; $\overset{(2)}{p} = 1 + \overset{(2)}{\mu}$; $\overset{(3)}{p} = 1 + \overset{(2)}{\mu} + \overset{(3)}{\mu}$, etc.

Ex quo prodit haec tabula indicans valorem Numeratoris $\overset{(n)}{\pi}$ et Denominatoris $\overset{(n)}{p}$, ubi numeris 1, 2, 3, 4, 5 . . . designantur $\overset{(1)}{\mu}, \overset{(2)}{\mu}, \overset{(3)}{\mu}, \overset{(4)}{\mu}, \overset{(5)}{\mu} \ldots$ *unitas* ipsa signo (1). *Numerator* $\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}}$ *aequalis est Summae omnium terminorum, qui sunt conscripti in lineis verticalibus, quae sunt sub* $\frac{\overset{(2)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}}$ *usque ad* $\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}}$. Idem valet de Denominatore $\overset{(n)}{p}$. Ita $\frac{\overset{(8)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}}$ ex 21 terminis sed $\overset{(8)}{p}$ ex 34 terminis constat.

$\frac{\overset{(2)}{\pi}}{\overset{(1)}{\mu}}$

$\frac{(2)\pi}{(1)\mu}$,	$\frac{(3)\pi}{(1)\mu}$,	$\frac{(4)\pi}{(1)\mu}$,	$\frac{(5)\pi}{(1)\mu}$,	$\frac{(5)\pi}{(1)\mu}$,	$\frac{(7)\pi}{(1)\mu}$,	$\frac{(8)\pi}{(1)\mu}$,	$\frac{(9)\pi}{(1)\mu}$
(1)	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
			+ 3.5	+ 3.6	+ 3.7	+ 3.8	+ 3.9
				+ 4.6	+ 4.7	+ 4.8	+ 4.9
					+ 5.7	+ 5.8	+ 5.9
					+ 3.5.7	+ 3.5.8	+ 3.5.9
						+ 6.8	+ 6.9
						+ 3.6.8	+ 3.6.9
						+ 4.6.8	+ 4.6.9
							+ 7.9
							+ 3.7.9
							+ 4.7.9
							+ 5.7.9
							+ 3.5.7.9

(1) p,	(2) p,	(3) p,	(4) p,	(5) p,	(6) p,	(7) p,	(8) p,	(9) p,
(1)	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9
			+ 2.4	+ 2.5	+ 2.6	+ 2.7	+ 2.8	+ 2.9
				+ 3.5	+ 3.6	+ 3.7	+ 3.8	+ 3.9
					+ 4.6	+ 4.7	+ 4.8	+ 4.9
					+ 2.4.6	+ 2.4.7	+ 2.4.8	+ 2.4.9
						+ 5.7	+ 5.8	+ 5.9
						+ 2.5.7	+ 2.5.8	+ 2.5.9
						+ 3.5.7	+ 3.5.8	+ 3.5.9
							+ 6.8	+ 6.9
							+ 2.6.8	+ 2.6.
							+ 3.6.8	+ 3.6.
							+ 4.6.8	+ 4.6.
							+ 2.4.6.8	+ 2.4.6.
								+ 7
								+ 2.7
								+ 3.7
								+ 4.7
								+ 2.4.7

+ 5.7.9 | + 2.5.7.9 | + 3.5.7

3.49

§. 493.

Simili modo repraesentari possunt Fractiones partiales Fractionis continuae:

$$p = \cfrac{1}{\overset{(1)}{m} + \cfrac{1}{\overset{(2)}{m} + \ldots}} = \left\{ \overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m}, \overset{(4)}{m} \ldots \overset{(n)}{m} \right\} \text{ §. 468.}$$

quoniam $\overset{(n)}{\pi} = \overset{(n)}{m}\,\overset{(n-1)}{\pi} + \overset{(n-2)}{\pi}$ atque $\overset{(n)}{p} = \overset{(n)}{m}\,\overset{(n-1)}{p} + \overset{(n-2)}{p}$.

$\overset{(4)}{\pi}$,	$\overset{(5)}{\pi}$,	$\overset{(6)}{\pi}$,	$\overset{(7)}{\pi}$,	$\overset{(8)}{\pi}$,	$\overset{(1)}{p}$,	$\overset{(2)}{p}$,	$\overset{(3)}{p}$,	$\overset{(4)}{p}$,	$\overset{(5)}{p}$,	$\overset{(6)}{p}$,	$\overset{(7)}{p}$,
4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7
4	5	6	7	8		(1)	3	4	5	6	7
2	5	6	7	8			1	4	5	6	7
	2.3	6	7	8				1.2	5	6	7
	(1)	6	7	8				(1)	5	6	7
		2.3.4	7	8					1.2.3	6	7
		4	7	8					3	6	7
		2	7	8					1	6	7
			2.3.4.5	8						1.2.3.4	7
			4.5	8						3.4	7
			2.5	8						1.4	7
			2.3	8						1.2	7
			(1)	8						(1)	7
				2.3.4.5 6							1.2.3.4.5
				4 5 6							3.4.5
				2.5 6							1.4.5
				2.3.6							1.2.5
				6							5
				2.3.4							1.2.3
				4							3
				2							1

Quae sunt in eadem linea horizontali sunt Factores, qui efficiunt Productum, atque $\overset{(n)}{\pi}$ vel $\overset{(n)}{p}$ conti-

tinent omnia Producta quae sunt sub $\overset{(2)}{\pi}$ usque ad $\overset{(n)}{\pi}$, vel sub $\overset{(2)}{p}$ usque ad $\overset{(n)}{p}$, veluti:

$$\overset{(5)}{\pi} = 2.3.4.5 + 4.5 + 2.5 + 2.3 + (1) = \overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m}.\overset{(5)}{m} + \overset{(4)}{m}.$$
$$+ \overset{(2)}{m}.\overset{(5)}{m} + \overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m} + 1, \text{ atque } \overset{(5)}{p} = 1.2.3.4.5 + 3.4.5 + 1.$$
$$+ 1.2.5 + 1.2.3 + 3 + 1 = \overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m}.\overset{(5)}{m} + \overset{(3)}{m}.\overset{(4)}{m}.\overset{(5)}{m} + \overset{(1)}{m}.\overset{(4)}{m}.$$
$$+ \overset{(1)}{m}\,\overset{(2)}{m}\,\overset{(5)}{m} + \overset{(1)}{m}.\overset{(2)}{m}.\overset{(3)}{m} + \overset{(3)}{m} + \overset{(1)}{m}.$$

§. 494. *Usus continuarum Fractionum.*

Multus est usus Fractionum continuarum in variis Matheseos partibus, de quo tum dicendi erit locus, quando hae partes tractantur. Ergo pauca tantum huc afferantur exempla, ex quibus hic usus in Ratione inter duo Quanta constituenda elucescat.

In computandis autem Fractionibus partialibus secundum regulam praescriptam §. 472. intelligendum est, Fractionem mixtam, quae constet ex numero integro, atque ex Fractione continua, eodem modo posse designari et computari, quo Fractio simplex continua, dummodo Fractionibus partialibus anteponantur Fractiones $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$.

Sit Fractio $3 + (2, 4, 5)$.

Ergo indices $2; 4; 5.$

Fract. part. $\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{21}{47}$. Si his additur 3,

Fractiones sunt $\frac{7}{2}; \frac{31}{6}; \frac{162}{47}$.

Nu-

Numerus autem 3 referatur ad ipsos indices, sed anteponantur Fractiones $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$.

Unde indices $3;\ 2;\ 4;\ 5$.

Fr. part. $\frac{0}{1}; \frac{1}{0}; \frac{3}{1}; \frac{7}{2}; \frac{31}{9}; \frac{162}{47}$. Prodeunt igitur eaedem Fractiones. Quare denotemus in posterum omnes Fractiones continuas, sive mixtas sive simplices hoc modo $x = (m, \overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots)$ ubi m significat numerum integrum. Si nullus est numerus integer, pro m ponitur 0; veluti $\frac{162}{47} = (3, 2, 4, 5)$. Sed $\frac{21}{47} = (0, 2, 4, 5)$.

Nam in hac posteriore Fractione:

indices sunt $0;\ 2;\ 4;\ 5$

Fr. part. $\frac{0}{1}; \frac{1}{0}; \frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{4}{9}; \frac{21}{47}$.

Exempla.

I. Ratio inter peripheriam et diametrum circuli, quae vulgo indicatur litera π, est:

$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$ etc.

el $\frac{1}{\pi} = 0,31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77679\ 26745\ 02872$ etc.

Si in Fractionem continuam, sumtis 35 notis, mutatur,

it $\pi = (3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,$
$2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,1)$.

Quod si autem Denominatoribus etiam negativis utimur, indices sunt:

$3,7,16,-294,-3,-4,-5,-15,+3,-2,2,2,2,3-85,$
$3,-2,15,3,-14,-5,2,6,6,1$; ubi igitur novem omittuntur Fractiones partiales. Quare si hoc duplice genere utimur, erunt:

In-

Indices $3; 7; 15; 1; 292; 1; 1; 1;$
$3; 7; \ldots; 16; \ldots; -294; \ldots\ldots; -3;$

Fract. part. $\frac{0}{1}; \frac{1}{0}; \frac{3}{1}; \frac{22}{7}; \frac{333}{106}; \frac{355}{113}; \frac{103993}{33102}; \frac{104348}{33215}; \frac{208341}{66317}; \frac{312689}{99532};$

Indices $1; 3; 1; 14; 2;$
$-4; \ldots; -5; -15; \ldots;$

Fract. part. $\frac{1146408}{364913}; \frac{4272943}{1360120}; \frac{5419351}{1725033}; \frac{80143857}{25510582}; \frac{165707065}{52746197}; \frac{245}{78}$

Indices $1; 2$
$-2; 2$

Fract. part. $\frac{411557987}{131002976}; \frac{1068966896}{340262731}$ et ita deinceps, ita ut ultima Fra

index est 1, sit $\frac{3076704071730373588}{979345322893700547}$.

Fractio *prima* $\frac{3}{1}$ minor est, sed Fractio *secunda* $\frac{22}{7}$ major est quam Fractio vera π (§. 474.). Sed $\frac{22}{7} = 3,14285\ldots$ est Ratio quam invenit *Archimedes*. Differentia inter eam atque π minor est quam $\frac{1}{7^2}$ $\left(= \frac{1}{49} = 0,020408,\right)$ (§. 477.) atque revera $\frac{22}{7} - \pi = 0,00126\ldots$ ergo minor quam $\frac{1}{7^2}$.

Fractio *tertia* $\frac{333}{106} = 3,141509\ldots$ minor est quam π. Differentia inter eam atque π minor est quam $\frac{1}{(106)^2}$ vel etiam minor quam $\frac{1}{(106)(113)}$ sive $0,00008348\ldots$ Vera Differentia est $0,0000832\ldots$

Fractio *quarta* $\frac{355}{113} = 3,1415932\ldots$ proposita

fuit

fuit a *Metio*, atque primis sex decimalibus cum π convenit.

Fractio $\frac{103993}{33102}$ minus a π differt quanta quantitate $\left(\frac{1}{33102}\right)^2$ vel etiam Quantitate $\frac{1}{(33102)(33215)}$ $=$ 0,0000000009095I, ergo saltem primis novem decimalibus cum π convenit.

Omnino si Denominator Fractionis constat ex m notis, saltem cum π convenit prioribus $2m-1$ notis decimalibus. Ultima igitur Fractio cum π saltem convenit prioribus 35 notis decimalibus.

II. Ex hac Ratione π, aliae reperiuntur. *Ratio* enim *inter aream circuli et quadratum diametri est* $\frac{\pi}{4}$. Quare Fractiones, quae ad $\frac{\pi}{4}$ accedunt, sunt $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{333}{424}$, $\frac{355}{452}$, $\frac{103993}{132408}$ etc.

Haec autem non est Series Fractionum partialium. Continua enim divisione inveniuntur.

Indices 0; 1; 3; 1; 1; 1; 15; 2...

act. part. $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{0}$; $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{1}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{11}{14}$; $\frac{172}{219}$; $\frac{355}{452}$.

Quare interponendae sunt $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$ et $\frac{172}{219}$...

Ratio inter soliditatem sphaerae et cubum diametri est $\frac{\pi}{6}$. Quare Fractiones sunt $\frac{1}{2}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{111}{212}$; $\frac{355}{678}$; $\frac{103993}{198612}$..

sed continua divisione reperiuntur.

Indices 0; 1; 1; 10; 10; 1; 1; 1

ct. part. $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{0}$; $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{11}{21}$; $\frac{111}{212}$; $\frac{122}{233}$; $\frac{233}{445}$; $\frac{355}{678}$....

ergo interponuntur $\frac{122}{233}$ et $\frac{233}{445}$.

III.

III. $\sqrt{\pi} = 1,772\,453\,850\,905\,532.$

Quare $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,886\,226\,925\,452\,766\ldots$, quae est *Ratio inter latus Quadrati atque diametrum circuli, qui aream habet aequalem huic Quadrato.*

Indices sunt $0;\ 1;\ 7;\ 1;\ 3;\ 1;\ 2;\ 1\ldots$

Fract. part. $\frac{0}{1};\ \frac{1}{0};\ \frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{7}{8};\ \frac{8}{9};\ \frac{31}{35};\ \frac{39}{44};\ \frac{109}{123};\ \frac{148}{167}$ etc.

IV. $\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 0,80599\,59770\,08234\,82035\,5\ldots$

quae est *Ratio inter latus cubi, atque diametrum sphaerae, quae soliditatem habet aequalem huic cubo.*

Indices sunt $0;\ 1;\ 4;\ 6;\ 2;\ 8;\ 6;\ 6.$

Fract. part. $\frac{0}{1};\ \frac{1}{0};\ \frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{4}{5};\ \frac{25}{31};\ \frac{54}{67};\ \frac{457}{567};\ \frac{2796}{3469};\ \frac{1723}{2138}$

V. Basis Logarithmorum naturalium (§. 228.) est

$e = 2,71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\ldots$

Indices sunt $2;\ 1;\ 2;\ 1;\ 1;\ 4;\ 1;\ 1;\ 6;\ 1$

Fract. part. $\frac{0}{1};\ \frac{1}{0};\ \frac{2}{1};\ \frac{3}{1};\ \frac{8}{3};\ \frac{11}{4};\ \frac{19}{7};\ \frac{87}{32};\ \frac{106}{39};\ \frac{193}{71};\ \frac{1264}{465};\ \frac{14}{5}$

Multo magis convergit Series Fractionis $\frac{e-1}{2}$

$= 0,85914\,09142\,29522\,61768\,01437\ldots$

Etenim

Indices sunt $0;\ 1;\ 6;\ 10;\ 14;\ 18;\ 22\ldots$

Fract. part. $\frac{0}{1};\ \frac{1}{0};\ \frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{6}{7};\ \frac{61}{71};\ \frac{860}{1001};\ \frac{15541}{18089};\ \frac{342762}{328959};$

$\frac{342762}{398659} = 0,8591\,4091\,4231.$ Ergo primae 11 notae

tae decimalis jam conveniunt. Memoratu etiam dignum est, indices, si primum excipis, esse in Progressione Arithmetica, cujus differentia communis est 4.

VI. *Tempus Syderale, quo Luna suam percurrit orbitam* est 27, 321661 *dies*

Indices sunt 27; 3; 9; 5; 2

Fract. part. $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{0}$; $\frac{27}{1}$; $\frac{82}{3}$; $\frac{765}{28}$; $\frac{3907}{143}$; $\frac{8579}{314}$.

Quare si ponimus, Lunam 28 orbitas perficere 765 diebus, id a vero minus differt quam $\frac{1}{28 \cdot 143}$ vel 0,00025 partibus diei.

VII. Annus Tropicus continet 365 dies atque praeterea $5^h\ 48'\ 48'' = 0,2422222\ldots$ $= \frac{20928}{86400} = \frac{109}{450}$ partibus diei.

ndices sunt 0; 4; 7; 1; 3; 1; 2

'ract. part. $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{0}$; $\frac{0}{1}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{29}$; $\frac{8}{33}$; $\frac{31}{128}$; $\frac{39}{161}$; $\frac{109}{450}$ etc.

In ephemeridibus Julianis usurpatur prima Fractio $\frac{1}{4}$, quoniam annum ponunt esse $365\frac{1}{4}$ dierum. Sed in ephemeridibus Gregorianis annus est $365\ \frac{97}{400}$ dierum, quoniam singulis quadringentis annis 97 dies intercalantur. Sed $\frac{97}{400} = \frac{109\frac{1}{8}}{450}$. Ergo differt a vero $\frac{1}{3600}$ diei.

Si annus Tropicus foret $365^d\ 5^h\ 48'\ 49'$ Fractio esset $\frac{20929}{86400}$ diei.

In-

Indices sunt 0; 4; 7; 1; 3; 1; 16; 1; 1; 15

Fract. part. $\frac{0}{1}; \frac{1}{0}; \frac{0}{1}; \frac{1}{4}; \frac{7}{29}; \frac{8}{33}; \frac{31}{128}; \frac{39}{161}; \frac{655}{2704}; \frac{694}{2865}; \frac{1349}{5569}; \frac{20929}{86400}$.

ubi priores quinque Fractiones eaedem sunt, quae antea. Fractio $\frac{97}{400}$ in ephemeridibus Gregorianis differt a vera Fractione $\frac{1}{3756}$ diei.

§. 495. *Animadv.*

De hoc usu notanda sunt:

1. Si quis numerus Fractus $\frac{r}{s}$ interpositus est inter duas Fractiones partiales sibi proximas $\frac{\pi^{(n)}}{p^{(n)}}$ et $\frac{\pi^{(n+1)}}{p^{(n+1)}}$, adeo ut major sit quam alterutra, minor autem quam altera, erit ejus Denominator s major, quam major Denominator $p^{(n+1)}$ harum duarum Fractionum partialium.

Sit enim $\frac{\pi^{(n+1)}}{p^{(n+1)}}$ major Fractio partialis, quae igitur major est, quam vera Fractio (§. 270.), ergo $\frac{r}{s} < \frac{\pi^{(n+1)}}{p^{(n+1)}}$. Cum autem sit $\frac{\pi^{(n+1)}}{p^{(n+1)}} - \frac{\pi^{(n)}}{p^{(n)}} = \frac{1}{p^{(n)} p^{(n+1)}}$ (§. 474.), erit $\frac{r}{s} - \frac{\pi^{(n)}}{p^{(n)}} < \frac{1}{p^{(n+1)} p^{(n)}}$, sive

rp

$r\overset{(n)}{p} - \overset{(n)}{\pi}s < \frac{s}{\overset{(n+1)}{p}}$. Quoniam autem $r\overset{(n)}{p} - \overset{(n)}{\pi}s$ est numerus integer positivus, erit $s > \overset{(n+1)}{p}$.

Eadem est conclusio si $\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}$ major est Fractio partialis. Tum enim $\frac{r}{s} > \frac{\overset{(n+1)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{p}}$; ergo

$\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}} - \frac{r}{s} < \frac{1}{\overset{(n+1)}{p}\,\overset{(n)}{p}}$; ergo $\overset{(n)}{\pi}s - \overset{(n)}{p}r < \frac{s}{\overset{(n+1)}{p}}$, ergo $s > \overset{(n+1)}{p}$.

2. Quare inter duas Fractiones partiales sibi proximas nulla interponi potest Fractio, nisi quae habeat majorem Denominatorem, quam ipsae habent.

3. Ergo quaelibet Fractio partialis $\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}$ verius indicat valorem totius Fractionis, quam quaelibet alia Fractio, cujus Denominator minor foret, quam ejus ipsius est.

4. Seriem Fractionum partialium in duas Series dividere possumus:

$\overset{(1)}{P}, \overset{(3)}{P}, \overset{(5)}{P} \ldots \overset{(2n+1)}{P}$, atque $\overset{(2)}{P}, \overset{(4)}{P}, \overset{(6)}{P} \ldots \overset{(2n)}{P}$

ex quibus alterutra Series est crescens, cujus singuli termini tota Fractione minores sunt; altera decrescens, cujus singuli termini majores sunt,

 ve-

veluti (§. 494. V.) Series crescens numeri e est $2; \frac{8}{3}; \frac{19}{7}; \frac{106}{39}; \frac{1264}{465}; \frac{2721}{1001}; \frac{36145}{13297}$ etc. Series autem decrescens est $3; \frac{11}{4}; \frac{87}{32}; \frac{193}{71}; \frac{1457}{536}; \frac{4178}{1537}$.

5. Si quaeritur, quinam utriusque Seriei terminis interponi possint termini, ita definitur.

Forma duorum terminorum sibi proximorum utriusque Seriei est $\frac{\overset{(n+2)}{\pi}}{\overset{(n+2)}{p}}$ et $\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}$.

Est autem $\overset{(n+2)}{\pi} = m\overset{(n+1)}{\pi} + \overset{(n)}{\pi}$ et $\overset{(n+2)}{p} = m\overset{(n+1)}{p} + \overset{(n)}{p}$.

Sunt igitur $m - 1$ termini intermedii $\frac{\overset{(n+1)}{\pi} + \overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{p} + \overset{(n)}{p}}$;

$$\frac{2\overset{(n+1)}{\pi} + \overset{(n)}{\pi}}{2\overset{(n+1)}{p} + \overset{(n)}{p}};\ \frac{3\overset{(n+1)}{\pi} + \overset{(n)}{\pi}}{3\overset{(n+1)}{p} + \overset{(n)}{p}} \dots \frac{(m-1)\overset{(n+1)}{\pi} + \overset{(n)}{\pi}}{(m-1)\overset{(n+1)}{p} + \overset{(n)}{p}}.$$

Index m, si non cognitus est, hoc modo reperitur:

Sit $\frac{\overset{(n+2)}{\pi}}{\overset{(n+2)}{p}} - \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}} = \frac{A}{\overset{(n)}{p}\overset{(n+2)}{p}}$, ergo $A = \overset{(n)}{p}\overset{(n+2)}{\pi} - \overset{(n)}{\pi}\overset{(n+2)}{p}$

$$= \overset{(n)}{p}\left(m\overset{(n+1)}{\pi} + \overset{(n)}{\pi}\right) - \overset{(n)}{\pi}\left(m\overset{(n+1)}{p} + \overset{(n)}{p}\right)$$

$$= m\left(\overset{(n)}{p}\overset{(n+1)}{\pi} - \overset{(n)}{\pi}\overset{(n+1)}{p}\right) = m\overset{(n)}{p}\overset{(n+1)}{p}\left(\frac{\overset{(n+1)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{p}} - \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}\right)$$

$= m$ (§. 474.). Quare $m = A$, subtractione facile reperitur, atque est unitas, si nullus est terminus intermedius.

Exem-

Exemplum hujus calculi nobis praebeat numerus e (§. 494. IV). Inter $\frac{2}{1}$ et $\frac{8}{3}$ unus est terminus medius, qui est $\frac{5}{2}$; inter $\frac{11}{4}$ et $\frac{87}{32}$ sunt intermedii $\frac{30}{11}; \frac{49}{18}; \frac{68}{25}$; inter $\frac{106}{39}$ et $\frac{1264}{465}$ sunt $\frac{299}{110}; \frac{492}{181}; \frac{685}{252}; \frac{878}{323}; \frac{1071}{394}$. Quare Series adscendens est $\frac{2}{1}; \frac{5}{2}; \frac{8}{3}; \frac{19}{7}; \frac{106}{39}; \frac{299}{110}; \frac{492}{181}; \frac{685}{252}; \frac{878}{323}; \frac{1071}{394}; \frac{1264}{465} \ldots$ Series descendens est $\frac{3}{1}; \frac{11}{4}; \frac{30}{11}; \frac{49}{18}; \frac{68}{25}; \frac{87}{32}; \frac{193}{71} \ldots$

In Serie adscendente est $\frac{\pi^{(n)}}{p^{(n)}} - \frac{\pi^{(n+1)}}{p^{(n+1)}} = -\frac{1}{p^{(n)} p^{(n+1)}}$, vel $\pi^{(n)} p^{(n+1)} - p^{(n)} \pi^{(n+1)} = -1$, in Serie descendente est $\pi^{(n)} p^{(n+1)} - p^{(n)} \pi^{(n+1)} = +1$.

Alterum exemplum suppeditet π (§. 494. I). Inter $\frac{3}{1}$ et $\frac{333}{106}$ sunt 14 termini intermedii, qui sunt $\frac{25}{8}; \frac{47}{15}; \frac{69}{22}; \frac{91}{29}$ etc. Inter $\frac{333}{106}$ et $\frac{103993}{33102}$ sunt 291 termini intermedii $\frac{688}{219}; \frac{1043}{332} \ldots$

Ergo Series adscendens est $\frac{3}{1}; \frac{25}{8}; \frac{47}{15}; \frac{69}{22}; \frac{91}{29}; \frac{113}{36}; \frac{135}{43}; \frac{157}{50}; \frac{179}{57}; \frac{201}{64}; \frac{223}{71}; \frac{245}{78}; \frac{267}{85}; \frac{289}{92}; \frac{311}{99}; \frac{333}{106}; \frac{688}{219}; \frac{1043}{332}$ etc. ubi $A = -1$.

Se-

Series descendens est $\frac{4}{1}; \frac{7}{2}; \frac{10}{3}; \frac{13}{4}; \frac{16}{5}; \frac{19}{6}; \frac{22}{7};$ $\frac{355}{113}$ etc. ubi $A = 1$.

§. 496. *Animadv.* 2.

Haec praecipue sunt quae in his elementis de Fractionibus continuis hoc loco erant explicanda. Eulerus primus earum naturam accurate investigavit, earumque ostendit usum cum in *Introductione in Analysin finitorum et infinitorum*, in *Opusculis Analyticis* Tom. II. tum in *Academiae Petropolitanae Commentationibus veteribus* T. IX et XI. et novis T. XI et XVIII. atque in actis Petropol. T. III et VI. J. L. Lagrange earum usum in solvendis Aequationibus explicavit in *actis Acad. Berolinensis* (*Mémoires de l'Académie de Berlin*) Vol. XXIII et XXIV, quae commentationes etiam separatim editae sunt, inscriptae *Résolution des Equations numériques de tous les degrés.* Paris A. VI. De iis etiam egerunt Legendre (*Essai sur la Théorie des nombres*) p. 121 seqq. Lambert (*Beyträge zum Gebrauche der Mathematik*) T. II. aliique. Hoc tempore P. O. C. Vorsselman de Heer in suo *Specimine inaugurali*, *de Fractionibus continuis* perite et docte de iis egit, id sibi proponens, ut inter Series, quas dedit Gauss in *Comment. Acad. Gott. recent.* Vol. II. novas inveniret relationes, quibus et unitas efficeretur, ipsarumque usus plenior fieret.

P. II. CAPUT V.

DE NUMERORUM DIVISORIBUS.

§. 497. *Congruentia numerorum. Modulus et Residuum. Definitio.*

Si 47 dividitur per 7, prodit 6 atque Residuum est 5, id est $\frac{47}{7} = 6 + \frac{5}{7}$; ex quo sequitur $\frac{47-5}{7} = 6$ atque $\frac{5-47}{7} = -6$ esse numeros integros; quare ex numeris 47 et 5 alter est Residuum alterius, si Divisio fit per 7. Hac in re C. F. Gauss in egregiis suis *disquisitionibus Arithmeticis* (Lipsiae 1801.) usus est his denominationibus et designationibus, ad rem accommodatis.

Si a, b, m numeri sunt *integri positivi*, atque Quotus $\frac{a-b}{m}$ est *integer*, a et b dicuntur *esse congrui secundum m*, atque *alter alterius esse Residuum.* Numerus m vocatur *modulus*, atque semper habetur *positivus et integer.* Numeri autem integri a et b, quorum Differentia per m non est divisibilis (§. 175.), dicuntur esse *incongrui secun-*

cundum m, atque *alter esse alterius non Residuum.*

Congruentia indicatur signo ≡ interposito inter congruos numeros, adjecto in Parenthesi, si opus est, modulo, ut $a \equiv b$ (mod. m) significat $\frac{a-b}{m}$ *esse numerum integrum*, velut $8 \equiv 29$ (mod. 7); $-8 \equiv 27$ (mod. 7). Ergo $a \equiv 0$ significat *a esse divisibilem per modulum.* Si modulus non est adjectus, is intelligitur esse m, id est, singulis Differentiis, de quibus agitur, eundem esse modulum.

Animadv. In hac Theoria de Divisoribus numerorum, numeri universales $a, b, k \ldots m, p, x \ldots$ significant semper *numeros integros positivos.*

§. 498. *Coroll.* 1.

1. Si $a \equiv b$, erit $b \equiv a$, atque si $b \equiv a$, erit $a \equiv b$.

2. Si $a \equiv -b$, erit $-a \equiv b$, et si $-a \equiv b$, erit $a \equiv -b$.

3. Si $a \equiv b$, erit $na \equiv nb$, atque $-na \equiv -nb$, id est: *si duo numeri sunt congrui, etiam ipsorum aequimulta sunt congrua secundum eundem modulum.*

Ex quo etiam sequitur: *signum utriusque numeri congruentis mutari posse, salva congruentia.*

4. Si $a \equiv b$ (mod. mn), erit $a \equiv b$ (mod. m), atque $a \equiv b$ (mod. n); id est: *quicunque numeri sunt congrui secundum Productum duorum aut plurium Factorum integrorum, etiam congrui sunt secundum singulos hujus Producti Factores.*

5. Si $a \equiv c$, atque $b \equiv c$, erit $a \equiv b$, id est: *si plu-*

plures numeri cum eodem numero congrui sunt, inter se sunt congrui, secundum eundem modulum.

6. Si $b \equiv 0$, etiam $cb \equiv 0$. Quare *si b et* $(a \pm cb)$ *habent Divisorem communem, etiam a hunc habet Divisorem. Sed si a et b sunt inter se primi, etiam b et* $a \pm cb$ *inter se primi sunt. Quemcunque Divisorem communem habent a et b, eundem habent b et* $(a \pm cb)$.

7. Si na non est $\equiv nb$, etiam a non est $\equiv b$, id est: *si aequimulta duorum numerorum non sunt congrua, etiam numeri ipsi non sunt congrui.*

8. $a \equiv a$ *secundum quemlibet modulum.*

9. Si a et b *minores sunt quam* m, $\frac{a-b}{m}$ *non est numerus integer.*

10. *Si a et b minores sunt quam* $\frac{m}{2}$, $\frac{a+b}{m}$ *non est numerus integer.*

§. 499. *Coroll.* 2.

$\frac{a - a \pm km}{m} = \pm k$, id est: $a \equiv a \pm km$ (mod. m).

Ergo *forma generalis cujusque numeri, cum a congrui, est* $a \pm km$, *qui numerus igitur est Residuum ipsius a.*

§. 500. *Coroll.* 3.

Sit $\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}$, ergo $\frac{a}{n} = \frac{bk}{n} + \frac{r}{n}$. *Quare si ex his tribus numeris* $\frac{a}{n}$, $\frac{bk}{n}$ et $\frac{r}{n}$, *duo sunt integri, etiam tertius est integer.*

§. 501.

§. 501. *Coroll.* 4.

Si $\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}$, erit $\frac{a}{r} = \frac{bk}{r} + 1$. *Ergo si ex his duobus numeris* $\frac{a}{r}$ et $\frac{bk}{r}$ *alteruter est integer, alter etiam est integer.*

§. 502. *Coroll.* 5.

Ex §. 501. sequitur: *si in Aequationibus* §. 466 et 467, *quae Fractionem continuam constituunt*, A et B per aliquem numerum sunt divisibiles, etiam C, D, E, F ... per eundem numerum sunt divisibiles, atque si E et F per aliquem numerum sunt divisibiles, per eundem numerum etiam divisibiles sunt D, C, B, A, id est:

1. *Communis Divisor numerorum A et B etiam est Divisor communis omnium consequentium Residuorum.*

2. *Communis Divisor duorum Residuorum sibi vicinorum etiam est communis Divisor omnium antecedentium Residuorum atque terminorum A et B.*

3. *Residuum, quod est Divisor antecedentis Residui, atque igitur ultimum Residuum, est communis Divisor omnium Residuorum atque terminorum A et B.* Quare *si hoc Residuum est unitas, nullus est Divisor communis, atque Fractio* $\frac{A}{B}$ *jam ad minimos terminos reducta est* (1).

§. 503.

(1) Eucl. VII. Prop. I.

§. 503. *Coroll.* 6.

Ergo continua illa Divisione, quae exposita est §. 467, 468., qua reperiuntur $\overset{(1)}{m}, \overset{(2)}{m}, \overset{(3)}{m} \ldots$ Fractionis continuae, etiam maximus Divisor communis reperitur, velut: $\frac{13957}{10081} = 1 + \frac{3876}{10081}$; $\frac{10081}{3876} = 2 + \frac{2329}{3876}$; $\frac{3876}{2329} = 1 + \frac{1547}{2329}$; $\frac{2329}{1547} = 1 + \frac{782}{1547}$; $\frac{1547}{782} = 1 + \frac{765}{782}$; $\frac{782}{765} = 1 + \frac{17}{765}$; $\frac{765}{17} = 45$, ubi 17 est ultimum Residuum, atque Divisor antecedentis Residui. Ergo 17 est maximus Divisor communis numerorum 13957, 10081, 3876, 2329, 1547, 782, 765, 17; qui si dividuntur per 17, prodit 821, 593, 228, 137, 91, 46, 45, 1, ex quibus 821, 593 et 137, sunt numeri primi. Sed neque 91 et 46, neque 46 et 45 communem aliquem habent Divisorem. Quare Fractio $\frac{13957}{10081}$ ad minimos terminos reducta (§. 180.), est $\frac{821}{593} = \left\{1, 2, 1, 1, 1, 1, 45\right\}$. At vero in Fractione $\frac{420887}{422699} = \left\{1, 232, 3, 1, 1, 1, 1, 16, 6\right\}$ ultimum Residuum est unitas; quare termini Fractionis sunt inter se primi.

§. 504. *Coroll. 7. De maximo communi Divisore Polynomiorum reperiundo.*

Eodem fere modo reperiri potest maximus Divisor communis duorum Polynomiorum universalium for-

mae $\phi(x) = ax^m + bx^{m-1} \ldots + sx + t$. Si Coefficientes utriusque Polynomii communem habent Divisorem, hic separatim definitur, (§. 183. p. 210. §. 503.) uti etiam, si Divisorem x^n habent communem. Ergo qui quaerendus restat Divisor maximus communis, est ipsa Functio x formae $\alpha x^\mu + \beta x^{\mu-1} \ldots + \pi x + \rho$, ubi Exponens μ minor est, quam summus Exponens in alterutro horum Polynomiorum. Quare Divisor hic maximus non mutatur, etiamsi Functiones ipsius x per aliquem numerum determinatum, sive per aliquam Potestatem ipsius x multiplicantur vel dividuntur; quod etiam saepe necesse est, ut peragi possit Divisio, neque Quotus fiat Fractio.

Quod ut illustretur, proponatur maximus communis Divisor reperiundus harum duarum Functionum, $A = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$ et $B = 7x^2 - 12x + 5$. Est autem $\frac{7A}{B} = 2x + 4 + 3\left(\frac{x^2 - 6x + 5}{7x^2 - 12x + 5}\right) = 2x + 4 + \frac{3C}{B}$. Sed $\frac{B}{C} = 7 + 30\left(\frac{x-1}{x^2 - 6x + 5}\right) = 7 + 30\frac{D}{C}$, atque $\frac{C}{D} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x-1} = x - 5$. Ergo $D = x - 1$ est maximus Divisor communis. Etenim $7A = (2x+4)B + 3C$; $B = 7C + 30D$; $C = (x-5)D$. Quare C, B et $7A$ (ergo etiam A) divisibiles sunt per $D = x - 1$; atque C, B, A divisi per $x - 1$ fiunt $x - 5$, $7x - 5$, $2x^2 + 3x - 5$, atque Functio fracta $\frac{A}{B}$ ad minimos terminos reducta, est $\frac{2x^2 + 3x - 5}{7x - 5}$.

Si.

Similiter si A est $= x^5 - 9x^4 + 38x^3 - 86x^2 + 105x - 49$ et $B = 5x^4 - 36x^3 + 114x^2 - 172x + 105$, erit $\frac{25A}{B} = 5x - 9 + \frac{8C}{B}$; $\frac{49B}{C} = 35x - 87 + 300\frac{D}{C}$; $\frac{C}{D} = 7x - 5$, ubi $C = 7x^3 - 33x^2 + 69x - 35$; atque $D = x^2 - 4x + 7$ est maximus Divisor communis. Ergo Functio fracta $\frac{A}{B}$, ad minimos terminos reducta, est $\frac{x^3 - 5x^2 + 11x - 7}{5x^2 - 16x + 15}$.

Saepe jam ex primo Residuo patet Divisor communis, ut $\frac{9x^3 + 53x^2 - 9x - 18}{x^2 + 11x + 30} = 9x - 46 + \frac{227(x+6)}{x^2 + 11x + 30}$; sed $\frac{x^2 + 11x + 30}{x+6} = x + 5$. Ergo $x + 6$ est Divisor communis, atque Functio est $\frac{9x^2 - x - 3}{x+5}$. Ita etiam $\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{2x + 1}{x - 2}$.

§. 505. *Animadv.*

Saepe utrumque Polynomium facile convertitur in Producta ex Factoribus; qua conversione statim perspicitur Divisor communis, ut:

$$\frac{21x^2 - 28\,y}{18xy - 24y^2} = \frac{7x(3x - 4y)}{6y(3x - 4y)} = \frac{7x}{6y};\quad \frac{\frac{28}{3}x^5y^2 + \frac{21}{4}x^4y^3 + 7x^3y^4}{\frac{32}{3}x^3z^3 + 6x^2z^3y + 8y^2z^3x}$$

$$= \frac{\frac{7}{12}x^3y^2(16x^2 + 9xy + 12y^2)}{\frac{2}{3}xz^3(16x^2 + 9xy + 12y^2)} = \frac{7x^2y^2}{8z^3}.$$

Sae-

Saepe ex Potestatibus Binomii §. 114 et Polynomii §. 128. atque ex Productis §. 127 et §. 128. aliisve locis expositis, patescunt Divisores, atque ita Fractiones ad minimos terminos reducuntur, veluti:

1. $\frac{x^3-y^3}{(x-y)^2}=\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}$; 2, $\frac{a^3b^3+c^3x^3}{a^2b^2-c^2x^2}=\frac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}$ (ponat (§.

3. $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}$; 4. $\frac{x^3+xy^2+x^2y+y^3}{x^4-y^4}=\frac{x+y}{x^2-y^2}$ (§. 127. 1

5. $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-7x-6}=\frac{x+3}{x-3}$ (§. 112. N°. 5. 7.); 6. $\frac{x^m(a-bx)}{x(a^2b-b^3x^2)}=$

7. $\frac{2x^2-(3c+d+2)x+3c+d}{x^3-1}=\frac{2x-3c-d}{x^2+x+1}$ (§. 128. 12.).

8. $\frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}{a^2-b^2-c^2-2bc}=\frac{a+b+c}{a-b-c}$; (§. 125. 1.)

9. $\frac{a^2-3ab+ac+2b(b-c)}{a^2-b^2+c(2b-c)}=\frac{a-2b}{a+b-c}$. (§. 127. 2.)

10. $\frac{(ax+by)^2+(ay-bx)^2}{a^2+b^2}=x^2+y^2$; 11. $\frac{(ax+pby)^2+p(ay-bx)^2}{a^2+pb^2}=$

12. $\frac{(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2}{a^2+b^2+c^2}=x^2+y^2+$

13. $\frac{(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx+cw-dz)^2+(az-bw-cx+dy)^2+(aw+b}{a^2+b^2+c^2+d^2}$

$=x^2+y^2$

§. 506. *Coroll.* 9.

Maximus Divisor communis plurium numerorum a, b, c, d, e ... eodem modo reperitur, ut expositum est §. 503. Primum quaeritur maximus communis Divisor numerorum a et b, qui sit

sit p, tum numerorum p et o qui sit q; deinde numerorum q et d, et ita deinceps. Aut reperiuntur numeri primi, qui sunt Divisores alicujus numeri, qui est minimus omnium, vel cujus Divisores facile reperiuntur, atque notetur, quinam eorum sint etiam reliquorum numerorum Divisores. Productum ex his est Divisor, qui quaeritur.

Similiter reperitur maximus Divisor communis plurium Polynomiorum universalium, veluti Functionum $\phi(x)$; $\phi'(x)$; $\phi''(x)$; $\phi'''(x)$. Primum quaeritur Divisor communis maximus Functionum $\phi(x)$ et $\phi'(x)$ qui sit $F(x)$, tum Functionum $F(x)$ et $\phi''(x)$ qui sit $F'(x)$ et ita deinceps. Aut Functionis simplicissimae quaerantur Divisores, atque definiatur, quinam ex his sint Divisores reliquarum Functionum.

§. 507. *Theorema.*

Si m *est modulus, quilibet numerus* A *congruus est cum duobus numeris, iisque solis, quorum alter ex hac Serie sumtus est: a, $a+1$, $a+2$ ... $a+m-1$ alter ex hac Serie: a, $a-1$, $a-2$ ... $a-(m-1)$; ubi pro a quilibet numerus determinatus sumi potest.*

Velut si $A=98$, $a=4$ atque $m=20$; Series sunt 4, 5, 6 ... 23, atque 4 . 3 . 2 ... $-$ 15; $98 \equiv 18 \equiv -2$ (mod. 20). Si $A=43$, $a=8$, $m=10$, erit $43 \equiv 13 \equiv 3$. Si $a=40$, $A=12$, $m=10$, erit $12 \equiv 32 \equiv 42$.

Demonstratio.

1. Sit $A>a$. Ponamus $\frac{A-a}{m}=k+\frac{r}{m}=k+1-\left(\frac{m-r}{m}\right)$ ubi

ubi $r<m$; ergo $\frac{A-(a+r)}{m}=k$, et $\frac{A-(a-m+r)}{m}$ $=k+1$ sunt numeri integri; id est $A\equiv a+r$ et $A\equiv a+r-m$. Quoniam $r<m$, prior numerus ex priore, posterior numerus ex posteriore Serie desumtus est. Patet autem ex singulis his Seriebus unum solum numerum cum A posse esse congruum. Ponamus enim etiam esse $A\equiv a+s$ ubi $s<m$. Tum foret $\frac{A-(a+s)}{m}=\frac{A-a}{m}-\frac{s}{m}=k+\left(\frac{r-s}{m}\right)$ numerus integer, itaque etiam $\frac{r-s}{m}$ integer; quod fieri nequit, quia s et r minores sunt quam m (§. 498. 9.). Ergo non est $A\equiv a+s$, atque igitur etiam non est $A\equiv a+s-m$.

II. Sit $A<a$. Ponamus $\frac{a-A}{m}=k+\frac{r}{m}=k+1-\left(\frac{m-r}{m}\right)$ $=-\left(\frac{A-a}{m}\right)$; quae sunt formulae praecedentes, si A et a negativi habentur. Ergo $-A\equiv-a+r$ et $-A\equiv-a-(m-r)$, vel $A\equiv a-r$ et $A\equiv a+m-r$. Prior numerus est ex secunda, posterior ex prima Serie, atque eadem ratione, qua antea, colligitur, ex singulis his Seriebus unum solum numerum cum A posse esse congruum.

§. 508. *Coroll.* 1. *Residua minima. Definitio.*

Residua dicuntur minima, quae minora sunt quam modulus m, *eaque cujuslibet numeri sunt duo;*

duo; Residuum positivum r atque *negativum* $-(m-r)$. Haec igitur sunt ex duabus his Seriebus (§. 507.) ubi $a=0$; $0, 1, 2, 3 \ldots m-1$ atque $0, -1, -2, \ldots -(m-1)$.

§. 509. *Coroll. 2. Residuum absolute minimum.*

Si haec Residua inter se aequalia sunt, non habita ratione signorum, id est si $r=m-r$, erit $r=\frac{1}{2}m$. Si inaequalia sunt, alterum majus, alterum minus est quam $\frac{1}{2}m$. *Quare Residuum absolute minimum dici potest id Residuum, quod minus est, quam dimidius modulus.*

§. 510. *Coroll. 3.*

Sit $\frac{A}{m}=k+\frac{r}{m}$ et $\frac{B}{m}=k'+\frac{r'}{m}$, ubi r et r' sunt minima Residua. Quare $\frac{A-B}{m}=k-k'+\frac{r-r'}{m}$. Sed quoniam $r-r'<m$, A et B non sunt congrui, nisi $r=r'$. Ergo si $A \equiv B$, erit $r=r'$, et si $r=r'$, erit $A \equiv B$, id est: *numeri, inter se congrui, minima eadem habent Residua, et rursus, si minima eadem habent Residua, congrui sunt.*

§. 511. *Theorema.*

Si $A \equiv a$, $B \equiv b$, $C \equiv c$, $D \equiv d$, etc. erit:
1. $A-B \equiv a-b$; $B-C \equiv b-c$, etc.
2. $A+B+C+D \ldots \equiv a+b+c+d \ldots$;
3. $ABCD \ldots \equiv abcd$; 4. $A^n \equiv a^n$; $B^n \equiv b^n$ etc.

ubi

ubi $a, b, c \ldots A, B, C \ldots$ et m sunt numeri integri et positivi.

Demonstratio.

Quoniam numeri sunt congrui, erit $\frac{A-a}{m}=k$; $\frac{B-b}{m}=k'$; $\frac{C-c}{m}=k''$, etc. Quare:

1. $\frac{A-B-(a-b)}{m}=k-k'$, id est $A-B \equiv a-b$.

2. $\frac{A+B+C+D\ldots-(a+b+c+d\ldots)}{m}$ $=+k'+k''+k'''\ldots$; id est $A+B+C+D\ldots \equiv a+b+c+d\ldots$

3. $A=mk+a$; $B=mk'+b$; $C=mk''+c$; $D=mk'''+d$, etc. Ergo Productum $ABCD\ldots$ (ut §. 108.) hac forma repraesentari potest $ABCD\ldots =Pm^p+Qm^{p-1}\ldots+Um+W$; ubi $P=k\,k'\,k''\,k'''\ldots$ atque $W=abcd\ldots$ Numeri $Q, R \ldots U$ sunt integri, atque p indicat, quot sint Factores Producti.

Ergo $\frac{ABCD}{m}\ldots=Pm^{p-1}+Qm^{p-2}+Rm^{p-3}+\ldots +U+\frac{W}{m}$; atque $\frac{ABCD\ldots-W}{m}$ est numerus integer, id est $ABCD\ldots \equiv abcd\ldots$

4. Sit $A=B=C=D=\ldots$ atque $a=b=c=d\ldots$ ergo $ABCD\ldots=A^n$ et $abcd\ldots=a^n$, ubi n indicat, quot sint numeri. Ergo $A^n \equiv a^n$; $B^n \equiv b^n$ etc.

§. 512. *Coroll.* I.

Si $A \equiv a$ et $B \equiv b$, erit $A^n-B^n \equiv a^n-b^n$;

A^n

$A^n + B^n \equiv a^n + b^n$; aut etiam $A^n \pm B^q \equiv a^n \pm b^q$. Si A^n non est $\equiv a^n$, non est $A \equiv a$. Velut si 7 est modulus, erit $5 \equiv -2$, atque $10 \equiv 3$, quare $25 \pm 100 \equiv 4 \pm 9$; $25 \pm 1000 \equiv 4 \pm 27$.

§. 513. *Coroll.* 2.

Si $\phi(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma \ldots$ ubi $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sunt Exponentes integri et positivi, atque ipsi x dantur quilibet valores definiti $a, b, c, d \ldots$ eodem modo quo §. 370, ita ut sit:

$P = Aa^\alpha + Ba^\beta + Ca^\gamma \ldots$; $P' = Ab^\alpha + Bb^\beta + Cb^\gamma + \ldots$

erit $P \equiv P'$, si $a \equiv b$. Nam si $a \equiv b$, erit $Aa^\alpha \equiv Ab^\alpha$; $Ba^\beta \equiv Bb^\beta$, etc. (§. 511. 4.), ergo $\frac{P - P'}{m}$

$$= \frac{Aa^\alpha - Ab^\alpha}{m} + \frac{Ba^\beta - Bb^\beta}{m} + \frac{Ca^\gamma - Cb^\gamma}{m} + \ldots$$

Secundum membrum Aequationis est integer numerus, ergo etiam primum membrum.

Ex hoc etiam sequitur, P et P' esse congruos numeros, atque igitur eadem habere Residua minima, si

quotiescunque a est	1	; 2 . .	; p	; -1	; $-p$
b est	$1 \pm km$	; $2 \pm km$	; $p \pm km$	; $-1 \pm km$	; $-p \pm km$.

§. 514. *Coroll.* 3.

Significent, in formula §. 513, $\phi(1)$; $\phi(2)$; $\phi(3)$; $\phi(p) \ldots$ valores ipsius $\phi(x)$, si x fit $1, 2, 3 \ldots p$. Patet $\phi(p)$ et $\phi'(p+m)$, esse congruas, atque eadem habere Residua minima (§. 513.). Ita si $m = 7$, $\phi(-6)$ et $\phi(1)$; $\phi(-5)$ et $\phi(2)$; $\phi(-4)$ et $\phi(3)$ etc. sunt congruae. Quare si in $\phi(x)$ pro x deinceps ponitur, p, $p+1$, $p+2$ . . . $p+n$ . . .

aut $-p, -p+1, -p+2 \ldots -p+n \ldots$, oriuntur Periodi m terminorum, in quibus tamen possunt esse, quae ex duabus aequalibus Periodis compositae sint.

Sit v. c. $\phi(x)=(x+1)^2$ atque $m=7$.

Sit x	$=0$;	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7..
Ergo $\phi(x)$	$=1$;	4;	9;	16;	25;	36;	49;	64..
r	$=1$;	4;	2;	2;	4;	1;	0;	1..
Sit x	$=0$;	-1;	-2;	-3;	-4;	-5;	-6;	-7..
Ergo $\phi(x)$	$=1$;	0;	1;	4;	9;	16;	25;	36..
r	$=1$;	0;	1;	4;	2;	2;	4;	1..

Hac ratione cernitur, Periodos Residuorum esse:

(1,0);(1,1,0);(1,0);(1,4,4,1,0);(1,4,3,4,1,0);(1,4,2,2,4,1,0);(1,
si m est
2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ;

ubi, si m est 4 et 8, Periodi ex duabus aequalibus Periodis (1,0) et (1,4,1,0) constant.

Similiter si $\phi(x)=x^3-4x^2+3x-12$, Periodi Residuorum sunt:

0;(0,0,1);(0,0,2,0);(3,3,1,3,0);(0,0,4);(2,2,0,2,0,0,1);(4,4,2,4,0,
si m est
2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8

Si m est 6 et 10, Periodi ex duabus aequalibus Periodis (0,0,4) et (8,8,6,8,0) constant.

§. 515. *Theorema.*

Productum ab ex duobus numeris integris non divisibile est per numerum primum p, qui utroque numero a et b major est.

Demonstratio.

Sit $\frac{p}{b}=k+\frac{r}{b}$; $\frac{p}{r}=k'+\frac{r'}{r}$; $\frac{p}{r'}=k''+\frac{r''}{r'}$ ... etc.

un-

unde $a = \frac{abk+ar}{p} = \frac{ark'+ar'}{p} = \frac{ark''+ar''}{p} =$ etc.
Quare si $ab \equiv 0$ (mod. p) erit
$ar \equiv 0 \equiv ar' \equiv ar'' \equiv ar''' \equiv ar^{IV} \dots \equiv ar^{N}$.

Sed cum p sit numerus primus, atque $r < b$; $r' < r$; $r'' < r'$ ... atque igitur Residua minima magis magisque diminuantur, pervenimus tandem ad Residuum r^{N} quod sit 1.

Ex quo sequitur, si $ab \equiv 0$ (mod. p) esse $\frac{ar^{N}}{p} = \frac{a}{p}$ numerum integrum, quod esse nequit, quoniam $p > a$; ergo $\frac{ab}{p}$ non est numerus integer.

Sit v. c. $a = 6$, $b = 8$, $m = 11$, unde $\frac{11}{8} = 1 + \frac{3}{8}$; $\frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$; $\frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$. Ergo si $\frac{6 \cdot 8}{11}$ est integer, erunt etiam $\frac{6 \cdot 3}{11}$; $\frac{6 \cdot 2}{11}$; $\frac{6 \cdot 1}{11}$ integri, quod esse nequit.

§. 516. *Theorema.*

Si neque a neque b per numerum primum p dividi potest, eorum etiam Productum ab per hunc numerum dividi nequit. (1)

Demonstratio.

1. Sint a et b minores quam p. Veritas enunciationis demonstrata est §. 515.

2. Sit $a > p$, sed $b < p$. Ergo sit $\frac{a}{p} = k + \frac{r}{p}$,

un-

(1) Eucl. VII. Prop. 26.

unde $\frac{ab}{p} = bk + \frac{br}{p}$, sed $\frac{br}{p}$ non est integer (§. 515), quoniam r et b sunt minores quam p. Ergo $\frac{ab}{p}$ non est integer.

3. Sint a et b majores quam p. Ut antea, erit $\frac{ab}{p} = bk + \frac{rb}{p}$. Sed quoniam $r < p$ et $b > p$, ex N°. 2. sequitur $\frac{rb}{p}$ non esse numerum integrum, ergo $\frac{ab}{p}$ non est integer.

§. 517. *Coroll.* 1.

Ex hoc theoremate sequitur continuo.

1. *Si Productum ab divisibile est per numerum primum p, vel a vel b vel uterque numerus per p est divisibilis.* (1)

2. *Si quis numerus primus (p) neque est Factor, neque est Divisor alicujus Factoris numeri cujuslibet abcde ..., non est Divisor hujus numeri.* Nam, si id non est, $\frac{ab}{p}$ non est integer, ergo etiam $\frac{(ab)c}{p}$ non est integer, ergo etiam $\frac{(abc)d}{p}$ non est integer, et ita deinceps.

3. *Ergo si quis numerus primus est Divisor alicujus numeri, Divisor est alicujus ejus Factoris.*

4. *Si quis numerus non est Divisor alicu-jus*

(1) Eucl. VII. 32.

jus numeri, non est Divisor alicujus ejus Factoris.

5. *Si quis numerus primus non est Divisor alicujus numeri, non est Divisor ullius Potestatis ejus. Sed si est Divisor Potestatis, erit etiam Divisor numeri ipsius. Si non est Divisor Potestatis, non erit Divisor numeri ipsius.*

6. *Quare si p est numerus primus, p^n non alium habet Divisorem primum, quam p.* Unde patet, si $\frac{p^n}{b}$ est integer, etiam $\frac{p}{b}$ esse integrum.

§. 518. *Coroll.* 2.

Ostendimus §. 176., quemlibet numerum integrum N, per numeros primos $a, b, c, d, e \ldots$ inter se diversos, ita posse designari: $N = a^m b^n c^p d^q \ldots$, ubi Exponentes m, n, p, q sunt numeri positivi integri, qui possunt etiam esse o. Jam addere possumus, *cujuslibet numeri esse unam solam ejusmodi designationem per numeros primos;* velut nullus ex numeris ab unitate usque ad 1000 alio modo per numeros primos designari potest, quam quo factum est p. 200—206, ut $936 = 2^3 . 3^2 . 13$. (nam ordo numerorum non affert mutationem). Ratio hujus rei per se patet. Nam si est alia designatio ejusdem numeri, haec a priori differre potest.

1. Vel quod ei insit aliquis numerus primus p, qui non inest priori designationi, vel quod ipsi desit aliquis numerus primus, qui insit priori. Neutrum esse potest, quoniam tum idem nume-

rus

rus N per p dividi possit, atque non possit (§. 516.), quod sibi repugnat.

2. Vel quod Potestas alicujus numeri primi, ut a, sit in alterutra designatione a^m, sed a^{m+s} in altera. Dividatur N per a^m. Tum autem fit ut in priore non reperiatur numerus a^s, qui est in posteriore. Ergo idem numerus $\frac{N}{a^m}$, qui est integer, per a^s divisibilis foret atque non divisibilis, quod sibi repugnat. Ergo una sola est designatio ejusdem numeri per numeros primos.

§. 519. *Coroll.* 3.

Ex Coroll. 2. sequitur:

1. *D est Divisor numeri N, si neque alios numeros primos, neque eosdem numeros primos pluribus continet vicibus, quam N continet.*

2. *Si aliquis ex Divisoribus numeri D, qui sunt numeri primi, non inest numero N, aut non toties, quoties est in D, N non est divisibilis per D.*

3. Rursus, *si N non est divisibilis per D, colligimus, aliquem saltem Factorem ipsius D, qui est numerus primus, aut non inesse in N, aut non toties, quoties est in D.*

4. *Numeri A et B sunt inter se primi, vel Fractio* $\frac{A}{B}$ *ad minimos terminos est reducta* (§. 108.), *si nullus numerus primus in utriusque simul designatione reperitur.* Tum autem aut uterque ut $\frac{a}{a}$ aut A

so-

solus, ut $\frac{\alpha}{a^m b^n c^p \ldots}$ aut B solus, ut $\frac{a^m b^n c^p \ldots}{\alpha}$ aut neuter, ut $\frac{a^m b^n c^p \ldots}{\alpha^{m'} \beta^{n'} \gamma^{p'} \ldots}$, est numerus primus, ubi nulli ex numeris $a, b, c \ldots \alpha, \beta, \gamma \ldots$ sunt inter se aequales.

5. *Si A et B sunt inter se primi, atque $\frac{AC}{B}$ est integer, etiam $\frac{C}{B}$ est integer.* Universe si productum $ABC \ldots M$ est primum ad P sed $\frac{ABC \ldots M . N}{P}$ est integer, P est Divisor ipsius N.

6. Si $N \equiv o$ (mod. p), atque $N \equiv o$ (mod. q), erit $N \equiv o$ (mod. pq), si p et q sunt inter se primi, id est: *Si p et q sunt Divisores numeri N neque communem habent Divisorem, Productum pq etiam est hujus numeri Divisor.*

Nam si p et q sunt numeri primi, in designatione numeri N per numeros primos reperiuntur. Si non sunt numeri primi, omnes numeri primi qui sunt Factores eorum in ista designatione reperiuntur, atque hi omnes sunt inter se diversi, quoniam p et q non habent communem Divisorem. Quare necesse est numerum N divisibilem esse per Productum pq, veluti $\frac{6804}{14} = 486$, atque $\frac{6804}{27} = 252$, ergo $\frac{6804}{14 . 27} = \frac{2^2 . 3^5 . 7}{2 . 3^3 . 7} = 2 . 3^2 = 18$.

7. Cum idem valeat de quotlibet numeris inter se

se primis, colligimus: *Si* p, q, r, s ... *non habent Factorem communem, atque singuli sunt Divisores numeri* N, *etiam ipsorum Productum* $pqrs$ ... *est hujus numeri Divisor.*

8. Cum autem quodcumque valet de numero N, etiam valeat de $a - b$ sive de duorum numerorum Differentia, sequitur.

α. *Si* $a \equiv b$ (*mod.* p); $a \equiv b$ (*mod.* q); $a \equiv b$ (*mod.* r) etc. *erit* $a \equiv b$ (*mod.* pqr ...) *si* p, q, r ... *sunt inter se primi.* Nam $a - b$ divisibilis est per p, q, r ... ergo etiam per pqr ...

β. *Si* a *et* b *sunt divisibiles per* p, *atque* $a \equiv b$ (*mod.* q), *atque* p *et* q *sunt inter se primi, erit* $\frac{a}{p} \equiv \frac{b}{p}$ (*mod.* q).

γ. *Si* $a \equiv b$ (*mod.* p), *atque* a, b *et* p *sunt divisibiles per* q, *erit* $\frac{a}{q} \equiv \frac{b}{q}$ $\left(mod.\ \frac{p}{q}\right)$.

Veluti $48 \equiv 36$ (mod. 6), ergo $\frac{48}{2} \equiv \frac{36}{2}$ (mod. 3), id est $24 \equiv 18$ (mod. 3).

9. *Si* p *et* p' *sunt Divisores numeri* N, *atque maximus eorum Divisor communis est* e, *ita ut sit* $p = em$, $p' = em'$, *erit* $\frac{N}{emm'}$, *sive* $\frac{N}{pm'}$ *integer.*

Quoniam enim N divisibilis est per em et em', erit $\frac{N}{e}$ divisibilis per m et m', qui sunt inter se primi. Ergo $\frac{N}{emm'}$ est integer. Conf. §. 183.

10. Ponendo $a - b$ in locum numeri N colligi-

gimus (9): *si* $a \equiv b$ *(mod. p), atque* $a \equiv b$ *(mod. p')*, *erit* $a \equiv b$ $\left(mod.\ \frac{pp'}{e}\right)$.

11. *Si a et b sunt divisibiles per p, atque* $a \equiv b$ *(mod. p'), erit* $\frac{a}{p} \equiv \frac{b}{p}$ $\left(mod.\ \frac{p'}{e}\right)$ (10). Nam $a \equiv b$ (mod. p), quoniam p est Divisor numerorum a et b.

12. *Si numerus N non est divisibilis per m, atque n et m non habent Divisorem communem, nN non est divisibilis per m.*

13. Ergo ponendo $a - b$ pro N colligimus: *si non est* $a \equiv b$ *(mod. m), atque n et m non habent Divisorem communem, non erit* $na \equiv nb$ *(mod. m).*

14. *Si p, q, r, s ... non sunt inter se primi, sed singuli sunt Divisores numeri N, Productum minimum m, cujus omnes hi numeri sunt Divisores* (§. 183.), *est Divisor numeri N;* ut 6006 divisibilis est per 6, 33 et 26, ubi m est 2 . 3 . 11 . 13, ergo $\frac{6006}{2 . 3 . 11 . 13} = 7$ est Quotus integer.

15. Quare *si* $a \equiv b$ *(mod. p)*; $a \equiv b$ *(mod. q)*: $a \equiv b$ *(mod. r)* etc., *erit* $a \equiv b$ *(mod. m), ubi m est id Productum minimum.*

16. *Si singuli numeri A, B, C ... nullum habent communem Factorem cum a, etiam ipsorum Productum nullum cum eo habet Factorem commu-*

 nem

nem (4). Quare si Fractiones $\frac{A}{a}$, $\frac{B}{a}$, $\frac{C}{a}$ ... ad minimos terminos sunt reductae (§. 180.), etiam Fractio $\frac{ABC\ldots}{a}$ ad eos est reducta.

17. *Si Fractio* $\frac{a}{b}$ *ad minimos terminos est reducta, etiam* $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ *ad eos reducta est* (16). Potestas positiva integra Fractionis verae est Fractio vera, spuriae autem est Fractio spuria. Si $\frac{a}{b} < 1$, erit $\left(\frac{a}{b}\right)^m < \frac{a}{b}$, sed si $\frac{a}{b} > 1$, erit $\left(\frac{a}{b}\right)^m > \frac{a}{b}$ (§. 170. *e. f.*) (1).

18. *Si Potestas completa* $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ *est integra, etiam* $\frac{a}{b}$ *est integer, sed si* $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ *non est numerus integer, etiam* $\frac{a}{b}$ *non est integer. Quare radix numeri non integri, non potest esse integra.* Rursus si $\frac{a}{b}$ est integer, etiam $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ est integer, sed si $\frac{a}{b}$ non est integer, etiam $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ non est integer (2).

19. *Si* $a^{\frac{1}{m}}$ *sive Radix numeri integri a non est in-*

(1) Euclid. VII. Prop. 29.
(2) Euclid. VIII. Prop. 14—17.

integra, etiam non est Fractio. Sit enim $a^{\frac{1}{m}} = \frac{p}{q}$, sive Fractio. Ergo $\left(\frac{p}{q}\right)^m = a$ foret Fractio (17), quod contra hypothesin est.

20. *Si* $N = a^m b^n c^p \ldots$ *ubi* $a, b, c \ldots$ *sunt numeri primi, atque etiam* $N = l^k$, *omnes Exponentes divisibiles sunt per* k. Nam $l = a^{\frac{m}{k}} b^{\frac{n}{k}} c^{\frac{p}{k}} \ldots$ est integer, quod esse nequit, nisi omnes Exponentes per k sunt divisibiles.

§. 520. *Theorema.*

Si termini alicujus Seriei adscendentis usque ad $m-1$, *ut* $1, p, p', p'' \ldots m-1$, *quae continet omnes numeros, eosque solos, qui sunt primi ad modulum* m, *multiplicantur per numerum* a, *qui etiam ad* m *primus est, termini hujus Seriei Productorum,* $a, ap, ap' \ldots a(m-1)$ *habent Residua, quae omnia sunt prima ad* m, *eaque inter se inaequalia. Nulli hujus Seriei termini sunt inter se congruentes ad modulum* m.

Demonstratio.

Sumatur, ex hac Serie Productorum, terminus ap, atque sit $ap = km + r$. Si m et r haberent aliquem Factorem communem e, integer foret $\frac{km+r}{e}$, ergo etiam $\frac{ap}{e}$, quod esse nequit. Nam a et p sunt primi ad m, ergo etiam ipsorum Productum

ap

ap (§. 519. 4.); quod igitur cum *m* non communem habet Factorem *e*. Quare Residuum *r* est primum ad *m*.

Haec autem Residua sunt omnia inter se inaequalia. Sit enim $ap = km + r$, $ap' = k'm + r'$. Ergo si $r = r'$, foret $\frac{a(p-p')}{m} = k - k'$ integer numerus, quod esse nequit. Nam *a* est primus ad *m*, atque $\frac{p-p'}{m}$ non est integer, quoniam et *p* et *p'* sunt minores, quam *m* (§. 498. 9.). Ergo *r* non potest esse $= r'$. Ergo *ap* et *ap'* non sunt congruentes (§. 510.).

Exemplum.

Sit $a = 7$, $m = 24$.

Ergo Series est	1 .	5 .	7 .	11 .	13 .	17 .	19 .	23.
Series Productorum	7 .	35 .	49 .	77 .	91 .	119 .	133 .	161.
Residua	7 .	11 .	1 .	5 .	19 .	23 .	13 .	17.

ubi omnia Residua sunt inter se inaequalia, atque prima ad *m*.

§. 521. *Coroll.* 1.

Quoniam omnia Residua Productorum sunt inter se inaequalia, atque prima ad *m*, eademque dicenda sunt de terminis Seriei fundamentalis 1, *p*, *p'* ... *m*—1, atque utraque Series eundem habet terminorum numerum, sequitur, *Residua ipsa esse terminos hujus Seriei fundamentalis, si ordinis non habetur ratio*; veluti Residua (§. 520.) 7 . 11 . 1 . 5 . 19 . 23 . 13 . 17, sunt termini Seriei 1 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23, sed mutato ordine.

§. 522.

§. 522. *Coroll.* 2.

Ergo *bini termini*, alter ex Serie fundamentali $1, p \ldots m-1$, alter ex Serie Productorum $a, ap \ldots a(m-1)$ sumtus, *congruentes sunt* secundum modulum m (§. 510.); veluti $77 \equiv 5$ (mod. 24.).

§. 523. *Coroll.* 3.

Ex his atque ex §. 511. 3. concludimus: *Productum ex terminis Seriei fundamentalis est congruens cum Producto ex terminis Seriei Productorum*, id est:

$a.ap.ap'ap''ap''' \ldots a.(m-1) \equiv 1.p\,p'p''p''' \ldots (m-1)$

Ergo si q indicat, quot sint termini Seriei fundamentalis, erit:

$a^q(1.p\,p'p''p''' \ldots (m-1)) \equiv 1.p\,p'p''p''' \ldots (m-1)$
vel $a^q \equiv 1$ (mod. m).

Ergo si q indicat, quot numeri, minores quam m, sint primi ad m, atque a et m inter se primi sunt, erit $\frac{a^q-1}{m}$ integer: veluti §. 520. $\frac{7^8-1}{24}$ $= \frac{5764800}{24} = 240200$. Exempla suppeditant tabulae p. 81–84.

$=5, m=24$ ergo Series est 1.5. 7.11.13.17.19.23 atque $\frac{5^8-1}{24} = 16276$.

$=7, m=30$ . . . . . 1.7.11.13.17.19.23.29 atque $\frac{7^8-1}{30} = 192160$.

$=11, m=30$ . . . . $\frac{11^8-1}{30} = 7145296$.

§. 524.

§. 524. *Coroll.* 4.

Si ea, quae exposita sunt §. 520—523. adhibentur ad Seriem numerorum naturalium 1 . 2 . 3 . 4 . . . $(m-1)$, *ubi m est numerus primus*, patet:

1. Si a est minor vel primus ad m, nulli termini Seriei Productorum $a, 2a, 3a, 4a \ldots (m-1)a$, sunt inter se congruentes. Omnes igitur habent Residua inaequalia.

2. Series horum Residuorum est ipsa Series numerorum naturalium 1 . 2 . 3 . . . $(m-1)$, si ordinis non habetur ratio.

3. Bini termini, non vero plures, quorum alter ex Serie fundamentali, alter ex Serie Productorum sumtus est, sunt congruentes.

4. $\frac{a^{m-1}-1}{m}$ est integer, vel $a^{m-1} \equiv 1$ (mod. m), si m est numerus primus, atque a est minor quam m, vel primus ad m;

Sit $a = 2$

atque $m = 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23.$

ergo $\frac{a^{m-1}-1}{m}$ est $= 0; 1; 3; 9; 93; 315; 3855; 13797; 18236$

Sit $m = 5$

atque $a = 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 11$

ergo $\frac{a^{m-1}-1}{m} = 3; 16; 51; 259; 480; 819; 1312; 29$

§. 525. *Animadv.*

Ex §. 128. 16. et §. 207. patet, etiam esse integrum $\frac{a^m-1}{a-1}$ vel

vel $\frac{a^{m-1}-1}{a-1}$, si m et a sunt integri, atque m positivus. Est enim $\frac{a^m-1}{a-1}$ Summa Progressionis Geometricae, cujus primus terminus est unitas, a est Exponens, atque m indicat, quot sint termini. Quare si m et a sunt integri, omnes termini sunt integri, atque igitur etiam ipsorum Summa. Ergo $a^{m-1}-1$ divisibilis est per m, atque per $a-1$; per $a-1$ semper, sed per m; si m est numerus primus, atque a est primus ad m.

Ex hoc etiam sequitur, integros esse $\frac{a^{2m+1}+1}{a+1}$ et $\frac{a^{2m}-1}{a+1}$. Nam si a est negativus, $\frac{a^m-1}{a-1}$ fit $\frac{(-a)^m-1}{-(a+1)}$, quae Fractio est $\frac{1+a^m}{1+a}$, si m est numerus impar, sed $-\left(\frac{a^m-1}{a+1}\right)$ si m est numerus par.

§. 526. *Problema.*

Proposita sit Series numerorum naturalium $1 . 2 . 3 . 4 \ldots m$, ubi m non est numerus primus, sed est formae $a^m b^n c^p d^q \ldots$ (§. 176.) definire,

1. Quot termini hujus Seriei sint divisibiles per numeros primos a, b, c ... atque per ipsorum Producta, ut ab, abc caet.

2. Quot termini per solos hosce numeros primos sint divisibiles, non per alios Divisores numeri m.

3. Quot termini per hosce numeros non sint divisibiles.

4. Quot termini per nullos horum numerorum divisibiles sint, sive quot termini sint primi ad m.

Solutio.

Significent $t(a)$, $t(b)$, $t(c)$, $t(ab)$, $t(abc)$ ... quot termini Seriei 1, 2, 3, 4, ... m per a, b, c, ab, abc ... divisibiles sint, atque $T(a)$, $T(b)$, $T(c)$, $T(ab)$ ... quot termini per hosce solos numeros sint divisibiles. Verum $t(\text{non } a)$, $t(\text{non } b)$, $t(\text{non } a \text{ non } b)$ ... designet, quot termini dividi nequeant per a, per b, atque neque per a, neque per b, caet. His ita constitutis a simpliciore ad magis compositum sic progrediamur.

I. Sit $m = am'$.

$t(a) = \frac{m}{a}$; $t(\text{non } a) = m - \frac{m}{a} = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)$, veluti, si $m = 9$, Series est 1 . 2 . 3 . . . 9; $a = 3$, $m' = 3$, unde $t(a) = 3$, qui numeri sunt 3, 6, 9. $t(\text{non } a) = 9(1 - \frac{1}{3}) = 6$, qui numeri sunt 1, 2, 4, 5, 7, 8. Si $m = 8$, erit $a = 2$; $m' = 4$; $t(a) = 4$; $t(\text{non } a) = 4$.

II. Sit $m = abm'$.

$t(a) = \frac{m}{a}$; $t(b) = \frac{m}{b}$; $t(ab) = \frac{m}{ab}$, ergo $T(a)$

$= t(a) - t(ab) = \frac{m}{a} - \frac{m}{ab} = \frac{m}{ab}\ (b - 1)$;

$T(b) = t(b) - t(ab) = \frac{m}{b} - \frac{m}{ab} = \frac{m}{ab}\ (a - 1)$,

ergo $t(\text{non } a, \text{ non } b) = m - (T(a) + T(b) + t(ab))$

$= \frac{m}{ab}\ (ab - b - a + 1) = \frac{m}{ab}\ (a - 1)\ (b - 1)$

$= m \cdot \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)$.

Sit

Sit $m=10$, ergo $a=2$, $b=5$, $m'=1$.
Unde $t(a)=5$, qui numeri sunt 2, 4, 6, 8, 10; $t(b)=2$, qui sunt 5 . 10; $t(ab)=1$, qui est 10; $T(a)=4$, qui sunt 2, 4, 6, 8; $T(b)=1$, qui est 5; t(non a, non b) $=4$, qui sunt 1 . 3 . 7 . 9.

III. Sit $m=abcm'$.

$t(abc)=\frac{m}{abc}=T(abc)$; $T(ab)=t(ab)-t(abc)$; $=\frac{m}{ab}-\frac{m}{abc}=\frac{m}{abc}(c-1)$. Similiter inter se mutandis b et c, atque a et c, fit $T(ac)=\frac{m}{abc}(b-1)$, atque $T(bc)=\frac{m}{abc}(a-1)$; $T(c)=t(c)$ $-T(abc)-T(ac)-T(bc)=\frac{m}{c}-\frac{m}{abc}(1+b-1+a-1)$ $=\frac{m}{abc}(ab-b-a+1)=\frac{m}{abc}.(a-1)(b-1)$.

Similiter inter se commutandis b et c, atque a et c, fit $T(b)=\frac{m}{abc}.(a-1)(c-1)$; $T(a)=\frac{m}{abc}(b-1)(c-1)$.

Ergo t(non a, non b, non c) $=m-[T(abc)$ $+T(a)+T(ab)+T(b)+T(bc)+T(c)+T(ac)]$ $=\frac{m}{abc}(abc-1-b.(c-1)-c.(a-1)-a.(b-1))$ $=\frac{m}{abc}.(a-1)(bc+1-b-c)=\frac{m}{abc}.(a-1)(b-1)(c-1)$ $=m.\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$.

Sit $m = 30$, $a = 2$, $b = 3$, $m' = 1$, ergo $c = 5$, und

$t(a) = 15$, qui sunt	2. 4. 6... 30	$T(bc) = 1$, qui est	15.
$t(b) = 10$ . . .	3. 6. 9... 30	$T(ab) = 4$, qui sunt	6.12.1
$t(c) = 6$ . . .	5.10.15... 30	$T(ac) = 2$ . . .	10.20.
$t(ab) = 5$ . . .	6.12.18.24.30	$T(a) = 8$ . . .	2.4.8.1
$t(ac) = 3$ . . .	10.20.30	$T(b) = 4$ . . .	3.9.21
$t(bc) = 2$ . . .	15.30	$T(c) = 2$ . . .	5.25.
$t(abc) = 1$, qui est	30	$t(\text{non } a, \text{non } b, \text{non } c) = 8$	1.7.11.13.17.

In Cribro Arithmetico, edito ab L. Chernac, (*Daventriae* 1811), reperiuntur omnes numeri primi, una cum istis numeris, qui sunt facti ex numeris primis, praeter eos, qui per 2, 3, 5, sunt divisibiles. Incipit hoc Cribrum ab unitate atque progreditur usque ad 1020000. Si quaeritur, quot in isto reperiantur numeri primi et compositi, facilis est responsio. Nam $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $m = 1020000$, ergo $m' = 34000$. Quare numerus illorum terminorum, qui non sunt divisibiles per 2, 3, 5, est $m(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = m \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8m}{30} = 272000$, cui numero adjiciendi sunt ipsi 2, 3, 5, ex quo fit 272003. Numerus paginarum in isto libro, est 1020; ergo in singulis paginis universe sunt fere 266 numeri conscripti. Numerus autem illorum terminorum, qui, quoniam per 2, 3, 5 dividi possunt, omissi sunt, est $1020000 - 272000 = 748000$. Ex his est:

$T(2) = 34000 \cdot 8 = 272000$	$T(6) = 34000 \cdot 4 = 1360$
$T(3) = 34000 \cdot 4 = 136000$	$T(10) = 34000 \cdot 2 = 680$
$T(5) = 34000 \cdot 2 = 68000$	$T(15) = 34000 \cdot 1 = 340$
	$T(30) = 34000 \cdot 1 = 340$

IV. Sit $m = abcd\,m'$.

Eodem modo progredientes invenimus:

Numerus terminorum, qui sunt primi ad $abcd$, est $m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)$, velut, si $m = 210$, $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$; hic numerus est $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$, atque numeri ipsi sunt 1, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 ... 193, 197, 199, 209, ex quibus sunt 44 numeri primi, atque quatuor numeri facti ex primis, qui sunt $121 = 11 \cdot 11$; $143 = 13 \cdot 11$; $169 = 13 \cdot 13$; $209 = 11 \cdot 19$.

§. 527. *Coroll.* 1.

Universe, si $m = a^l\, b^n\, c^p\, d^q\, e^r \ldots = (abcde\ldots)m'$, erit numerus terminorum Seriei $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m-1$, qui ad m primi sunt, $= m \cdot \left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)\left(\frac{c-1}{c}\right)\left(\frac{d-1}{d}\right)\left(\frac{e-1}{e}\right)\ldots$ ubi $m' = a^{l-1}\, b^{n-1}\, c^{p-1}\, d^{q-1}\, e^{r-1} \ldots$

§. 528. *Coroll.* 2.

Si $m = abcde \ldots$, erit $m' = 1$, atque numerus terminorum, qui ad m primi sunt, est $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)\ldots$

§. 529. *Coroll.* 3.

Numerus $m \cdot \left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)\left(\frac{c-1}{c}\right)\ldots$ $= a^{l-1}(a-1)\, b^{n-1}(b-1)\, c^{p-1}(c-1)\ldots$ est ipse numerus q (§. 523.); quare $a^{m \cdot \left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{b-1}{b}\right)\left(\frac{c-1}{c}\right)\ldots} - 1$ divisibilis est per m.

Le-

Legendre (*essai sur la théorie des nombres*), Tabulam computavit, qua indicatur Productum $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdots\frac{\omega-1}{\omega}$, ubi Denominatores sunt omnes numeri primi. Hac Tabula, quae est Tab. IX, *q* facile reperitur, velut $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{996}{997}=0,161930$, ubi Denominatores indicant omnes numeros primos, qui (praeter 2) sunt in Serie $1 . 2 . 3 . 4 \ldots 1000$.

§. 530. *Theorema.*

Si $S(\alpha)\, n$ designat, quoties Divisor α in Serie naturali numerorum $1, 2, 3, 4, \ldots n$, reperiatur, atque $\frac{n}{\alpha}; \frac{n}{\alpha^2}; \frac{n}{\alpha^3} \ldots \frac{n}{\alpha^m}$ indicant maximos numeros integros, qui ex Divisione numeri n per $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^r$ oriuntur, erit $S(\alpha)n=\frac{n}{\alpha}+\frac{n}{\alpha^2}+\frac{n}{\alpha^3}+\frac{n}{\alpha^4}\ldots$

veluti si $n=10$, $\alpha=2$, erit $\frac{n}{\alpha}=5$, $\frac{n}{\alpha^2}=2$, $\frac{n}{\alpha^3}=1$, $\frac{n}{\alpha^4}=0$, unde $S(2)\,10=5+2+1=8$, atque revera $1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10=2^8\,(1.3.5^2.7.9)$.

Demonstratio.

Numeri Seriei $1, 2, 3 \ldots n$, qui per α dividi possunt, sunt $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha \ldots \frac{n}{\alpha}.\alpha$; qui per α^2 dividi possunt, sunt $\alpha^2, 2\alpha^2, 3\alpha^2 \ldots \frac{n}{\alpha^2}.\alpha^2$,

et

et ita deinceps, donec $\frac{n}{a^r}$ nullum dat numerum integrum, sive fit Fractio vera. Ex quo perspicitur enunciationis veritas.

§. 531. *Coroll.* 1.

Hac ratione definiuntur Producta ex omnibus numeris, qui sunt in Serie naturali numerorum, velut:

I. $1.2.3.4 \ldots 10 = 2^8.3^4.5^2.7.$

I. $1.2.3.4 \ldots 100 = (2^{97}.3^{48}.5^{24}.7^{16}.11^9.13^7.17^5.19^5.23^4.29^3.$
$31^3.37^2.41^2.43^2.47^2.53.59.61.67.71.73.79.83.89.97.)$

I. $1.2.3.4 \ldots 10000 = (2^{9995}.3^{4996}.5^{2499}.7^{1665}.11^{998}.13^{832}.$
$17^{624}.19^{554}.23^{452}.29^{355}.31^{332}.37^{277}.41^{248}.43^{237}.$
$47^{216}.53^{191}.59^{171}.61^{165}.67^{151}.71^{141}.73^{137}.79^{127}.$
$83^{121}.89^{113}.97^{104}.101^{99}.103^{97}.107^{93}.109^{91}.113^{88}.$
$127^{78}.131^{76}.137^{73}.139^{71} \ldots 4978^2.4993^2.4999^2.$
$5003.5009 \ldots 9973.)$

§. 532. *Coroll.* 2.

His igitur etiam indicatur, quaenam sit maxima Potestas alicujus numeri, per quam Productum $1.2.3.4 \ldots n$ dividi possit, veluti 2^{97} est maxima Potestas numeri 2, per quam Productum $1.2.3 \ldots 100$ dividi potest.

§. 533. *Theorema.*

Si $N = a^m b^n c^p d^q \ldots$, *ubi* $a, b, c, d \ldots$ *sunt numeri primi, ratio Divisorum hujus N talis est, ut eorum numerus sit* $= (m+1)(n+1)(p+1)(q+1) \ldots$ *atque Summa eorum*

$$= \frac{a^{m+1}-1}{a-1} . \frac{b^{n+1}-1}{b-1} . \frac{c^{p+1}-1}{c-1} . \frac{d^{q+1}-1}{d-1}.$$

Do-

Demonstratio.

Per se patet, omnes hujus numeri N Divisores prodire, si hae Series inter se multiplicantur: $1+a+a^2 \ldots a^m$, $1+b+b^2 \ldots b^n$, $1+c+c^2 \ldots +c^m$, etc. dummodo unitas atque numerus ipse N inter Divisores etiam admittantur.

Cum autem prima Series $1+a+a^2 \ldots + a^m$ contineat $(m+1)$ terminos, secunda $1+b+b^2 \ldots + b^n$ contineat $(n+1)$, tertia $(p+1)$, quarta $(q+1) \ldots$ terminos; sequitur Productum $(m+1)(n+1)(p+1)(q+1) \ldots$ indicare, quot sint Divisores in numero N. Summa autem Divisorum, quam designemus hac nota $S.(N)$, est Productum harum Serierum, id est:

$$S(N) = (1+a+a^2 \ldots + a^m)(1+b+b^2 \ldots + b^n)(1+c+c^2 \ldots + c^m) \ldots = \frac{a^{m+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{n+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{m+1}-1}{c-1} \ldots$$

(§. 207.). Velut si $N = 60 = 2^2 . 3 . 5$, Divisorum numerus est $3 . 2 . 2 = 12$. Summa horum Divisorum est $\frac{2^3-1}{1} . \frac{3^2-1}{2} . \frac{5^2-1}{4} = \frac{7 \;\; 8 \;\; 24}{1 \;\; 2 \;\; 4} = 168$.

§. 534. *Coroll.* 1.

Si $N = abcd \ldots$ vel si N constat ex t numeris simplicibus, Numerus Divisorum est $2.2.2 \ldots = 2^t$ atque Summa Divisorum, sive $S(N)$ est $= (a+1)(b+1)(c+1) \ldots$; velut si $N = 2 . 3 . 5 . 7 = 210$, Numerus Divisorum est $2^4 = 16$, atque ipsorum Summa $= 3 . 4 . 6 . 8 = 576$. Hi numeri sunt *quinque* primi, 1, 2, 3, 5, 7: *sex* facti ex duobus 2.3, 2.5, 2.7, 3.5, 3.7, 5.7: *quatuor* fac

facti ex tribus 2.3.5, 2.3.7, 2.5.7, 3.5.7, atque *unus* ex quatuor 2.3.5.7.

§. 535. *Coroll.* 2.

Rursus, si quaeruntur numeri, qui habent m Divisores, m partiendus est in Factores. Velut cum sit $12 = 2.2.3 = 4.3 = 6.2$, omnes numeri, qui habent 12 Divisores, sunt triplicis formae abc^2, a^3b^2, a^5b. Primae formae est $60 = 2^2.3.5$, secundae est $72 = 2^3 3^2$, tertiae est $96 = 2^5.3$.

§. 536. *Coroll.* 3.

Si quaeritur, quot modis $N = a^m b^n c^p \ldots$, possit esse Productum ex duobus Factoribus, erit numerus modorum $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$, quoniam quilibet Factor A habet alium Factorem, qui prodit ex Divisione $\frac{N}{A} = B$.; velut abc^2 *sex* modis ($\frac{1}{2}.2.2.3$) potest esse Productum ex duobus Factoribus, qui sunt: $1.abc^2$; $a.bc^2$; $b.ac^2$; $c.abc$; $ab.c^2$; $ac.bc$.

§. 537. *Coroll.* 4.

Si autem numerus N est quadratus, ut $36 = 2^2 3^2$, omnes Exponentes sunt ordinis paris, ex quo fit, ut $\frac{1}{2}(m+1)(p+1)(n+1)$ contineat Fractionem $\frac{1}{2}$, quae Fractio $\frac{1}{2}$ indicat modum, quo duo Factores (ut $6.6 = 36$) sunt inter se aequales; velut numeri 36, numerus modorum est $\frac{3.3}{2} = 4\frac{1}{2}$; atque hi modi sunt 1.36; 2.18; 3.12; 4.9; 6.6.

§. 538.

§. 538. *Corall.* 5.

Si autem postulatur, ut duo Factores, in quos dividatur Productum N, sint inter se primi, Summa horum modorum non pendet ex Exponentibus m, n, p, q ...; quoniam v. c. a^m distribui nequit, sed uni soli Factori tribuendum est. Quare a^m, b^n, c^p ... pro simplicibus Factoribus habendi sunt, atque numerus modorum est $\frac{2^t}{2} = 2^{t-1}$ si in Producto N sunt t numeri primi (confer. §. 534.); velut $1800 = 2^3 . 3^2 . 5^2$ in duos Factores 18 modis ($\frac{1}{2}$. 4 . 3 . 3) dividi potest, sed si Factores debent esse inter se primi, solummodo 4 modis (2^{3-1}), qui sunt $1 . a^m b^n c^p$; $a^m . b^n c^p$; $b^n . a^m c^p$; $c^p . a^m b^n$.

§. 539. *Coroll.* 6.

Si $N = a^m$, erit $b = c = d \ldots = 1$, atque $S(N) = S(a^m) = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} = a^m + \frac{a^m - 1}{a - 1}$. Sed $S . (a^{m-1}) = \frac{a^m - 1}{a - 1}$, unde $(a-1) S(a^{m-1}) = a^m - 1$, vel $1 + a S . (a^{m-1}) = a^m + S . (a^{m-1}) = S(a^m)$.

§. 540. *Coroll.* 7.

Quare duplici modo $S . (a^m)$ reperitur ex $S . (a^{m-1})$. Sit $a = 2$, ergo $S(2) = 1 + 2 = 3$; $S(2^2) = 1 + 2 . 3 = 7$, vel $4 + 3$; $S . (2^3) = 1 + 2 . 7 = 15$, vel $8 + 7$, velut:

Si

deinceps est $= 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{[illegible]}$
erit $S(a^m) = 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 204$
deinceps est $= 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9, 3^{[illegible]}$
erit $S(a^m) = 4, 13, 40, 121, 364, 1093, 3280, 9841, 29524, 885$

§. 541. *Coroll.* 8.

$\frac{S(a^m)}{a+1} = \frac{a^{m+1}-1}{(a-1)(a+1)}$ est integer, si m est numerus impar (§. 525.), ergo $S(a^{2m+1})$ habet Divisorem $a+1$; velut $S(3^5) = 4 \cdot 7 \cdot 13$.

Ad ea illustranda, quae sunt exposita §. 530—541., adjecimus Tabulam Divisorum numerorum progredientium usque ad 100.

Tabula Divisorum numerorum.

erus.	Quot sint Divisores.	Summa Divisorum.	Divisores.
	3	7	1.2. 4.
·3	4	12	1.2. 3. 6.
	4	15	1.2. 4. 8.
	3	13	1.3. 9.
·5	4	18	1.2. 5.10.
·3	6	28	1.2. 3. 4. 6.12.
·7	4	24	1.2. 7.14.
·5	4	24	1.3. 5.15.
	5	31	1.2. 4. 8.16.
·3^2	6	39	1.2. 3. 6. 9.18.
·5	6	42	1.2. 4. 5.10.20.
·7	4	32	1.3. 7.21.
·11	4	36	1.2.11.22.
· 3	8	60	1.2. 3. 4. 6. 8. 12.24.
	3	31	1.5.25
·13	[illegible]	[illegible]	1.2.13.26.

Tabula Divisorum numerorum.

Numerus.	Quot sint Divisores.	Summa Divisorum.	Divisores.
$27=3^3$	4	40	1.3. 9.27.
$28=2^2.7$	6	56	1.2. 4. 7.14.28.
$30=2.3.5$	8	72	1.2. 3. 5. 6.10.15.30.
$32=2^5$	6	63	1.2. 4. 8.16.32.
$33=3.11$	4	48	1.3.11.33.
$34=2.17$	4	54	1.2.17.34.
$35=5.7$	4	48	1.5. 7.35.
$36=2^2.3^2$	9	91	1.2. 3. 4. 6. 9.12.18.36
$38=2.19$	4	60	1.2.19.38.
$39=3.13$	4	56	1.3.13.39.
$40=2^3.5$	8	90	1.2. 4. 8. 5.10.20.40.
$42=2.3.7$	8	96	1.2. 3. 6. 7.14.21.42.
$44=2^2.11$	6	84	1.2. 4.11.22 44.
$45=3^2.5$	6	78	1.3. 5. 9.15.45.
$46=2.23$	4	72	1.2.23.46.
$48=2^4.3$	10	124	1.2. 3. 4. 6. 8.12.16.24.
$49=7^2$	3	57	1.7.49.
$50=2.5^2$	6	93	1.2. 5.10.25.50.
$51=3.17$	4	72	1.3.17.51.
$52=2^2.13$	6	98	1.2. 4.13.26.52.
$54=2.3^3$	8	120	1.2. 3. 6. 9.18.27.54.
$55=5.11$	4	72	1.5.11.55.
$56=2^3.7$	8	120	1.2. 4. 7. 8.14.28.56.
$57=3.19$	4	80	1.3.19.57.
$58=2.29$	4	90	1.2.29.58.
$60=2^2.3.5$	12	168	1.2. 3. 4. 5. 6.10.12.15.
$62=2.31$	4	96	1.2.31.62.
$63=3^2.7$	6	104	1.3. 7. 9.21.63.
$64=2^6$	7	127	1.2. 4. 8.16.32.64.

Tabula Divisorum numerorum.

...erus.	Quot sint Divisores.	Summa Divisorum.	Divisores.
.13	4	84	1.5.13.65.
.3 .11	8	144	1.2. 3. 6.11.22.33.66.
.17	6	126	1.2. 4.17.34.68.
.23	4	96	1.3.23 69.
.5 .7	8	144	1.2. 5. 7.10.14.35.70.
.3²	12	195	1.2. 3. 4. 6. 8. 9.12.18.24.36.…
.37	4	114	1.2.37.74.
.5²	6	124	1.3. 5.15.25 75.
.19	6	140	1.2. 4.19.38.76.
.11	4	96	1.7.11.77.
.3 .13	8	168	1.2. 3. 6.13.26.39.78.
.5	10	186	1.2. 4. 5. 8 10.16.20.40.80.
	5	121	1.3. 9.27.81.
.41	4	126	1 2.41.82.
3 .7	12	224	1.2. 3. 4. 6. 7.12.14.21.28.42.…
.17	4	108	1.5.17.85.
.43	4	132	1.2.43.86.
.29	4	120	1.3.29.87.
.11	8	180	1.2. 4. 8.11.22.44.88.
.3².5	12	234	1.2. 3. 5. 6. 9.10.15.18.30.45.…
.13	4	112	1.7.13.91.
.23	6	168	1.2. 4.23.46.92.
.31	4	128	1.3.31.93.
.47	4	144	1.2.47.94.
19	4	120	1.5.19.95.
3	12	252	1.2. 3. 4. 6. 8.12.16.24.32.48.…
7²	6	171	1.2. 7.14.49.98.
11	6	156	1.3. 9.11.33.99.
5²	9	217	1.2. 4. 5.10.20 25.50.100.

§. 5…

§. 542. *Animadv.* 1.

Eulerus (*Opuscula Analyt.* T. II. p. 27—32.) Tabulam confecit, quae indicat Summam Divisorum, qui sunt tribus prioribus Potestatibus omnium numerorum primorum, usque ad 997 progredientium. Hanc Summam designavit per Producta ex numeris primis, ut Summa Divisorum numeri 983^3 est $2^4 . 3 . 5 . 13 . 41 . 7433$.

§. 543. *Animadv.* 2.

Ex Summa Divisorum alicujus numeri oriuntur numeri *amicabiles*. Ita enim dicuntur bini numeri, *si in utroque Summa omnium Divisorum alterutrius numeri* (quibus tamen ipse numerus non adnumeratur) *aequalis est alteri numero*.

Quod si igitur, ut antea, $S(a)$ et $S(b)$ indicant Summam omnium Divisorum una cum ipso numero, qui sunt in numeris a et b (§. 533.), hi numeri sunt amicabiles, si $S(a) - a = b$, atque simul $S(b) - b = a$; ex quo sequitur $S(a) = S(b) = a + b$. Duo igitur requiruntur, ut a et b sint amicabiles, *primum ut Summa Divisorum sit eadem, deinde ut haec Summa aequalis sit Summae numerorum.* Tales sunt numeri 220 et 284. Etenim $S(220)$

$$= S(2^2 . 5 . 11) = \frac{(2^3 - 1)}{1} \cdot \frac{(5^2 - 1)}{4} \cdot \frac{(11^2 - 1)}{10} = 504,$$

at-

atque $S(284) = S(2^2 \cdot 71) = (2^3 - 1) \, 72 = 504$; unde $S(220) = S(284) = 504 = 220 + 284$.

Si praeterea $a = b$, erit $S(a) = S(b) = 2a$, itaque numerus dicitur *perfectus*. Si a non est $= b$, numerus major amicabilis vocatur *redundans*, minor autem *deficiens*.

Eulerus in primis egit de Divisoribus numerorum atque de numeris amicabilibus in *Opusculis Analyticis*, T. II. p. 23—107, atque viam ipsos reperiundi ostendit, qua ipse ultra sexaginta numerorum amicabilium paria elicuit; ex quibus sunt:

I.	$2^4 \cdot 23 \cdot 47$	, atque	$2^4 \cdot 1151$
II.	$2^3 \cdot 17 \cdot 79$	..	$2^3 \cdot 23 \cdot 59$.
III.	$2^4 \cdot 47 \cdot 89$	..	$2^4 \cdot 53 \cdot 79$.
IV.	$2^4 \cdot 23 \cdot 1367$	..	$2^4 \cdot 53 \cdot 607$.
V.	$2^4 \cdot 23 \cdot 479$	..	$2^4 \cdot 89 \cdot 127$.
VI.	$2^4 \cdot 23 \cdot 467$	..	$2^4 \cdot 103 \cdot 107$.
VII.	$2^4 \cdot 17 \cdot 10303$	..	$2^4 \cdot 167 \cdot 1103$.
VIII.	$2^4 \cdot 19 \cdot 1439$	..	$2^4 \cdot 149 \cdot 191$.
IX.	$2^5 \cdot 59 \cdot 1103$	..	$2^5 \cdot 79 \cdot 827$.
X.	$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71$	..	$3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$.
XI.	$2^3 \cdot 19 \cdot 41$	..	$2^5 \cdot 199$.
XII.	$2^3 \cdot 41 \cdot 467$	..	$2^5 \cdot 19 \cdot 233$.

§. 544. *Theorema.*

Numerus $N = a + bz + cz^2 + dz^3 \ldots + tz^m$ (§. 95.), *designatus per notas* $a, b, c, d \ldots$ *alicujus Syste-*

tematis, cujus numerus fundamentalis est z, divisibilis est per numerum p, si $a+br+cr'+dr''\ldots$ per p est divisibilis, ubi $r, r', r''\ldots$ denotant Residua minima (§. 508.), *orta ex Divisione Potestatum $z, z^2, z^3, z^4\ldots$ per p.*

Demonstratio.

Sit $z=kp+r$; $z^2=k'p+r'$, $z^3=k''p+r''$ etc. Ergo $\frac{N}{p}=\frac{a}{p}+b.\left(\frac{kp+r}{p}\right)+c.\left(\frac{k'p+r'}{p}\right)+d.\left(\frac{k''p+r''}{p}\right)$ $\ldots = bk+ck'+dk''\ldots+\frac{a+br+cr'+dr''\ldots}{p}$

Sit $Q=bk+ck'+dk''\ldots$ atque $P=a+br+cr'+dr''\ldots$, unde $\frac{N}{p}=Q+\frac{P}{p}$, ubi Q est numerus integer; ergo *p est Divisor numeri N, si est Divisor Summae P, vel $N\equiv P$ (mod. p.).*

§. 545. *Problema.*

Definire, quando numerus N, designatus juxta Systema Decadicum, (ubi igitur $z=10$ secundum §. 544.) *divisibilis sit per* 2, 3, 5, 6, 7, 11 *eorumque Potestates.*

Solutio.

I. *Divisio per* 2, 4, 8 ... 2^m.

In hac Divisione est $p=2^m$, ergo

$$\frac{N}{2^m}=\frac{a+10b+10^2c\ldots+10^{m-1}s+10^m t+10^{m+1}u+}{2^m}$$

$$=\frac{a+10b+10^2c\ldots+10^{m-1}s}{2^m}+5^m t+2.5^{m+1}u+\ldots$$

Er-

Ergo $\frac{N}{2^m}$ est integer, si $\frac{a+10b+10^2c\ldots+10^{m-1}s}{2^m}$ est integer; id est, si numerus, designatus per m postremas notas, (§. 95.) divisibilis est per 2^m.

Ita quidem $\frac{871428}{4}$, $\frac{632856}{8}$, $\frac{38421120}{16}$ sunt integri, quoniam $\frac{28}{4}$, $\frac{856}{8}$, $\frac{1120}{16}$ sunt integri.

II. *Divisio per* 5, 25, 125, 625, 3125 ... 5^p.

$$\frac{N}{5^m}=\frac{a+10b+10^2c\ldots+10^{m-1}s+10^m t+10^{m+1}u+\ldots}{5^m}$$

$$=\frac{a+10b+10^2c\ldots+10^{m-1}s}{5^m}+2^m t+5.2^{m+1}u+\ldots$$

ergo $N \equiv a+10b+10^2c\ldots+10^{m-1}s$ (mod. 5^m); vel $\frac{N}{5^m}$ *est integer, si* $\frac{a+10b\ \ldots+10^{m-1}s}{5^m}$ *est integer, id est, si numerus, designatus per m postremas notas, est divisibilis per* 5^m, vel si, hoc numero per 2^m multiplicato, postremae m notae redduntur zero. Conf. §. 153. atque §. 283.

Quare quilibet numeri, qui desinunt in 0 vel 5, per 5; qui desinunt in 25, 50, 75, 00, per 25; qui desinunt in 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, 000, per 125; qui desinunt in 625, 1250, 1875, 2500, 3125, 3750, 4375, 5000, per 625 sunt divisibiles; atque ita deinceps de majoribus Potestatibus numeri 5.

III. *Divisio per* 3 *et* 9.

In his est $r=r'=r''=r'''\ldots=1$ (§. 544.), quoniam $10^m \equiv 1$ (mod. 3 vel 9), ergo $N \equiv a+b+c+d+e\ldots$ (mod. 3 vel 9). Quare *si Summa notarum, qui*-

bus

bus designatur N, divisibilis est per 3 vel 9, numerus ipse etiam per 3 vel 9 est divisibilis; veluti 34589361 est divisibilis per 3, quoniam Summa notarum, id est 39, per 3 est divisibilis. Summa notarum numeri 12345678 est 36; quae cum divisibilis sit per 9, numerus ipse per 9 dividi potest.

IV. *Divisio per* 11.

Si modulus est $11 = 10+1$, erit $10 \equiv -1$; ergo $10^2 \equiv 1$; $10^3 \equiv -1$; $10^4 \equiv 1$; atque universe $10^{2m} \equiv 1$, $10^{2m+1} \equiv -1$ (§. 525.); ergo $r = -1$, $r' = 1$, $r'' = -1$, $r''' = 1$ etc. Ergo $N \equiv a-b+c-d+e-f$ (mod. 11.) (§. 544.); id est, si $a+c+e+g \ldots - (b+d+f+h \ldots)$ divisibilis est per 11, totus numerus per 11 est divisibilis; veluti 1316481364 est divisibilis per 11, quoniam $\frac{4+3+8+6+3-(6+1+4+1+1)}{11} = \frac{24-13}{11} = 1$.

Ergo si Summa notarum ordinis paris aequalis est Summae notarum ordinis imparis, numerus est per 11 *divisibilis. Divisibilis etiam est per* 11, *si differentia harum Summarum divisibilis est per* 11, *vel si utraque Summa, divisa per* 11, *eadem habet Residua* (§. 510.).

Quare v. c. per 11 dividi possunt:

1. *Omnes numeri, qui constant ex* 2, 4, 6, 8 ... *am notis aequalibus, ut* 77, 7777, 777777, etc.

2. *Omnes numeri trium notarum, ubi medius numerus est Summa extremorum, aut ubi medius est* 0, *atque Summa extremorum est* 11; *ut* 495. 902.

V.

V. *Divisio per* 27.

Si modulus est 27, est $10 \equiv 10$; $10^2 \equiv 19$; $10^3 \equiv 1$; atque tum redeunt eadem Residua minima. Quare $r = 10$, $r' = 19$, $r'' = 1$, $r''' = 10$, $r^{IV} = 19$ etc., atque Periodus Residuorum est $(r, r', r'') = (10, 19, 1)$. Ergo $N \equiv a + (10b + 19c + d) \ldots$, velut 327564 per 27 est divisibilis, quoniam $\frac{4+60+95+7+20+57}{27} = \frac{243}{27} = 9$.

Sed haec regula, uti etiam, quae eadem ratione invenitur pro Divisore 81, minus apta est calculo. Melius est primum inquirere, utrum Summa notarum per 9 divisibilis sit nec ne.

VI. *Divisio per* 7.

Si 7 est modulus, $10 \equiv 3$; $10^2 \equiv 2$; $10^3 \equiv 6$; $10^4 \equiv 4$; $10^5 \equiv 5$; $10^6 \equiv 1$; $10^7 \equiv 3$ etc., atque tum redeunt eadem Residua. Ergo $N \equiv a + (3b + 2c + 6d + 4e + 5f + g) \ldots$ Quare si posterius membrum divisibile est per 7, etiam N per 7 divisibilis est. Velut 968611469 divisibilis est per 7, quoniam $\frac{9+18+8+6+4+30+8+18+18}{7} = \frac{119}{7} = 17$. Sed haec regula tantum requirit laborem, quantum ipsa Divisio per 7.

Idem dicendum est de ejusmodi investigatione aliorum numerorum. Quare in iis non moremur. Quomodo investigetur, utrum N sit divisibilis per aliquem numerum, compositum ex numeris primis diversis, per se patet; velut si Summa notarum divisibilis est per 9 atque postrema nota par est numerus; Divisio per 18 fieri potest.

§. 546. *Coroll.* 1. *Aliae proprietates numeri 9.*

Sunt alia consideranda in Divisione per numerum 9. Sit $N' = a' + 10b' + 100c' + \ldots$; $P' = a' + b' + c' + \ldots$ $N'' = a'' + 10b'' + 100c'' + \ldots$; $P'' = a'' + b'' + c'' + \ldots$ ergo $N \equiv P$; $N' \equiv P'$, $N'' \equiv P''$ etc. (mod. 9), (§. 545. III.). Sint denique r, r', r'', r''' ... Residua ex Divisione numerorum N, N', N'', N''' ... per 9. Ex quo colligimus:

1. *N et P aequalia habent Residua minima r* (§. 510.), *id est: Residuum ex Divisione numeri N per 9 aequale est Residuo ex Divisione Summae notarum per eundem numerum*, veluti 453215 et 20, idem habent Residuum 2, si Divisor est 9. Idem est dicendum de N' et P', de N'' et P'', caet.

2. Si $N = N' + N'' + N''' + N^{iv}$ ...

P est $\equiv P' + P'' + P''' + P^{iv}$ ... (§. 511.) idemque habent Residuum r.

Haec regula inservit investigando, an vitium commissum fuerit in *Additione numerorum*. Nam *si Residua sunt inaequalia, vera Summa non est reperta.*

Sit $N' =$	23648,	ergo $P' =$	23,	Residuum	$5 = 2+3$.
$N'' =$	53275	.. $P'' =$	22	...	$4 = 2+2$.
$N''' =$	6387	.. $P''' =$	24	...	$6 = 2+4$.
$N^{iv} =$	539	.. $P^{iv} =$	17	...	$8 = 1+7$.
$N =$	83849,	$P =$	32	...	23

sed 23 et 32, divisi per 9, idem habent Residuum 5. Ergo ex hoc experimento saltem verisimile fit, non esse commissum vitium in Additione.

3. *Eadem regula inservit Subtractioni.* Nam si $N = N' - N''$, erit $P \equiv P' - P''$, atque $r = r' - r''$. (§. 511.). Ergo *si Subtractio fuerit rite peracta, Residuum ipsius P est* $r' - r''$.

Velut $N' = 897344$, ergo $P' = 35$, atque $r' = 8 = 3 + 5$.
$N'' = 97384 \quad .\,. \quad P'' = 31 \quad .\,. \quad r'' = 4 = 3 + 1$.
go $N = N' - N'' = 799960 \quad .\,. \quad P = 40 \quad .\,. \quad r = 4 = 8 - 4$.

4. *Usurpatur in Multiplicatione.*

Etenim sit $N = N'\,N''$. Quoniam $N' \equiv P' \equiv r'$, atque $N'' \equiv P'' \equiv r''$, erit $N \equiv P \equiv P'\,P'' \equiv r'\,r''$. (§. 511.).

Ergo *Residuum ipsius P est aequale Residuo Producti* $r'\,r''$.

Sit $N' = 3276859$, ergo $P' = 40$, atque $r' = 4$.
$N'' = 130076 \quad .\,. \quad P'' = 17 \quad .\,. \quad r'' = 8$.
$= N'\,N'' = 426240711284 \quad .\,. \quad P = 41 \quad .\,. \quad r = 5$.

ubi Residuum Producti $r'\,r'' = 32$, est 5.

5. *Idem fit in Divisione*, quoniam $N' = \frac{N}{N''}$:

Sit $N = 1114869145005$, ergo $P = 45$, atque $r = 0$.
$N' = 385 \quad .\,. \quad P' = 16 \quad .\,. \quad r' = 7$.
$' = \frac{N}{N'} = 2895764013 \quad .\,. \quad P'' = 45 \quad .\,. \quad r'' = 0$.

ubi igitur $r \equiv r'\,r''$.

Sit $N = 17409117$, ergo $P = 30$, atque $r = 3$.
$N' = 4378 \quad .\,. \quad P' = 22 \quad .\,. \quad r' = 4$.
$' = \frac{N}{N'} = 39765 \quad .\,. \quad P'' = 30 \quad .\,. \quad r'' = 3$.

ubi $r \equiv r'\,r''$, id est $3 \equiv 12$ (mod. 9).

6. *Similiter fit in reperiundis Potestatibus et Radi-*

di-

dicibus numerorum. Sint enim P et P' summae notarum numerorum N et N^m, atque r et r' eorum numerorum Residua pro modulo 9.

Ergo $N \equiv P \equiv r$, $N^m \equiv P' \equiv r^m$ (§. 511.), ergo $r' \equiv r^m$.

Sit $N = 256$, ergo $P = 13$, atque $r = 4$,
ergo $N^3 = 16777216$ . . $P' = 37$ . . $r' = 1$,
sed $r^3 = 64 \equiv 1$ (mod. 9), ergo $r' \equiv r^3$.
Sit $N^6 = 1073741824$, ergo $P' = 37$, atque $r' = 1$,
$N = 32$ . . $P = 5$ . . $r = 5$.
Sed $5^6 = 15625 \equiv 19 \equiv 1$, ergo $r' \equiv r^6$.

§. 547. *Coroll.* 2. *De Numero* 11.

Quae dicta sunt de usu numeri 9, valent etiam de numero 11, ubi $P = a - b + c - d + e$ . . . $= a + c + e + g - (b + d + e + f \ldots)$.

Sit enim, in exemplis §. 546. allatis, modulus $= 11$. Ergo

$N' = 3276859$. Ergo $P' = 27 - 13 = 14$, atque $r' =$
$N'' = 130076$ . . $P'' = 9 - 8 = 1$ . . $r'' =$
$N = N' N'' = 426240711284$ . . $P = 11 - 30 = -19$ . . $r = -$
vel 3; ergo $3 = 1 . 3$, id est $r = r' r''$.

Sit $N = 17409117$. Ergo $P = 15 - 15 = 0$, atque $r = 0$.
$N' = 4378$ . . $= 11 - 11 = 0$ . . $r' = 0$.
$N'' = \frac{N}{N'} = 39765$ . . $= 15 - 15 = 0$ . . $r'' = 0$.
ubi $r = r' r' = 0$.

atque ita in reliquis.

Hoc loco animadvertendum etiam videtur, 10^{2m} esse formae $11p+1$; sed 10^{2m+1} esse formae $11p-1$,
id

id est: $10^{2m} \equiv 1$, atque $10^{2m+1} \equiv -1$ (mod. 11), ut

$10 = 11 - 1$	$10^2 = 11 \cdot 9 + 1.$
$10^3 = 11 \cdot 91 - 1$	$10^4 = 11 \cdot 909 + 1.$
$10^5 = 11 \cdot 9091 - 1$	$10^6 = 11 \cdot 90909 + 1.$
$10^7 = 11 \cdot 909091 - 1$	$10^8 = 11 \cdot 9090909 + 1$ etc.

§. 548. *Theorema.*

Si $A+tB$ atque $th-g$ divisibiles sunt per m, atque m est primus ad t, $hA+gB$ est etiam per m divisibilis. Rursus, si $hA+gB$, atque $th-g$ divisibiles sunt per m, atque h et g sunt primi ad m, $A+tB$ est per m divisibilis.

Demonstratio prioris.

Si m est modulus, erit

$$th \equiv g$$
$$A \equiv -tB$$

Ergo $thA \equiv -tgB$, ergo $hA \equiv -gB$. (§. 519. 8. β), quoniam m est primus ad t.

vel $hA+gB \equiv 0$ (mod. m.)

Demonstratio posterioris.

$$hA \equiv -gB$$
$$g \equiv th$$

Ergo $hAg \equiv -thgB$, ergo $A \equiv -tB$ (§. 519. 8. β), quoniam m est primus ad hg.

vel $A+tB \equiv 0$ (mod. m).

§. 549. *Coroll.* 1.

Hoc Theorema etiam inservire potest reperiundis

nu-

numeris, qui per datum numerum dividi possunt, atque adhiberi ad numeros designatos juxta quodlibet Systema, si t est numerus fundamentalis, vel aliqua ejus Potestas. Velut in Systemate Decadico quilibet numerus hanc formam habet $N = A + 10B$; *ubi A designatur per postremam notam numeri N, atque B per notas numeri N, sed omissa postrema nota;* ut si $N = 359863$, erit $A = 3$, $B = 35986$.

Ponatur igitur $t = 10$, atque pro h et g quilibet numerus, dummodo $10h - g$ divisibilis sit per m, atque m sit primus ad 10, id est, non contineat Factores 2 et 5.

Facillimus autem fit calculus, si $g = 1$, ergo $10h - 1 = sm$, atque $h = \frac{sm+1}{10}$, ubi s est quilibet numerus. Sit $s = 1$, ergo $h = \frac{m+1}{10}$. Sit $s = -1$, ergo $-h = \frac{m-1}{10}$. Ex his liquet, m posse esse quemlibet numerum integrum, dummodo ejus postrema nota sit 9 in Aequatione $h = \frac{m+1}{10}$, atque 1 in Aequatione $-h = \frac{m-1}{10}$.

Sit $m =$ 11, 19, 21, 29, 31, 39, 41, 49, 51, 59, 61,
ergo $h = -1, +2, -2, +3, -3, +4, -4, +5, -5, +6, -6$,
ergo $\frac{B-A}{11}$; $\frac{B+2A}{19}$; $\frac{B+3A}{29}$; $\frac{B+4A}{39}$; $\frac{B+5A}{49}$; $\frac{B+6A}{59}$;
$\frac{B-2A}{21}$; $\frac{B-3A}{31}$; $\frac{B-4A}{41}$; $\frac{B-5A}{51}$; $\frac{B-6A}{61}$,

sunt

sunt omnes integri, si $N = A + 10B$ per eosdem Denominatores divisibilis est. Exempla haec sint

ae $\frac{B-A}{11}$ est	formae $\frac{B+2A}{19}$ est	formae $\frac{B+3A}{29}$ est
1 $= 11 . 83321$	$31197411 = 19 . 1641969$	$10086461 = 29 . 347809.$
$= 11 . 8332$	$3119743 = 19 . 164197$	$1008649 = 29 . 34781.$
$= 11 . 833$	$311980 = 19 . 16420$	$100891 = 29 . 3479.$
$= 11 . 83$	$31198 = 19 . 1642$	$10092 = 29 . 348.$
$= 11 . 8$	$3135 = 19 . 165$	$1015 = 29 . 35.$
	$323 = 19 . 17$	$116 = 29 . 4.$
	$38 = 19 . 2$	$29 = 29 . 1.$
	$19 = 19 . 1$	

§. 550. *Solutio Congruentiae. Definitio.*

Ut Aequatio $6x - 1 = 30$ solvi dicitur, si is invenitur valor numeri x ($= 5\frac{1}{6}$), qui in ejus locum substitutus, reddat evanescentem $6x - 1 - 30 = 6x - 31$, ita *Congruentia* $6x \equiv 1$ (*mod.* 5) *solvitur, si ii reperiuntur valores ipsius* x, *qui in ejus locum substituti, reddant* $\frac{6x-1}{5}$ *numerum integrum;* qui valores sunt 1, 6, 11, 16, 21 ... atque universe omnes numeri, quorum postrema nota est 1 vel 6. Ad similitudinem Aequationis numeri reperiundi *ultimis*, cogniti autem *primis* Alphabeti literis designari solent; ut in Congruentia $ax + b \equiv c$ (mod. m), a, b, c sunt numeri cogniti, x est numerus incognitus, atque reperiundus. Similiter duo numeri $ax+b$ et c, qui sunt ante signum $\equiv$ et post id signum, dicuntur *membra Congruentiae*, atque membrum $ax+b$ habet duos *terminos* ax et b.

Con-

Considerandum autem est, ut jam monuimus, in his Congruentiis omnes numeros esse *integros* et *positivos*.

§. 551. *Mutatio Congruentiae.*

Membra Congruentiae multas subire possunt mutationes, salva Congruentia ipsa, quae mutationes sunt expositae inprimis §. 498. §. 511 et §. 519, in quibus praecipue hae sunt numerandae; cum quibus comparentur mutationes, quae Aequationibus afferri possunt, notatae §. 20. 82. 136. 164, 174, aliisque locis.

Congruentia non cessat esse,

1. *Si in locum alterutrius membri numerus, ipsi congruens secundum eundem modulum, ponitur* (§. 498. 5.). Ergo si $ax \equiv r$, atque $r \equiv t$, erit $ax \equiv t$.

2. *Si in Congruentia* $ax \equiv r$, *pro* a *ponitur* b, *dummodo* b *sit congruens ipsi* a *secundum eundem modulum.* Hoc sequitur ex priore. Nam cum sit $b \equiv a$, erit $bx \equiv ax \equiv r$. (§. 498. 3.) velut si $13x \equiv 10$ (mod. 9), erit $4x \equiv 1$, quoniam $13 \equiv 4$ atque $10 \equiv 1$ (mod. 9).

3. *Si in locum membri* $(am+b)^s$ *ponitur* b^s, *aut in locum* b^s *ponitur* $(am+b)^s$, *dummodo* m *sit modulus.* Nam $am+b \equiv b$ (mod. m) (§. 499.), ergo $(am+b)^s \equiv b^s$ (§. 511. 4.).

4. *Si alterutro vel utrique membro additur vel subtrahitur numerus formae* mk, *ubi* m *est modulus* (§. 499., atque §. 498. 5.), ut si $32x \equiv 8$ (mod.

(mod. 7), $32x \pm 7k$ est $\equiv 8$ (mod. 7), atque $32x \equiv 8 \pm 7k$ (mod. 7).

5. *Si utrumque membrum per eundem numerum multiplicatur* (§. 498. 3.), ut si $4x \equiv 1$ (mod. 7), $20x$ est $\equiv 5$ (mod. 7).

6. *Si utrumque membrum per eundem numerum dividitur, dummodo Divisor sit primus ad modulum* (§. 519. 8. β), ut si $32x \equiv 8$ (mod. 7), $4x$ est $\equiv 1$ (mod. 7).

7. *Si utrumque membrum atque modulus per eundem numerum multiplicantur vel dividuntur* (§. 519. 8. γ), ut si $16x \equiv 4$ (mod. 22), $32x$ est $\equiv 8$ (mod. 44), atque $8x \equiv 2$ (mod. 11).

8. *Si pro modulo, pars ejus aliquota ponitur* (§. 498. 4), ut si $16x \equiv 4$ (mod. 22), $16x$ est $\equiv 4$ (mod. 11).

9. *Si utrumque membrum ad eandem Potestatem integram et positivam evehitur* (§. 511. 3.), ut si $7x \equiv 1$ (mod. 10), $343x^3$ est $\equiv 1$ (mod. 10).

10. *Si membris Congruentiae alicujus adduntur vel subtrahuntur membra alius Congruentiae secundum eundem modulum* (§. 511. 1. 2), ut si $11x \equiv 5$ (mod. 7), atque $13x \equiv 4$ (mod. 7), $24x$ est $\equiv 9$, atque $2x \equiv -1$ (mod. 7).

11. *Si membra alicujus Congruentiae multiplicantur per membra alius Congruentiae secundum eundem modulum* (§. 511. 3.), ut secundum modulum 7, si $11x \equiv 5$, atque $13x \equiv 4$, $143x^2$ est $\equiv 20$.

12. *Si duo membra congrua sunt secundum diversos modulos, etiam congrua sunt secundum modulum,*

qui est Productum minimum, cujus omnes hi moduli sunt Divisores (§. 519. 8. α et 15.).

§. 552. *Problema.*

Solvere Congruentiam $ax \equiv b$ (mod. m), ubi a et m *sunt inter se primi.*

Solutio.

Si $b > m$, sit $b = mk + r$, ergo $b \equiv r$, atque $ax \equiv r$. Eadem ratione, si a est $> m$, ponatur $a = mk' + c$; unde $a \equiv c$, atque mutata Congruentia est $cx \equiv r$. Quoniam $r < m$, est aliquis terminus Seriei $1 . 2 . 3 \ldots m - 1$, qui est $= r$, atque aliquis terminus ex Serie Productorum $c, 2c, 3c \ldots (m-1) c$ habet Residuum r. Si hic terminus est cw, erit $x = w$ (§. 522.).

Si ita unus valor numeri x, qui Congruentiae satisfacit, inventus est, reliqui facile definiuntur. Nam si hic valor est y, omnes valores indicantur forma generali $y + mk$, ubi pro k quilibet numerus integer et positivus poni potest. Ergo $a(y + mk) \equiv b$. Caeterum a et m inter se primos esse oportet. Etenim $\frac{ax - b}{m}$ est numerus integer, quare si a et m habent Factorem communem, is etiam est Factor numeri b. Quare a, b, m possunt dividi per hunc communem Factorem, qua divisione Congruentia simplicior redditur. Si $\frac{a}{m}$ est integer, etiam $\frac{b}{m}$ est integer, atque tum quilibet numerus integer in locum ipsius x poni potest.

His-

Hisce illustrandis inserviant haec Problemata:

1. *Quaeritur* x, *data Congruentia* $6x + 4 \equiv 17$ (mod. 5).

Solutio. $6x \equiv 13$, sed cum sit $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$, erit $13 \equiv 3 \equiv 6x$, unde $2x \equiv 1$ (§. 551. 6.), sed Seriei Productorum $2(1, 2, 3, 4) = 2, 4, 6, 8$ termini, divisi per 5, habent Residua 2, 4, 1, 3, ex quibus Residuum 1 est termini 6; ergo $6 \equiv 1$; unde $2x = 6$, $x = 3$, et universe $x = 3 + 5k$, atque $6x = 18 + 30k$, $6x - 13 = 5 + 30k$, ubi pro k quilibet numerus integer et positivus poni potest. Sit $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$, ergo $6x = 18, 48, 78, 108 \ldots$, qui omnes sunt congruentes numero 13 secundum modulum 5.

2. *Quinam numeri, divisi per* 3, *habent Residuum* 1, *sed, divisi per* 5, *Residuum* 2?

Responsio. $x \equiv 1$ (mod. 3), ergo $5x \equiv 5$ (mod. 15).
$x \equiv 2$ (mod. 5) . . $3x \equiv 6$ (mod. 15).
unde $5x - 3x = -1$ (§. 551. 7. 10.) $\equiv 14$, id est $2x \equiv 14$, vel $x \equiv 7$ (mod. 15), ergo $x = 7 + 15k$, vel $x = 7, 22, 37, 52, 67 \ldots$

3. *Quinam numeri habent Residua* 5 et 4, *si Divisores sunt* 8 et 11.

Resp. $x \equiv 5$ (mod. 8), ergo $11x \equiv 55$ (mod. 88).
$x \equiv 4$ (mod. 11) . . $8x \equiv 32$ (mod. 88).
ergo secundum modulum 88 est $3x \equiv 23 \equiv 23 + 88 \equiv 111$, vel $x \equiv 37$; ergo $x = 37, 125, 213, 301 \ldots 37 + 88k$.

4. *Quinam numeri habent Residua* 2, 3, 9, *si dividuntur per* 3, 7, 10.

Resp. $x \equiv 2$ (mod. 3); $x \equiv 3$ (mod. 7); $x \equiv 9$ (mod. 10); ergo si modulus est $3 \cdot 7 \cdot 10 = 210$, erit $70x \equiv 140$; $30x \equiv 90$; $21x \equiv 189$; atque Additione fit $121x \equiv 419 \equiv 419 - 210 \equiv 209$.

id

id est $11 \cdot 11x \equiv 11 \cdot 19$, ergo $11x \equiv 19$; atque $11x \equiv 210k + 19$, $x = \frac{210k+19}{11} = 19k + 1 + \frac{k+8}{11}$, unde $k \equiv -8$ (mod. 11) $\equiv 3$, ergo $k = 3$, unde $x = 19k+2 = 59$, vel $x = 59, 269, 479 \ldots 59 + 210p$.

5. *Quinam numeri habent Residua* 3, 1, 0, 5, *si dividuntur per* 5, 6, 7, 8?

Resp. $x \equiv 3$ (mod. 5). Quare secundum modulum $\frac{5.6.7.8}{2} = 840$ est

$x \equiv 1$ (mod. 6)	$168x \equiv 504.$
$x \equiv 0$ (mod. 7)	$140x \equiv 140.$
$x \equiv 5$ (mod. 8)	$120x \equiv 0.$
	$105x \equiv 525.$

ergo Additione fit $533x \equiv 1169 \equiv 1169 + 840 \equiv 2009.$
id est $41 \cdot 13x \equiv 49 \cdot 41$, vel $13x \equiv 49 + 840k$,
unde $x = 64k + 4 + \frac{8k-3}{13}$, atque $8k \equiv 3$ (mod. 13) $= 13+3$,
ergo $k = 2$, atque $x = 133 + 840p \ldots$

§. 553. *Coroll.* 1.

Sit $ax \equiv b$ (mod. m), atque $\frac{ax-b}{m} = y$, ergo $ax - my = b$. Ergo secundum Solutionem praecedentis Problematis, x et y reperiri possunt. Considerandum etiam est, si a et m communem habent Factorem, is etiam debet esse Divisor numeri b; alias Congruentia nulla est.

Sit $23x + 62y = 593$,

ergo $x = \frac{593 - 62y}{23} = 25 - 2y - \frac{2 \cdot (8y-9)}{23}$,

ergo $8y \equiv 9$ (mod. 23) (§. 519. 5.) $\equiv 9 + 23 \equiv 32$,

ergo $y \equiv 4$, unde $y = 4 + 23p$,

at-

atque $x = \frac{593 - 62 \cdot (4+23p)}{23} = \frac{593-248}{23} - 62p$ $= 15 - 62p.$

Ergo $y = 4, \quad 27, \quad 50 \ldots 4 + 23p,$

$x = 15, -47, -109 \ldots 15 - 62p.$

Ergo si requiritur, ut x et y sint positivi, unus solus valor numerorum x et y, qui est 15 et 4, Congruentiae satisfacit.

§. 554. *Coroll.* 2.

Si in Congruentia $ax \equiv 1$ (mod. m), x est $= mp + r$, *erit in Congruentia* $ax \equiv b$ (mod. m), $x = mp + br$. Etenim cum x in priore Congruentia sit $mp + r$, erit $a(mp+r) \equiv 1 \equiv ar$ (mod. m) (§. 551. 3.). Ergo $arx \equiv x$ (§. 551. 5.). Sed cum sit $ax \equiv b$, erit $x \equiv br \equiv br + mp$.

Memorabiles sunt Congruentiae formae $10^t x \equiv 1$ (mod. m), in quibus x est $= 1 + mp$. Tales sunt notatae §. 294., ut $10x \equiv 1$ (mod. 3 vel 9); $10^2 x \equiv 1$ (mod. 11); $10^3 x \equiv 1$ (mod. 27 vel 37); $10^4 x \equiv 1$ (mod. 101); $10^5 x \equiv 1$ (mod. 41 vel 271); $10^6 x \equiv 1$ (mod. 7 vel 13); $10^{22} x \equiv 1$ (mod. 23 vel 121) caet.

Velut cum sit $x = 1$ in Congruentia $10^6 x \equiv 1$ (mod. 7), erit $x = 2, 3, 4 \ldots$ in Congruentiis $10^6 x \equiv 2$; $10^6 x \equiv 3$; $10^6 x \equiv 4 \ldots$

§. 555. *Theorema.*

Si proposita est Aequatio $ax - my = \pm 1$, *vel Congruentia* $ax \equiv \pm 1$ (*mod.* m), *atque* $\frac{m}{a}$ *mutatur*

in

in Fractionem continuam, x est Numerator atque y Denominator penultimae Fractionis partialis.

Demonstratio.

Quoniam $ax - my = \pm 1$, est $\frac{x}{y} - \frac{m}{a} = \pm \frac{1}{ay}$, quae Aequatio prorsus eandem habet formam atque Differentia duarum Fractionum partialium.

Nam $\overset{(n)}{P} - \overset{(n+1)}{P} = \frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}} - \frac{\overset{(n+1)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{p}} = \pm \frac{1}{\overset{(n)}{p} \cdot \overset{(n+1)}{p}}$ (§. 474.).

Ponatur igitur $\overset{(n)}{\pi} = x$; $\overset{(n)}{p} = y$; $\overset{(n+1)}{\pi} = m$; $\overset{(n+1)}{p} = a$.

Quare si $\frac{\overset{(n+1)}{\pi}}{\overset{(n+1)}{p}}$ est *ultima* Fractio partialis, sive *tota Fractio*, $\frac{\overset{(n)}{\pi}}{\overset{(n)}{p}}$ est *penultima*. Ex quo patet hujus enunciationis veritas.

Exemplum. I. *Quaerantur duo numeri, quorum Differentia sit unitas, ex quibus alter per* 239, *alter per* 677 *sit divisibilis.*

Solutio. Numeri sint z atque $z+1$; sit $z = 677x$, atque $z + 1 = 239y$; ergo $239y - 677x = 1$. Vel $677x \equiv -1$ (mod. 239). Sed (§. 472.) Fractionis totius $\frac{239}{677}$ penultima Fractio partialis est $\frac{6}{17}$, ergo $x = 6$, atque $y = 17$, unde $z = 677 \cdot 6 = 4062$, atque $z + 1 = 4063$.

II. Sit $19x \equiv 1$ (mod. 140), vel $19x - 140y = 1$. Invenitur $x = 59 + 140p$; $y = 8 + 19p$.

§. 556.

§. 556. *Coroll.* 1.

Hoc igitur modo facile solvitur Aequatio formae $ax - my = \pm 1$, vel Congruentia $ax \equiv \pm 1$ (mod. m), atque, hac soluta ope §. 554., etiam Aequatio $ax - my = \pm g$, vel Congruentia $ax \equiv \pm g$ (mod. m).

Exempla.

I. *Quaeritur x in Congruentia* $533x \equiv 1169$ (*mod.* 840). Sit $533x \equiv 1$ (mod. 840), vel $533x - 840y = 1$.

$$\frac{840}{533} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4.}}}}}}}}$$

rgo Indices sunt $1; 1; 1; 2; 1; 3; 1; 3; 4$

ıctiones partiales $\frac{0}{1}; \frac{1}{0}; \frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}; \frac{11}{7}; \frac{41}{26}; \frac{52}{33}; \frac{197}{125}; \frac{840}{533}.$

$$\text{Ergo } x = 197,\ 1037 \ldots 197 + 840p$$
$$y = 125,\ 658 \ldots 125 + 533p.$$

Quare in Aequatione $533x - 840y = 1169$, vel in Congruentia $533x \equiv 1169 \equiv 329$ (mod. 840), x est $\equiv 329 \cdot 197$ (mod. 840) $= 77 \cdot 840 + 133 \equiv 133$.

ʒo $x = 133, 973 \ldots (133 + 840p)$, atque $y = \frac{533x - 1169}{840}$,

st $y = 83, 616 \ldots (83 + 533p)$.

§. 557. *Coroll.* 2.

Ad haec Problemata referuntur Quaestiones:

I.

I. *Dividere Fractionem $\frac{g}{am}$ in duas alias, ex quibus alterutra habeat Denominatorem a, altera Denominatorem m.*

Sint Numeratores harum Fractionum x et y, unde $\frac{x}{m}+\frac{y}{a}=\frac{g}{am}$, ergo $ax+my=g$; $ax \equiv g$ (mod. m), $y=\frac{g-ax}{m}$.

Quare si $g=1169$, $a=533$; $m=840$, (§. 556). Fractio est $\frac{1169}{840 \cdot 533}=\frac{133}{840}-\frac{83}{533}=\frac{973}{840}-\frac{616}{533}$ caet.

Si designanda est Fractio per veras Fractiones, una sola est Solutio, $\frac{133}{840}-\frac{83}{533}$, atque si ut in hoc exemplo $g<ax$, erit secunda Fractio negativa.

II. *Quaeruntur duo numeri, quorum Summa vel Differentia est g, ex quibus alter per a, alter per m est divisibilis.*

Sit z prior numerus, ergo si Differentia quaeritur, posterior numerus est $z-g$; $z=ax$, $z-g=my$, unde $g=ax-my$, atque $ax \equiv g$ (mod. m), $y=\frac{ax-g}{m}$. Ergo si $g=1169$, $a=533$, $m=840$, x est $=133$, $y=83$, atque $z=ax=70889$, atque $z-g=69720$.

Si quaeritur Summa, prior numerus est z, posterior $g-z$, ergo $g=ax+my$; ergo y est negativum, quod accidit si $ax<g$. Ergo si $ax<g$, reperitur Summa, si $ax>g$, reperitur Differentia, quod etiam per se patet.

§. 558.

§. 558. *Problema.*

Definire valores numerorum integrorum x et y in Aequatione $xy+ax+by=c$.

Solutio.

$$y=\frac{c-ax}{b+x},\ \text{atque}\ x=\frac{c-by}{a+y}.$$

Ergo $c-ax\equiv 0\ (\text{mod. } b+x)$; $c-by\equiv 0\ (\text{mod. } a+y)$,
sed $ax+ab\equiv 0$ . . . . . $ab+by\equiv 0$ . . . . . ,
unde $c+ab\equiv 0$ mod. $(b+x)$, atque
$c+ab\equiv 0$ (mod. $a+y$) (§. 551. 2. 10.)

Hae duae Congruentiae modulis solis differunt, quoniam duntaxat x et y atque a et b inter se commutantur, qua mutatione igitur $c+ab$ idem permanet.

Ergo $c+ab\equiv 0$ (mod. $(b+x)(a+y)$) (§. 551. 12.), id est, $c+ab$ decomponendus est in duos Factores. Alter horum est $b+x$, alter autem $a+y$.

Exemplum. Aequatio sit $xy+3x+4y=84$, ergo $c=84$, $a=3$, $b=4$, $c+ab=96$, atque $96\equiv 0$ (mod. $(4+x)(3+y)$). Ergo Factores numeri 96 quaerendi sunt (§. 541. p. 575), unde

$3+y=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96,$
$4+x=96, 48, 32, 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1,$
ergo $y=-2, -1, 0, 1, 3, 5, 9, 13, 21, 29, 45, 93,$
$x=92, 44, 28, 20, 12, 8, 4, 2, 0, -1, -2, -3.$

Ad hoc genus referuntur *Problemata* hujus argumenti:

I. *Quaeruntur duo numeri x et y, quorum Summa, addita ipsorum Producto, sit c.*

Etenim Aequatio est $x+y+xy=c$, ergo $a=1$, $b=1$,

$b=1$, $ab=1$; unde $c+1 \equiv 0$ (mod. $(x+1)(y+1)$).
Sit $c=84$, ergo $c+1=85$; ex quo reperiuntur $x=4$, $y=16$.

II. *Quaeruntur duo numeri x et y tales, ut, si ipsorum Summa subtrahitur ipsorum Producto, Residuum sit c.*

Ergo $a=-1$, $b=-1$, $ab=1$; unde $c+1 \equiv 0$ (mod. $(x-1)(y-1)$); ergo si $c=84$, $c+1$ est $85=5 \cdot 17=1 \cdot 85$ unde $x=2$, $y=86$, atque $x=6$, $y=18$.

§. 559. *Problema.*

Definire valores numerorum integrorum in Aequatione $pxy+ax+by=c$.

Solutio.

$$x=\frac{c-by}{a+py};\ y=\frac{c-ax}{b+px};$$

unde $cp+ab \equiv 0$ (mod. $(a+py)(b+px)$) (§. 558.).

Exemplum. Aequatio sit $2xy+3x+4y=48$; ergo $p=2$, $a=3$, $b=4$, $c=48$, $cp+ab=108$; unde $108 \equiv 0$ (mod. $(3+2y)(4+2x)$); vel $54 \equiv 0$ (mod. $(3+2y)(2+x)$) (§. 551. 6.).

$3+2y=$	1, 2,	3, 6,	9, 18,	27, 54
ergo $y=$	-1	0	3	12
$2+x=$	54	18	6	2
ergo $x=$	52	16	4	0.

Ergo quatuor sunt valores ipsorum x et y, si admittuntur negativi, atque evanescentes, qui Congruentiae satisfaciunt.

Quaeruntur duo numeri, quorum quintupla Summa, addita ipsorum duplo Producto, efficit 50.

In

In hoc Problemate sunt $a=b=5$, $p=2$, $c=50$, $cp+ab=125$, ergo $125 \equiv 0$ (mod. $(5+2x)(5+2y)$).

Ergo $5+2x = 1, 5$ $x = -2, 0$

$5+2y = 125, 25$ $y = 60, 10$.

Ergo nulli sunt numeri, qui Quaestioni satisfaciunt, nisi admittuntur negativi et evanescentes.

§. 560. *Problema.*

Definire valores numerorum integrorum x et y in Aequatione $x^2+xy+ax+by=c$.

Solutio.

$$y=\frac{c-x^2-ax}{b+x}=-(a-b+x)+\frac{c-b^2+ab}{b+x},$$

ergo $c+(a-b)b \equiv 0$ (mod. $(b+x)$).

Exemplum. Sit proposita $x^2+xy+8x+4y=65$, ergo $a=8$, $b=4$, $c=65$, $y=-(4+x)+\frac{81}{4+x}$, atque $81 \equiv 0$ (mod. $4+x$).

Ergo $4+x = 1, 3, 9, 27, 81$

$x = -3, -1, 5, 23, 77$

$y = 80, 24, 0, -24, -80$.

Multa alia sunt Problemata, quae eadem ratione solvuntur, ut:

Quaeruntur duo numeri tales, ut, si a Producto ex Summa atque Quadrato alterutrius termini subtrahitur Summa ipsa, Residuum sit c.

Solutio. $(x+y)x^2-(x+y)=c=(x+y)(x^2-1)$, ergo $x+y=\frac{c}{x^2-1}$, atque $y=\frac{c}{x^2-1}-x$.

Sit

Sit $e = 48$:

ergo sit $x^2 - 1 =$	1, 2,	3, 4, 5, 6, 8,	12, 16,	24, 48	
$x^2 =$	2, 3,	4, 5, 6, 7, 9,	13, 17,	25, 49	
$x =$	2,	3,		5, 7	
$\frac{e}{x^2-1} =$	16,	6,		2, 1	
$y =$	14,	3,		−3, −6.	

De formis et Residuis numerorum primorum et Potestatum.

§. 561. *Theorema.*

Omnis numerus primus, si excipis 2 et 3, est formae $6x \pm 1$, ita ut semper sit $p \equiv \pm 1$ (mod. 6), si p est numerus primus.

Demonstratio.

Omnis numerus integer habet aliquam ex his sex formis: $6x$, $6x+1$, $6x+2$, $6x+3$, $6x+4$, $6x+5$, quoniam Residua minima ex Divisione per 6 sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sed numeri formae $6x + 2 = 2(3x + 1)$; $6x + 3 = 3(2x + 1)$; $6x + 4 = 2(3x + 2)$; $6x = 2 . 3x$, sunt numeri facti ex duobus vel pluribus Factoribus. Ergo numerus primus est solius formae $6x+1$, atque $6x+5$. At vero $6x+5$ eadem est forma, atque $6x-1$.

Sit $x = 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; 4, \; 5$

ergo $6x \pm 1 = 1, \; 5, 7, \; 11, 13, \; 17, 19, \; 23, 25, \; 29, 31$, ubi unus solus est numerus non primus.

§. 562. *Coroll.* 1.

Eodem modo colligimus, numeris primis esse

1.

1. Duas formas $4x \pm 1$, ad numerum 4, si excipis 2.
2. Quatuor formas $8x \pm 1$, atque $8x \pm 3$, si excipis 2.
3. Quatuor formas 12 ± 1, atque 12 ± 5, si excipis 2 et 3.

Ad reperiundos numeros primos, forma $6x \pm 1$ (vel $12x \pm 1$, $12x \pm 5$) magis apta est, quam forma $8x \pm 1$, $8x \pm 3$. Nam prior forma, si numeri usque ad 100 progrediuntur, solummodo dat 9 numeros non primos, sed posterior dat 25.

§. 563. *Animadv.* 1.

Memorabilis est formula $x^2 + x + p$, ubi p est numerus primus, quoniam nonnulli valores ipsius p multos suppeditant numeros primos.

Si p est $= 41$, ita ut numerus M sit $= x^2 + x + 41$, atque x deinceps ponitur $0, 1, 2, 3 \ldots 39$, singuli quadraginta numeri, qui prodeunt, sunt numeri primi. Si continuatur Series, ita ut x deinceps sit $0, 1, 2, 3 \ldots 100$, ex 101 numeris, $41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \ldots 10141$, qui ita nascuntur, 88 numeri sunt primi, ergo solummodo 13 numeri non primi, qui omnes sunt facti ex duobus Factoribus primis, praeter 6847, qui est $17^2 \cdot 23$.

Ex numeris, qui eadem ratione ex formula $x^2 + x + 101$ oriuntur, sunt 69 numeri *primi*, atque 32 *non primi*; ex quibus sunt 18, quorum communis Divisor est 11.

Si $p = 107$, prodeunt etiam 69 numeri primi, atque 32 non primi; ex quibus sunt 14, quorum Divisor communis est 7, atque 10, ubi is Divisor est 17.

Si-

Si $p = 227$, prodeunt 66 numeri primi, atque 35 non primi; ex quibus sunt 16, quorum Divisor communis est 13, atque 10, ubi is Divisor est 19.

Si $p = 83$, prodeunt 21 numeri non primi, si excipis qui Divisorem habent 5.

Contra, $p = 313$, dat solummodo 14 numeros primos.

§. 564. *Animadv.* 2.

Forma numerorum $pM+q$, atque $pM+q-p$ *eadem est*. Etenim, quoniam M est quilibet numerus integer, ponamus $M-1$ pro M; ergo $p(M-1)+q = pM+q-p$, ut $6M+5$, atque $6M-1$ eadem est forma.

§. 565. *Theorema.*

Numerus formae $pM \pm q$, *ubi* q, p, M *sunt numeri integri positivi, est aut formae* $2pM \pm q$, *si* M *est par, aut formae* $2pM + p \pm q$, *si* M *est impar.*

Nam si M est par, ponamus $M = 2N$, ergo $pM \pm q = 2pN \pm q$. Si M est impar, sit $M = 2N+1$, ergo $pM \pm q = 2pN + p \pm q$. Ergo Forma:

$2M-1$ vel $2M+1$	est aut	$4M+1$	, aut	$4M+3$.
$3M-2$ . . $3M+1$	. . . . .	$6M+1$	. .	$6M+4$.
$4M-3$ . . $4M+1$	. . . . .	$8M+1$	. .	$8M+5$.
$5M-4$ . . $5M+1$	. . . . .	$10M+1$	. .	$10M+6$.
$6M-5$ . . $6M+1$	. . . . .	$12M+1$	. .	$12M+7$.
$3M-1$ . . $3M+2$	. . . . .	$6M+2$	. .	$6M+5$.
$4M-1$ . . $4M+3$	. . . . .	$8M+3$	. .	$8M+7$.
$5M-2$ . . $5M+3$	. . . . .	$10M+3$	. .	$10M+8$.
$6M-1$ . . $6M+5$	. . . . .	$12M+5$	. .	$12M+11$.

& atque ita in aliis.

§. 566.

§. 566. *Theorema.*

Omne Quadratum (a^2) numeri paris (a) par est, sed numeri imparis, impar est. Potest ita repraesentari:

$a^2 = 4^m (8x+1)$, *ubi* $m = 0$, *si* a *est impar.*

Demonstratio.

I. *Sit a numerus impar.* Ergo ponatur $a = 2c+1$, ubi c est quilibet numerus integer, unde:

$a^2 = 4c^2+4c+1 = 4(c^2+c)+1$. Sed $c^2+c = c.(c+1)$ est numerus par, ergo sit $\frac{c^2+c}{2} = x$, unde $a^2 = 8x+1$, ubi x est numerus *triangularis* (§. 367.).

Sit $a = 17$, ergo $c = 8$; $x = 36$; $8x+1 = 289 = 17^2$.

II. *Sit a numerus par*, quare sit $a = 2^m d$, ubi d est numerus impar; unde $a^2 = 2^{2m} d^2 = 4^m d^2$, ergo $d^2 = 8x+1$, atque $a^2 = 4^m (8x+1)$.

Sit $a = 18 = 2.9$, ergo $m = 1$, $d = 9$; $d^2 = 8x+1 = 81$; $x = 10$; $a^2 = 4 (8x+1) = 324$.

§. 567. *Coroll.* 1.

Radix secunda cujuslibet Quadrati completi paris, est numerus par. Nam si esset impar, Quadratum impar foret.

§. 568. *Coroll.* 2.

Radix secunda cujuslibet Quadrati completi imparis, est numerus impar. Nam si par esset, Quadratum par foret.

§. 569. Coroll. 3.

Ut appareat, quaenam sit forma Summae vel Differentiae $A^2 \pm nB^2$, separandus primum est ille Divisor communis maximus, si quis est, qui est formae 4^t; adeo ut sit $A^2 = 4^t a^2$; $B^2 = b^2 4^t$, atque A^2 et B^2 non habeant Divisorem communem 4. Sit v. c. $A = 144 = 4^2 9$, atque $B^2 = 196 = 4 \cdot 49$; ergo $a^2 = 36$, atque $b^2 = 49$. Contemplemur igitur formam numerorum $a^2 \pm nb^2$, atque sit $a^2 = 4^m (8x+1)$, atque $b^2 = 4^t (8y+1)$. Ergo *aut a, aut b, aut uterque est numerus impar, ita ut aut m, aut t, aut uterque Exponens evanescat.*

I. *Forma Summae* $a^2 + b^2$.

1. *Sit alteruter numerus a par, non divisibilis per 4, atque b impar.*

Ergo $t = 0$, atque $m = 1$; unde $a^2 + b^2 = 4 \cdot (8x+1) + 8y + 1 = 32x + 8y + 5 = 8M + 5$, ubi $M = 4x + y$.

Hujus formae $8M+5$ sunt v. c. hi numeri:

$5 = 4 + 1$, ubi $M = 0$; $37 = 36 + 1$, ubi $M = 4$.
$13 = 4 + 9$ .. $M = 1$; $45 = 36 + 9$ .. $M = 5$.
$29 = 4 + 25$ .. $M = 3$; $61 = 36 + 25$ .. $M = 7$.
$53 = 4 + 49$ .. $M = 6$; $85 = 36 + 49 = 4 + 81$ .. $M = 10$.

2. *Sit alteruter numerus a par, divisibilis per 4, atque b impar.* Ergo $t = 0$, atque $4^m = 16 \cdot 4^{m-2}$, unde $a^2 + b^2 = 16 \cdot 4^{m-2} (8x+1) + (8y+1) = 8M + 1$, ubi $M = 2 \cdot 4^{m-2} (8x+1) + y$.

Hujus formae $8M+1$ sunt:

$17 = 16 + 1$; $41 = 16 + 25$; $65 = 16 + 49 = 64 + 1$; $97 = 16 + 81$
$25 = 16 + 9$; $73 = 64 + 9$; $89 = 64 + 25$; cae

Fo

Formae autem $8M+1$ et $8M+5$ ad unam Formam $4M+1$ reducuntur (§. 565.).

3. *Sint a et b impares.* Ergo $m=m'=0$, atque $a^2+b^2=8(x+y)+2$. Ergo forma est $2(4M+1)$, ubi $M=x+y$; quae forma est aut $2(8M+1)$, si $x+y$ est numerus par, aut $2(8M+5)$, si $x+y$ est impar. Ergo si $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (ubi a et b sunt impares) per 8 dividitur, Residuum est vel 1 vel 5.

$8M+1$ sunt, $\frac{1+1}{2}=1$; $\frac{1+49}{2}=\frac{25+25}{2}=25$; $\frac{1+81}{2}=41$; $\frac{9+9}{2}=$

$\frac{+25}{2}=17$; $\frac{49+49}{2}=49$.

$8M+5$ sunt, $\frac{1+9}{2}=5$; $\frac{1+25}{2}=13$; $\frac{9+49}{2}=29$; $\frac{9+81}{2}=4$

$\frac{5+49}{2}=37$.

Ex quo sequitur:

α. *Omnis numerus impar, qui est Summa duorum Quadratorum, est formae* $4M+1$, ut 5 . 13 . 17 . 25 . 29 . 37 . 41 . 45 . 53 . 61 . 65 . 73 . 85 . 89 . 97. Verum non omnis numerus formae $4M+1$ est Summa duorum Quadratorum. Tales enim non sunt 9 . 21 . 33 . 49 . 57 . 69 . 77 . 81 . 93, ex quibus tamen nullus est numerus primus. Hoc adfirmari potest, omnem numerum primum formae $4M+1$ Summam esse duorum Quadratorum.

β. *Numerus impar, qui est Summa duorum Quadratorum* a^2+b^2, *est formae* $8M+1$, *si a per 4 divisibilis est, sed formae* $8M+5$, *si a per 4 non est divisibilis.*

γ. *Nullus numerus formae* $4M+3$, *vel nullus nu-*

numerus vel formae $8M+3$, *vel* $8M+7$, *potest esse Summa duorum Quadratorum*, veluti 3 . 7 . 11 . 15 . 19 . 23 . 27 caet. nulla duorum Quadratorum Summa repraesentari possunt.

II. *Forma Summae* a^2+2b^2.

1. *Sit a par, non divisibilis per* 4, *atque b impar*. Ergo $m=1$; $a^2+2b^2=4(8x+1)+16y+2 = 32x+16y+6 = 2(8(2x+y)+3) = 2(8M+3)$, ubi $M=2x+y$.

Hujus formae $8M+3$ sunt $\frac{4+2.1}{2}=3$; $\frac{4+2.9}{2}=11$; $\frac{4+2.25}{2}=27$; $\frac{36+2.1}{2}=19$; $\frac{36+2.25}{2}=43$. caet.

2. *Sit a numerus par, b impar, sed* $m=2$, *vel etiam major quam* 2.

Ergo $a^2+2b^2=4^m(8x+1)+16y+2=4^{m-2}(128x+16)+16y+ = 2(1+8y+4^{m-2}(64x+8)) = 2(1+8M)$,

ubi $M=y+4^{m-2}(8x+1)$.

Hujus formae $8M+1$ sunt $\frac{16+2.1}{2}=9$; $\frac{16+2.9}{2}=17$; $\frac{64+2.1}{2}=\frac{16+2.25}{2}=33$; $\frac{64+2.9}{2}=41$. etc.

3. *Sit a numerus impar, atque b par*. Ergo $a^2+2b^2 = 8x+1+4^t . 2(8y+1) = 8M+1$, ubi $M=x+4^{t-1}(8y+1)$.

Hujus formae $8M+1$ sunt, $1+2.4=9$; $1+2.16 = 25+2.4=33$; $1+2.36=73$; $9+2.4=17$; $9+2.16=41$; $25+2.16=49+2.4=57$; $49+2.16 = 9+2.36=81$; $81+2.4=89$; $25+2.36=97$.

4.

4. *Sint a et b impares numeri.* Quare $a^2+2b^2 = 8x+16y+3 = 8M+3$, ubi $M = x+2y$. Hujus igitur formae $8M+3$ sunt, $3=1+2.1$; $11=9+2.1$; $19=1+2.9$; $27=9+2.9=25+2.1$; $43=25+2.9$; $51=1+2.25=49+2$; $59=9+2.25$; $67=49+2.9$; $75=25+2.25$; $83=81+2.1$; $1+2.49=49+2.25=81+2.9=99$, caet.

Ex quo colligimus.

α. Omnis numerus impar, qui est Summa horum trium Quadratorum a^2+2b^2, *est formae* $8M+1$ (ut 9.17.33.41.57.73.81.89.97 ...), *si b est par, sed formae* $8M+3$ (ut 3.11.19.27.43.51.59.67.75.83.99 ...), *si b est impar.* Nam ut a^2+2b^2 sit impar, a^2 esse imparem oportet.

β. Omnis numerus par, non divisibilis per 4, qui est Summa horum trium Quadratorum a^2+2b^2, *est formae* $2(8M+1)$, *si a divisibilis est per 4, sed formae* $2(8M+3)$, *si a per 4 non est divisibilis.* Ita formae $8M+1$ sunt 18.34.66.82, sed formae $8M+3$ sunt 6, 22, 38, 54, 86.

γ. Nullus numerus formae $8M+5$ *atque* $8M+7$, (ut 5.7.13.15.21.23.29.31 ...) *potest esse Summa horum trium Quadratorum* a^2+2b^2.

III. *Forma Differentiae* a^2-b^2, *ubi* $a>b$.

1. *Sit a numerus par, neque tamen divisibilis per 4, atque b sit impar.* Ergo $m=1$, atque $a^2-b^2=4(8x+1)-8y-1=32x-8y+3 =8M+3$, ubi $M=4x-y$,

velut $4-1=3$; $100-81=19$; $36-1=35$;
$36-25=11$; $196-169=27$; $100-49=51$, caet.

2. *Sit a numerus par, atque divisibilis per 4,*

at-

atque b sit impar. Ergo cum $m = 2$ vel > 2, erit $a^2 - b^2 = 16\, 4^{m-2}(8x+1) - 8y - 1 = 8M + 7$, ubi $M + 1 = 2 \cdot 4^{m-2}(8x+1) - y$, velut $16 - 9 = 7$; $16 - 1 = 64 - 49 = 15$; $64 - 25 = 39$; $144 - 121 = 23$; $64 - 9 = 55$; $64 - 1 = 63$.

Mutetur *a* in *b* atque *b* in *a*. Tum autem formae $8M+3$ et $8M+7$ fiunt negativi, atque igitur abeunt in formas $8M-3$ et $8M-7$ vel $8M+5$ atque $8M+1$. Ex quo sequitur:

3. *Si b est numerus par, neque tamen divisibilis per* 4, *atque a est impar, forma est:* $8M+5$. Velut $9 - 4 = 5$; $49 - 36 = 13$; $25 - 4 = 121 - 100 = 21$; $49 - 4 = 81 - 36 = 45$.

4. *Si b est numerus par, divisibilis per* 4, *atque a est impar*, forma est $8M+1$, velut $25 - 16 = 9$; $81 - 64 = 17$; $49 - 16 = 33$.

5. *Sint a et b impares.* Ergo $a^2 - b^2 = 8x - 8y = 8(x-y)$. Ergo forma est $8M$, ubi $M = x - y$, ut $9 - 1 = 8$; $25 - 9 = 16$; $25 - 1 = 49 - 25 = 24$.

Ex hoc patet:

α. *Omnis numerus impar, qui est Differentia duorum Quadratorum* $a^2 - b^2$, *est:*

1. *formae* $8M+3$, *si a est numerus par, non divisibilis per 4*
2. *formae* $8M+7$ . . . . *divisibilis per* 4.
3. *formae* $8M+5$, *si b est numerus par, non divisibilis per 4*
4. *formae* $8M+1$ . . . . *divisibilis per* 4.

Ergo universe *est formae* $4M+3$, *si a est par, sed formae* $4M+1$, *si b est par* (§. 565.).

β. *Differentia duorum Quadratorum imparium divisibilis est per* 8.

IV.

IV. *Forma Differentiae* $a^2 - 2b^2$, *ubi* $a^2 > 2b^2$.

1. *Sit a par, non divisibilis per* 4, *atque b impar.* Ergo $a^2 - 2b^2 = 4(8x+1) - 16y - 2 = 32x - 16y + 2 = 2(16x - 8y + 1) = 2(8M+1)$, ubi $M = 2x - y$, velut formae $8M+1$ sunt $\frac{4-2}{2} = \frac{100-98}{2} = 1$; $\frac{36-18}{2} = 9$; $\frac{36-2}{2} = 17$.

2. *Sit a par, divisibilis per* 4, *atque b impar.* Ergo $a^2 - 2b^2 = 4^{m-2}\,16\,(8x+1) - 16y - 2 = 2(4^{m-2}(64x+8) - 8y - 1) = 2(8M+7)$, ubi $M+1 = 4^{m-1}(8x+1) - y$. Velut $\frac{64-50}{2} = \frac{16-2}{2} = 7$; $\frac{64-2}{2} = 31$; $\frac{64-18}{2} = 23$.

3. *Sit a impar, atque b par.* Ergo $a^2 - 2b^2 = 8x + 1 - 4^t \cdot 2\,(8y+1) = 8M + 1$, ubi $M = x - 4^{t-1}(8y+1)$, velut $49 - 32 = 25 - 8 = 17$; $9 - 8 = 1$; $49 - 8 = 41$; $81 - 8 = 73$; $81 - 72 = 9$.

4. *Sint a et b numeri impares.* Ergo $a^2 - 2b^2 = 8x - 16y - 1 = 8M + 7$, ubi $M+1 = x - 2y$, ut: $25 - 2 = 23$; $49 - 18 = 31$; $81 - 50 = 31$; $9 - 2 = 25 - 18 = 7$; $49 - 2 = 47$; $81 - 18 = 63$.

Ex quo sequitur:

α. Nullus numerus formae $8M+3$, *vel* $8M+5$, *potest repraesentari per* $a^2 - 2b^2$.

β. Omnis numerus impar formae $a^2 - 2b^2$ *est formae* $8M+1$, *si b est par, sed formae* $8M+7$, *si b est impar.*

γ. Omnis numerus par formae $a^2 - 2b^2$ *non di-*

vi.

visibilis per 4 est formae $2(8M+1)$, *si a non est divisibilis per 4, sed formae* $2(8M+7)$, *si a est divisibilis per 4.*

Eodem modo in investigandis formis numeri $a^2 \pm nb^2$ pergere possumus.

§. 570. *Theorema.*

$x^n \equiv x^r$ (*mod. m*), *si m est numerus primus, qui non continetur in x, atque* $\frac{n-r}{m-1}$ *est integer.*

Demonstratio.

Sit $\frac{n-r}{m-1} = k$, ergo $n = k(m-1)+r$. Ergo $\frac{x^n - x^r}{m} = \frac{x^{k.(m-1)+r} - x^r}{m} = \frac{x^r(x^{k.(m-1)}-1)}{m}$. Sed $x^{m-1} \equiv 1$ (mod. m) (§. 524. 4.), ergo $x^{(m-1)k} \equiv 1$ (mod. m) (§. 551. 9.). Ergo cum $\frac{x^{k.(m-1)}-1}{m}$ sit integer, etiam $\frac{x^n - x^r}{m}$ est integer.

Sit $n=9$; $r=1$, $m=5$, ergo $k=2$. Quare si x non habet Factorem 5, erit $x^9 \equiv x$ (mod. 5), vel $x^8 \equiv 1$ (mod. 5) (§. 551. 6.); ut $2^8 - 1 = 255$; $3^8-1 = 6560$; $2^{16}-1 = 65535$; $3^{16}-1 = 43046720$; $7^8 - 1 = 5764800$, qui omnes per 5 sunt divisibiles.

§. 571. *Coroll.* 1.

Ergo $x^{k.(m-1)+r}$, *atque* x^r *eadem habent Residua, si modulus m est numerus primus, qui in x non*

non continetur. Ergo etiam $x^{k.(n-1)+1}$ *atque* x; $x^{k.(n-1)}$ *atque* $x^0 = 1$.

Sit 257 modulus, unde

$1 \equiv x^{256k}$; $29 \equiv 29^{257} \equiv 29^{256k+1}$; $70 \equiv 29^2 \equiv 29^{256k+2}$; $-26 \equiv 29^3 \equiv 29^{256k+3}$; $17 \equiv 29^4 \equiv 29^{256k+4}$; $29^r \equiv 29^{256k+r}$.

Sit 7 modulus.

Quoniam $2 \equiv 3^2 \equiv 5^4$; $3 \equiv 5^5$; $4 \equiv 5^2 \equiv 3^4$; $5 \equiv 3^5$; $6 \equiv 3^3 \equiv 5^3$; erit $2 \equiv 3^{6k+2} \equiv 5^{6k+4}$; $3 \equiv 5^{6k+5}$; $4 \equiv 5^{6k+2} \equiv 3^{6k+4}$; $5 \equiv 3^{6k+5}$; $6 \equiv 3^{6k+3} \equiv 5^{6k+3}$;

unde $2 \equiv 9^{3k+1} \equiv 25^{3k+2}$; $4 \equiv 25^{3k+1} \equiv 9^{3k+2}$; $6 \equiv 27^{2k+1}$, caet.

§. 572. *Coroll.* 2.

Ope hujus Theorematis atque §. 551. 3. facile plerumque computantur Residua cujuslibet Potestatis, si modulus est numerus primus, velut:

Quaenam sunt Residua, si 9^{9^9} *dividitur per* 11, 13, 17, 19.

Solutio. $9^{9^9} = 9^{387420489} = 9^{10.38742048+9} = 9^{12.32285040+9} = 9^{16.24213780+9} = 9^{18.21523360+9}$.

Ergo $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv 27^6$ pro singulis his modulis 11, 13, 17, 19. Residua igitur reperiuntur, si $387420489 = 27^6$ per hos numeros dividitur. Qui tamen calculus hoc modo redditur facilior.

nodulus est 11, 27^6 est $\equiv 5^6 \equiv 25^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 5$.

. . . 13, 27^6 est $\equiv 1$.

. . . 17, 27^6 est $\equiv 10^6 \equiv 100^3 \equiv 15^3 \equiv (-2)^3 \equiv -8 \equiv 9$.

. . . 19, 27^6 est $\equiv 8^6 \equiv 64^3 \equiv 7^3 \equiv 343 \equiv 1$.

Ergo Residua sunt 5, 1, 9, 1.

g $9^{387420489} = 387420489$. Log. $9 = 387420489.0,95424251$; quod

quod Productum fere est 369693100. Ergo Potestas 9^9, 369693101 notis systematis decadici scribitur. Maximus igitur labor requiritur ad hunc numerum per hos numeros primos aliosve dividendum, cum tamen facillimo modo reperiantur Residua ex Divisione.

Hoc exemplum proposuit Meyer Hirsch (*Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra* edit. 3. N°. 55. p. 269.) cujus tamen calculo inest vitium.

Si modulus major est, hanc ingredi viam possumus.

Sit $83040^{113} \equiv t$ (*mod.* 257), *atque quaeratur* t. Secundum modulum 257 est $83040 = 257.323 + 29 \equiv 29$. Ergo $83040^{113} \equiv 29^{113} \equiv t$. Deinde $29^2 \equiv 70$. Ergo (§. 551. 9.) $29^4 \equiv 70.70 \equiv 17$; $29^8 \equiv 17.17 \equiv 32$; $29^{16} \equiv 32.32 \equiv -4$; $29^{32} \equiv 16$; $29^{64} \equiv 16.16 \equiv -1$. Deinde $29^{48} = (29^{16})^3 \equiv (-4)^3 \equiv -64$. Ergo $29^{113} = 29^{64} 29^{48}.29 \equiv (-1)(-64)29 = 1856 \equiv 57 = t$.

§. 573. *Theorema.*

Si modulus m est numerus primus, neque tamen duo, neque Divisor numeri a, $a^{\frac{m-1}{2}}$ est $\equiv 1$ (mod. m) si quis est numerus x talis, ut sit $x^2 \equiv a$ (mod. m), id est, ut ejus Quadratum congruens sit ipsi a secundum modulum m.

Demonstratio.

Si $x^2 \equiv a$ (mod. m), erit $(x^2)^{\frac{m-1}{2}} \equiv x^{m-1} \equiv a^{\frac{m-1}{2}}$ (§. 551. 9.),

(§. 551. 9.), atque $x^{m-1}-1 \equiv a^{\frac{m-1}{2}}-1$. Verum $\frac{x^{m-1}-1}{m}$ est integer. Nam m est numerus primus, atque non est Divisor numeri x, quoniam non est Divisor ipsius a (§. 523.), ergo $\frac{a^{\frac{m-1}{2}}-1}{m}$ est integer; id est $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$. (mod. m).

Sit $m=23$, $a=18$. Duo reperiuntur numeri, quorum Quadrata sunt congruentia cum 18, numerus 8, atque $23-8=15$, quoniam secundum modulum 23, $64 \equiv 18$ atque $225 \equiv 18$. Ergo $18^{11} \equiv 1$, atque $(18+23k)^{11} \equiv 1$.

§. 574. *Coroll.* 1.

Si $a^{\frac{m-1}{2}}$ non est $\equiv 1$, nullus est numerus, cujus Quadratum sit congruens cum numero a secundum modulum m.

Ergo cum 2^5-1, 6^5-1, 7^5-1, 8^5-1, 10^5-1, non sint divisibilis per 11 nulli reperiuntur numeri x, ita ut x^2-2, x^2-6, x^2-7, x^2-8, x^2-10, divisibiles sint per 11.

§. 575. *Coroll.* 3.

Demonstrari etiam potest, *si $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$, esse aliquem numerum x, ita ut sit $x^2 \equiv a$.* Ex quo sequitur si non est ejusmodi numerus x, non esse $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$. Sed hanc demonstrationem, quae ex principiis nondum satis expositis haurienda est, omittere hoc loco debemus.

§. 576. *Coroll.* 4.

$\frac{a^{m-1}-1}{m}=\frac{(a^{\frac{m-1}{2}}-1)(a^{\frac{m-1}{2}}+1)}{m}$ (§. 127. 1.). Cum autem prius Aequationis membrum sit integrum, etiam posterius est integrum. Ergo saltem alteruter Factor ejus, vel $a^{\frac{m-1}{2}}-1$, vel $a^{\frac{m-1}{2}}+1$ debet esse divisibilis per m (§. 517. 1.); id est, $a^{\frac{m-1}{2}}$ est $\equiv 1$ si non est $\equiv -1$, atque est $\equiv -1$ si non est $\equiv 1$. Quocirca, cum 2^5-1, 6^5-1, 7^5-1, 8^5-1, 10^5-1, non sint divisibiles per 11, 2^5+1, 6^5+1, 7^5+1, 8^5+1, 10^5+1 per 11 sunt divisibiles.

Fieri autem nequit, ut uterque Factor per m sit divisibilis. Ponamus enim hoc ita esse, id est, esse $a^{\frac{m-1}{2}}=mk+1=mk'-1$. Tum erit $m(k'-k)=2$; unde $k'-k=\frac{2}{m}$. Verum $k'-k$ est integer, ergo etiam $\frac{2}{m}$ est integer, quod esse nequit, cum ex hypothesi sit $m>2$.. Quare concludendum est:

$a^{\frac{m-1}{2}}$ *est aut* $\equiv 1$, *aut* $\equiv -1$ (mod. m) *ubi* m *est numerus primus major quam duo, qui non continetur in a.*

§. 577. *Coroll.* 5.

a est Residuum ex divisione Quadrati x^2 per modulum m. Quare Gauss appellat numeros a, qui pos-

possunt esse congruentes alicui Quadrato secundum certum quendam modulum, *Residua quadratica moduli m;* qui autem nulli Quadrato possunt esse congruentes secundum hunc modulum, hos appellat *Non-residua quadratica moduli m.* Ex quo sequitur:

1. si $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$ (mod. m), a est *Residuum quadraticum;* si $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1$, a est Non-residuum quadraticum.

2. Si a est Residuum quadraticum vel Non-residuum quadraticum, $a^{\frac{m-1}{2}}$ est $\equiv 1$, vel $\equiv -1$.

§. 578. *Coroll. 6.*

Si modulus m non est numerus major, tentando facile reperitur, quinam numeri sint Residua quadratica, quinam non sint. Nam si x deinceps ponitur $1, 2, 3 \ldots m-1, m, m+1 \ldots$ Residua ex Divisione x^2 per m formant periodos m terminorum. Quicunque numerus a in hac prima periodo Residuorum reperitur, is numerus, atque omnes numeri formae $a \pm mk$ sunt *Residua quadratica.* Quicunque autem numerus b in ipsa non reperitur, is numerus atque omnes numeri formae $b \pm mk$ sunt *Non-residua quadratica.*

Verum non opus est, calculus ulterius progrediatur, quam ad $x = \frac{m-1}{2}$, si m est impar, atque ad $x = \frac{1}{2}m$, si m est par. Nam si m est par, po-

na-

namus $m-x=x$, unde $m=2x$, atque $x=\frac{1}{2}m$. Ergo $(x+p)^2 \equiv (m-x+p)^2 \equiv (x-p)^2$, si modulus est $2x$, ubi p est quilibet numerus, ut si modulus est 8, erit $5^2 \equiv 3^2$; $6^2 \equiv 2^2$; $7^2 \equiv 1$.

Si m est impar, ponamus $m-x-1=x$, unde $m=2x+1$, atque $x=\frac{m-1}{2}$. Ergo $(x+p)^2 \equiv (m-x-1+p)^2 \equiv (x+1-p)^2$, si modulus est $2x+1$; ut si modulus est 9, erit $5^2 \equiv 4^2$; $6^2 \equiv 3^2$; $7^2 \equiv 2^2$; $8^2 \equiv 1$.

Haec illustrentur hoc schemate:

Sit $x=1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12;$

Ergo $x^2=1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 1$(

Sit $m=3$, unde $a=1$.
.. $m=5$ .. $a=1; 4$.
.. $m=7$ .. $a=1; 4; 2$.
.. $m=11$ .. $a=1; 4; 9; 5; 3$.
.. $m=13$ .. $a=1; 4; 9; 3; 12; 10$.
.. $m=17$ .. $a=1; 4; 9; 16; 8; 2; 15; 13$.
.. $m=19$ .. $a=1; 4; 9; 16; 6; 17; 11; 7; 5$.
.. $m=23$ .. $a=1; 4; 9; 16; 2; 13; 3; 18; 12; 8; 6$.
.. $m=29$ .. $a=1; 4; 9; 16; 25; 7; 20; 6; 23; 13; 5; 28;$

Ex hoc schemate cernuntur omnia Residua quadratica modulorum numerorum primorum 3, 5, 7 ... 29. Veluti secundum modulum 29 sunt:

Residua quadr.	1,	4,	9,	16,	25,	7 ...
ubi x est	1,	2,	3,	4,	5,	6 ...
vel	28,	27,	26,	25,	24,	23 ...

veluti $13^2 \equiv 24 \equiv 16^2$; $11^2 \equiv 5 \equiv 18^2$; $19^2 \equiv 10^2 \equiv 13$.

Majora autem Residua quadratica sunt formae:

$1+29k$; $4+29k$; $9+29k$ ...

Rur-

Rursus Non-residua quadratica moduli 29 sunt 2, 3, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 26, 27, atque $2 + 29k$, $3 + 29k$ ...

Quare si 29 est modulus, est:

$$\equiv 5^{14} \equiv 6^{14} \equiv 7^{14} \equiv 9^{14} \equiv 13^{14} \equiv 16^{14} \equiv 20^{14} \equiv 22^{14} \equiv 23^{14} \equiv 24^{14} \equiv 25^{14} \equiv 28^{14}$$
$$\equiv 3^{14} \equiv 8^{14} \equiv 10^{14} \equiv 11^{14} \equiv 12^{14} \equiv 14^{14} \equiv 15^{14} \equiv 17^{14} \equiv 18^{14} \equiv 19^{14} \equiv 21^{14} \equiv 26^{14}$$

§. 579. *Coroll.* 7.

Cum his Residuis quadraticis conferri possunt quae ex Divisione per numeros non primos oriuntur, veluti si $m = 8$, Residua sunt 0, 1, 4, atque majora sunt formae $8k$, $8k + 1$, $8k + 4$, quod ita disignemus: $a = 8k + (0, 1, 4)$; ut 1, 4, 8, 9, 12, 16, 17, 20 ...

Sed Non-residua sunt formae $8k + (2, 3, 5, 6, 7)$ ut 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13 ...

§. 580. *Coroll.* 8.

Quaeri etiam possunt Residua quadratica negativa, vel a in Aequatione $x^2 = my - a$. Quoniam autem $x^2 = my - a = m \cdot (y - 1) + m - a$, negativa Residua reperiuntur subtrahendis a modulo Residuis positivis. Velut, si $m = 7$, Residua quadratica negativa sunt $8k + (0, 3, 5, 6)$, ut 3, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14 ... Reliqui numeri sunt Non-residua quadratica negativa.

§. 581. *Animadv.*

In duabus tabulis Residuorum atque Non-residuorum quadraticorum, quas composuimus, de

denotatae sunt Radices x. Prior indicat x in Aequatione $x^2 = my + a$, ubi Residua sunt positiva; posterior indicat x in Aequatione $x^2 = my - a$, ubi Residua sunt negativa. Prima linea horizontalis denotat modulum m, ab unitate usque ad 60. In postrema linea verticali, atque prima linea obliqua reperiuntur Residua atque Non-residua a. Reliqui numeri sunt Radices x. Ubi est locus vacuus significatur Non-residuum, id est, nullum posse reperiri numerum integrum y, ita ut $my + a$, vel $my - a$ sit numerus quadratus. Velut si $m = 17$, atque $a = 13$ in priore tabula reperitur $x = 8$; id est, $8^2 = 64 = 17y + 13$, ubi $y = 3$. Ergo $a = 13$ est Residuum quadraticum positivum moduli 17. Sed si $m = 16$, $a = 13$, invenimus locum vacuum, qui indicat $a = 13$ esse Non-residuum quadraticum, sive non fieri posse, ut $16y + 13$ sit numerus quadratus.

§. 582. *Coroll.* 9.

Si $\frac{x^2 - a}{m}$ est integer vel non integer, etiam $\frac{x^2 - (km + a)}{m}$ est integer vel non integer. Idem valet de $\frac{x^2 + a}{m}$ atque $\frac{x^2 + (km + a)}{m}$. Quare sufficit in tabulis ea denotare Residua, quae minora sunt quam m, quoniam reliqua simplici additione reperiuntur. Itaque si $m = 47$, Residuum positivum a est 12. Ergo etiam a est 59, 106, 153 ... $47k + 12$.

§. 583.

§. 583. *Coroll.* 10.

Si $\frac{x^2 \pm a}{m}$ est integer, etiam $\frac{(km \pm x)^2 \pm a}{m}$ est integer. Ergo pro x etiam poni potest $km \pm x$. Quare in tabulis soli valores minimi radicis x sunt notati. Reliqui enim valores sunt formae $km \pm x$, ubi pro k quilibet sumi potest numerus integer. Veluti $11^2 \equiv 17$ (mod. 26), ergo $x = 11, 15, 37, 41, 63 \ldots$), atque $17 \equiv 11^2 \equiv 15^2 \equiv 37^2 \equiv 41^2 \equiv 63^2 \ldots$

§. 584. *Coroll.* 11.

Si $\frac{x^2 \pm a}{m}$ est integer, etiam $\frac{(m - x)^2 \pm a}{m}$ est integer. Sit $x = \frac{m + n}{2}$, unde $m - x = \frac{m - n}{2}$. Ergo si x major est quam $\frac{1}{2}m$, $m - x$ minor est. Ex quo sequitur: *Valor minimus positivus radicis x in Aequatione $x^2 = my \pm a$ non est major quam $\frac{1}{2}m$.* Si autem hunc minimum valorem sumimus, $my \pm a$ non est major quam $\frac{1}{4}m^2$, vel y non est major quam $\frac{1}{4}m \mp \frac{a}{m}$. Ergo in investigando valore radicis x, non necesse est ulterius progrediatur calculus, quam ad $y = \frac{1}{4}m \mp \frac{a}{m}$.

§. 585. *Coroll.* 12.

Si $x^2 \pm a$ divisibilis est per modulos $m, m', m'' \ldots$ qui sunt numeri primi vel Potestates numerorum primorum, etiam divisibilis est per Producta ipso-

rum

rum $m\,m'\,m''\ldots$. Itaque, si a est Residuum quadraticum numerorum 2, 3, 5, 7, etiam est Residuum quadraticum numeri 210. Quoniam autem omnis numerus est Residuum quadraticum numeri 2, numeri p et $2p$ eadem habent Residua quadratica, ut 3 et 6, 5 et 10 caet. Quod tamen non valet de numeris p et $p \cdot 2^n$, id est, de Producto ex aliquo numero primo atque aliqua potestate numeri 2.

Rursus, si $x^2 \pm a$ divisibilis est per Productum ex numeris primis eorumque Potestatibus, etiam divisibilis est per singulos hos numeros primos, eorumque Potestates. Quare si non divisibilis est per p, nullo Producto, in quo in est Factor p, divisibilis est.

Haec inserviunt investigationi Residuorum, si moduli non sunt numeri primi.

§. 586. *Coroll.* 13.

Si $a = m$, Aequatio fit $x^2 = (y \pm 1)\,m$. Ergo $a = m$ semper est Residuum quadraticum, qualiscunque sit modulus m, atque tum minimus valor Radicis x est 0, ubi $y = \pm 1$. Universe haec radix est formae km, ubi k est quilibet uumerus integer, vel etiam 0. Sed si m divisibilis est per aliquem numerum quadratum s^{2n}, atque igitur formae $s^{2n}t$, x est etiam formae $\frac{m}{s^n}$. Nam $\frac{\left(\frac{m}{s^n}\right)^2 \pm a}{m} = \frac{m}{s^{2n}} \pm 1 = t - 1$ est integer. Velut:

Si

Si $a = m$ est 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 64 ...

x est 2, 4, 3, 6, 4, 6, 10, 12, 8 ...

$y \pm 1$ est 1, 2, 1, 3, 1, 2, 5, 6, 1 ...

Animadv. Tabula tertia et quarta inserviunt reperiundae radici minimae y Congruentiae $ny \equiv \pm 1$ (mod. μ), vel Aequationis $ny = \mu z \pm 1$, ubi n, y, μ, z, sunt numeri integri. In quibus observandum est.

I. Sit $ny = \mu z \pm 1$, atque $\mu < n$, ergo $ny' = (pn + \mu) z \pm 1$, ubi $y' = pz + y$, atque p est integer.

Etenim $ny' = n(pz + y) = pnz + \mu z \pm 1$.

Ergo si y est definitum usque ad $\mu = n$, pro reliquis modulis, qui majores sunt quam n, facile definitur.

Sit v. c. $7y = 2z - 1$, ubi $y = 1$, $z = 4$; ergo $7y' = (7p+2) z - 1$, ubi $y' = pz + y = 4p + 1$, id est $7y' = 9z - 1$, ubi $y' = z + y = 5$,

$7y' = 16z - 1$, nbi $y' = 2z + y = 9$, seqq.

II. Sit $ny = \mu z \pm 1$, atque $n < \mu$.

Ergo $(p\mu + n) y = \mu z' \pm 1$, ubi $z' = py + z$.

Etenim $(p\mu + n) y = p\mu y + \mu z \pm 1$.

Ergo, si y est definitum usque ad $n = \mu$, iidem redeunt valores. Quare y tantum computatur usque ad $n = \mu$.

Hisce duabus regulis conjunctis facillime componuntur istiusmodi tabulae, dummodo simul notentur valores ipsius z. Verum ne tabulae ipsae justo longiores essent, hi valores z typis non expressi sunt.

§. 587. *Problema.*

Solvere Congruentiam $x^2 \equiv \pm a$ (mod. m), *vel reperire* x *et* y *in Aequatione* $x^2 = my \pm a$, *ubi* m *est major quam* 60 *atque numerus primus.*

Solutio.

Ex tabula Residuorum quadraticorum eligatur modulus aliquis μ, qui multo plura habeat Non-residua, quam Residua quadratica. Sint ejus Residua quadratica positiva a', a'', a''' ..., ergo integri sunt $\frac{x^2 - a'}{\mu}$, $\frac{x^2 - a''}{\mu}$, $\frac{x^2 - a'''}{\mu}$ ...

Sit $\frac{x^2}{\mu} = \frac{my+a}{\mu} = sy + s' + \frac{ny - b}{\mu}$, ubi s et s' sunt integri, atque n et b minores quam μ, ergo $\frac{x^2 - a'}{\mu} = sy + s' + \frac{ny - (b+a')}{\mu}$.

Ut reperiatur y, ita ut $\frac{ny - (b+a')}{\mu}$ sit integer, quaeritur in tabula quarta radix y Congruentiae $ny \equiv 1$ (mod. μ), quae sit $= t$; ergo radix Congruentiae $ny \equiv (b + a')$ (mod. μ) est $t.(b+a')$ (§. 554.). Ergo pro Residuis a'', a''', a^{IV} ... reperitur $t.(b+a'')$, $t.(b+a''')$, $t.(b+a^{IV})$ ... Quare, ut $my + a$ sit quadratus numerus, requiritur ut y sit congruens alicui ex his valoribus $t.(b+a')$, $t.(b+a'')$, $t.(b+a''')$ caet. Investigetur igitur, quisnam ex his valoribus reddat $my + a$ quadratum, in qua tamen investigatione non opus est lon-

longius progredi quam ad y, non majorem quam $\frac{m}{4}+\frac{a}{m}$ (§. 584.). Si utimur Residuis quadraticis negativis, signum residuorum $a, a', a'', a''' \ldots$ mutandum est. Exemplum quod sequitur, hanc solutionem illustrabit.

Proposita sit Aequatio $x^2 = 97y+22$. Sumatur modulus $\mu = 24$. Prima tabula indicat Residua quadratica moduli μ esse $1, 4, 9, 12, 16, 24$.

Verum $\frac{x^2}{24} = \frac{97y+22}{24} = 4y+1+\frac{y-2}{24}$, ergo $y = 24k+2$. Ergo Residua $1, 4, 9, 12, 16, 24$ dant $y = 24k+(2, 3, 6, 11, 14, 18 \ldots)$. Quoniam autem non necesse est calculus ulterius progrediatur, quam ad $y = \frac{97}{4}+\frac{22}{97}$, vel ad $y = 24$, y est $2, 3, 6, 11, 14, 18$; ex quibus numeris $y = 11$ Aequationi satisfacit. Est enim $x^2 = 97y+22 = 97 \cdot 11+22 = 33^2$, id est $x = 33$.

Pauciores sunt numeri investigandi, si eligitur modulus 48, cujus Residua sunt $1, 4, 9, 16, 25, 33, 36$, ex quibus fit $y = 48k+(3, 11, 14, 26, 27, 30, 35, 42)$. Ergo $y = 3, 11, 14$, ubi $y = 11$ Aequationi satisfacit.

At vero, si hi valores ipsius y ita multi sunt, ut calculus, quo investigatur, quisnam valor Aequationi conveniat, longior foret, eligatur alius numerus, sed primus ad μ, atque eadem ratione, qua antea, reperiantur valores y, non ex Residuis, sed ex Non-residuis quadraticis. Qui ita re-

reperiuntur, non sunt admissibiles, itaque ex numeris repertis tollendi sunt. Eodem modo tertius, quartus, etc. modulus, qui primus est ad modulos jam usurpatos eligi potest, donec tandem pauci restent numeri.

Id illustrabitur sequenti Problemate.

Proposita sit Aequatio $x^2 = 641y - 229$.

Sumatur modulus 48, cujus Residua quadratica negativa $\left(\frac{x^2+a}{48}\right)$ secundum Tabulam secundam sunt 12, 15, 23, 32, 39, 44, 47, 48.

Est autem $\frac{x^2}{48} = \frac{641y-229}{48} = 13y - 4 + \frac{17y+37}{48}$.

Ergo $\frac{x^2+a}{48} = 13y - 4 + \frac{17y+a-37}{48}$; ergo x^2+12, x^2+15, x^2+23 ... suppeditant $17y-25$, $17y-22$, $17y-14$, $17y-5$, $17y-46$, $17y-41$, $17y-38$, $17y-37$. Sed secundum quartam tabulam, si $17y \equiv 1$ (mod. 48), y est 17. Ergo si $17y \equiv a$, y est $17a$. Ergo valores admissibiles ipsius y sunt congruentes secundum modulum 48 his Productis, $17 \cdot 25$; $17 \cdot 22$; $17 \cdot 14$; $17 \cdot 5$; $17 \cdot 46$; $17 \cdot 41$; $17 \cdot 38$; $17 \cdot 37$; id est $y = 48k + (37, 46, 38, 41, 5, 22, 25, 14)$. Ergo omissis valoribus, qui majores sunt quam $\frac{641}{4} - \frac{229}{641}$ vel majores quam 160, relinquuntur 26 valores, qui sunt $y = 5, 14, 22, 25, 37, 38, 41, 46, 53, 62, 70, 73, 85, 86, 89, 94, 101, 110, 118, 121, 133, 134, 137, 142, 149, 158$.

Iidem, ut per se patet, prodeunt valores, si secundum

dum modulum 48, sumuntur ex Tabula prima Residua quadratica positiva $\left(\frac{x^2-a}{48}\right)$, quae sunt 1, 4, 9, 16, 25, 33, 36, 48. Ergo $\frac{x^2-a}{48}$ $= 13y - 4 + \frac{17y - a - 37}{48}$. Residua suppeditant $17y-38$, $17y-41$, $17y-46$, $17y-5$, $17y-14$, $17y-22$, $17y-25$, $17y-37$. Quae sunt eadem, atque superiora illa.

Possimus nunc inquirere, quisnam ex istis 26 valoribus Aequationi propositae satisfaciat, sed longior foret hic calculus. Quare per Non-residua diminuatur haec valorum copia.

Sumatur modulus 5, cujus Non-residua positiva sunt 2 et 3, secundum Tabulam primam. Quare $\frac{x^2-a}{5} = 128y - 45 + \frac{y-a-4}{5}$, ergo $y = 5k+4+a$. Ergo posito $a = 2$ et 3, y est $= 5k + (1, 2)$, vel $y = 1, 2, 6, 7, 11, 12 \ldots$ et universe omnes numeri, quorum postrema nota est 1, 2, 6, 7, sunt Non-residua. Ergo si hi excluduntur restant 16 valores, qui sunt $y = 5, 14, 25, 38, 53, 70, 73, 85, 89, 94, 110, 118, 133, 134, 149, 158$.

Si sumitur modulus 7, cujus Non-residua positiva sunt 3, 5, 6, erit $\frac{x^2-a}{7} = 91y - 32 + \frac{4y-(a+5)}{7}$, sed si $4y \equiv 1$ (mod. 7), y est 2. Ergo $y \doteq 2.8$, 2.10, 2.11, vel $y = 7k + (1, 2, 6)$. Quare ex 16 valoribus repertis tollendi sunt, quorum Residua ex Divisione per 7 sunt 1, 2, 6, qui sunt

85,

85, 118, 134, 149. Ergo restant 12, qui sunt 5, 14, 25, 38, 53, 70, 73, 89, 94, 110, 133, 158.

Si sumitur modulus 11, cujus non Residua positiva sunt 2, 6, 7, 8, 10, erit $\frac{x^2-a}{11} = 58y - 20 + \frac{3y-(a+9)}{11}$. Est autem in Congruentia $3y \equiv 1$ (mod. 11), $y = 4$, unde $y = 11.4; 15.4; 16.4; 17.4; 19.4$, vel $y = 11k + (0, 2, 5, 9, 10)$. Quare ex 12 valoribus repertis tollendi sunt, quorum Residua ex Divisione per 11 sunt 0, 2, 5, 9, 10. Hi sunt 5, 38, 53, 110, ita ut restent 14, 25, 70, 73, 89, 94, 133, 158, ex quibus $y = 94$ Aequationi satisfacit, unde $x = 245$.

Animadv. Si utimur modulo 60, erit $\frac{x^2-a}{60} = 60y - 3 + \frac{41y-a-49}{60}$. Sed $41y \equiv 1$ (mod. 60) dat secundum Tabulam quartam $y = 41$. Quare cum Residua moduli 60 sint:

1, 4, 9, 16, 21, 24, 25, 36, 40, 45, 49, 60, erit

$y = 60k + (5, 10, 13, 14, 25, 29, 34, 38, 49, 50, 53, 58)$. Si ut antea ex his valoribus tolluntur, quorum Residua ex Divisione per 7 sunt 1, 2, 6, erit

$y =$ 5, 10, 14, 25, 29, 38, 49, 53, 70, 73, 74, 89, 94, 98, 109, 110, 130, 133, 145, 154, 158. Si ex his tolluntur quorum Residua ex Divisione per 11 sunt 0, 2, 5, 9, 10 relinquitur.

$y =$ 14, 25, 29, 70, 73, 74, 89, 94, 133, 158.

§. 588.

§. 588. *Coroll.*

De hisce Residuis Quadraticis, haec sunt notanda:

1. Si a et a' simul sunt Residua quadratica vel Non-residua quadratica ejusdem moduli m, Productum aa' est Residuum quadraticum ejusdem moduli m.

Nam si a et a' simul sunt Residua quadratica moduli m, erit $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$, atque $a'^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$ (§. 577.), ergo $(aa')^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$, ergo aa' est Residuum Quadraticum moduli m.

Si a et a' simul sunt Non-residua quadratica moduli m, erit $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1$, atque $a'^{\left(\frac{m-1}{2}\right)} \equiv -1$ (§. 577.), ergo $(aa')^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$, ergo aa' est Residuum Quadraticum moduli m.

Velut 4 et 5 sunt Residua quadratica moduli 29, ergo etiam 20 est Residuum quadraticum hujus moduli; sed 2 et 3 sunt Non-residua, ergo 6 est etiam Residuum quadraticum moduli 29.

2. Facile ex his perspicitur si $a, a', a'', a''' \ldots$ sunt Residua quadratica moduli m, etiam ipsorum Productum esse Residuum quadraticum hujus moduli. Si autem vel omnia vel nonnulla sunt Non-residua quadratica, Productum est Residuum quadraticum, si numerus Non-residuorum par est, sed Non-residuum quadraticum, si numerus est impar.

3. Ex hoc etiam sequitur:

a^{2m} est Residuum Quadraticum cujuslibet moduli. a^{2m+1} est Residuum Quadraticum si a est Residuum quadraticum, sed Non-residuum quadraticum, si a est Non-residuum.

Quare in tabulis numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. sunt omnes Residua quadratica cujuslibet moduli.

4. Si modulus m est numerus primus formae $4n+1$ vel $\frac{m-1}{2} = 2n$ ut 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, atque a est Residuum quadraticum ejus, etiam $-a$ est Residuum quadraticum.

Nam quoniam $x^2 \equiv a$ (mod. m), erit $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$, vel $a^{2n} \equiv 1$ §. 573. Sed $a^{2n} \equiv (-a)^{2n}$, ergo etiam $-a$ est Residuum quadraticum (§. 575). At vero si a est Non-residuum quadraticum, etiam $-a$ tale est. Tum enim est $a^{2n} \equiv (-a)^{2n} \equiv -1$.

Sed si modulus m est formae $4n+3$, vel $\frac{m-1}{2} = 2n+1$, ut 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59... atque a est Residuum quadraticum ejus, $-a$ est Non-residuum quadraticum. Tum enim $a^{2n+1} \equiv 1$, ergo $(-a)^{2n+1} \equiv -1$, ergo $-a$ est Non-residuum quadraticum (§. 577.). Contra, si a est Non-residuum quadraticum, $-a$ est Residuum quadraticum, quoniam $a^{2n+1} \equiv -1$, ergo $(-a)^{2n+1} \equiv 1$.

5. Sit $a = 1$, ergo $a^{\frac{m-1}{2}} \equiv 1$ qualiscunque sit m; quare 1 est semper Residuum quadraticum, atque $x^2 - 1$ per omnem modulum est divisibilis. Sit $a \equiv -1$, ergo $(-1)^{2n} \equiv 1$, sed $(-1)^{2n+1} \equiv -1$.

Er-

Ergo -1 est Residuum quadraticum, si modulus est formae $4n+1$, sed Non-residuum, si modulus est formae $4n+3$, id est *quilibet numerus primis formae* $4n+1$ *est Divisor numeri* x^2+1, *non vero, si est formae* $4n+3$. Itaque -1 est Residuum quadraticum modulorum 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97 ... Sed Non-residuum quadraticum modulorum 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 67, 71, 79, 83 ...

Haec sufficiant in hisce elementis de numerorum Divisoribus, qui locus summorum Mathematicorum, inprimis Euleri, Lagrangii, Legendrii et Gaussii cura et diligentia, maximam acquisifit ubertatem.

CORRIGENDA.

Pag.	*linea*		*lege*
16	11	membri alicujus aequationis ad alterum	membri ad alterum
22	23	$c - P$	$c = P$
—	26	$9 - a$	$-9a$
32	24	numeri	numerorum
45	13	§. 38.	§. 42.
68	7	Lagrange	Legendre
70	19	a, b, c	abc
81	2	$512^{\frac{1}{7}}$	$512^{\frac{1}{9}}$
85	4	nnmerorum	numerorum
88	19	$(c+d$	$(c+d)$

Pag.	lin**e**a		lege
90 . .	12	$a^{2}m$	a^{2m}
— . .	26	*Cor.* 5.	*Cor.* 3.
94 . .	19	deinde per 8	deinde 6*a* per 8
99 . .	7	$x^5\,(a+b+c+d+e)x^4$	$x^5+(a+b+c+d+e)\,x^4$
103 . .	13	$(a+b)\ \ x+ab$	$(a+b)\,x+ab$
104 . .	14	Multiplicati	multiplicati
105 . .	26	x_3	x^3
107 . .	18	$(x+2$	$(x+2)$
110 . .	7	$(x+a)_m$	$(x+a)^m$
— . .	17	x_m	x^m
114	*ultima*	$—(x+a)_m$	$(x+a)^m$
115 . .	—	$x3^m$	x^{3m}
116 . .	6	$2x^m a^m+a_{2m}$	$2x^m a^m+a^{2m}$
118 . .	2	q	q'
— . .	5	p^{vi}, q^{vi}	p^{iv}, q^{iv}
123 . .	16	Potestes	Potestates
125 . .	4	$a=10$	$a=11$
142 . .	17	$\frac{n}{m}\cdot 1$	$\frac{n}{m}:1$
155 . .	5	Divisor b	Divisor, sed b
— . .	11	$\frac{a+b+c+d}{pppp}$	$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\frac{c}{p}+\frac{d}{p}$
156 . .	7	$\frac{ax^2}{3y^2}$	$:\frac{ax^2}{3y^2}$
215 . .	12	postrema formula	secunda formula
216 . .	4	prodit	prodit (Conferatur §.162. p. 176.)
230 . .	8	$\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h}$	$\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h}$ (Conf. (§. 196. III.)
237 . .	13	ex aeq. 3	ex aeq. 3 et 4.
238 . .	2	§. 205. 3.	§. 204. 3.
— . .	4	§. 205. 3.	§. 204. 3.
239 . .	4	§. 204.	§. 204. 7. 9. 10.
241 . .	12	$(1-q^2)$	$(1-q)^2$
244 . .	19	terminos	terminus (conf. §. 208.)
244 . .	21	$f-1$ terminum	consequentem terminum
245 . .	14	Summa	Summa, si signorum non habetur ratio

Pag.	linea		lege
246	12	$\frac{a}{1-q}$	$\frac{a}{1-q}$ ubi q est unitate minor.
247	5	$\frac{1}{3}+\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$.
248	24	terminos aequationis	terminos utriusque aequationis §. 217.
252	24	Si $=d$	Si $a=d$
260	20	Log. d	Log. a
264	18	minor quam $\frac{1}{10}$	addatur: praeter Log. $10^n = n$;
265	5	sumtum	sumtus
266	14	q	9
271	20	positiva	addatur: (Conf. §. 13.)
272	18	mq^{m-}	mq^{m-1}
273	6	$1+b^2>2b$	addatur: si b non est $=1$.
274	15	$N\phi\,)2^m-n)$	$N\phi(2^m-n)$
275	6	Exponens numeri $m+n$	Exponens $m+n$
281	10	vel $b=d$	hoc deleatur
282	13	(§. 139. X.)	addatur: si nulla Differentia est negativa
393	4	His positis, sequitur	His positis, dividendo $\frac{1}{(1-x)^{n-1}}$ per $1-x$ vel multiplicando per $1+x+x^2+x^3\ldots$, (§. 333.) sequitur.
420	8	de primis Fractionum	de primis Functionum
436	15	est sunt Summa	est Summa
460	11	*Zusdtze zu den*	*Zusätze zu dem*
——		Newtom	Newton
484	*penultima*	$b+dz$	$c+dz$.

Pag.	linea		lege
246	12	$\frac{a}{1-q}$	$\frac{a}{1-q}$ ubi q est unitate minor.
247	5	$\frac{1}{3}+\frac{1}{27}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$.
248	24	terminos aequationis	terminos utriusque aequationis §. 217.
252	24	Si $= d$	Si $a = d$
260	20	Log. d	Log. a
264	18	minor quam $\frac{1}{10}$	addatur: praeter Log. $10^n = n$;
265	5	sumtum	sumtus
266	14	q	9
271	20	positiva	addatur: (Conf. §. 13.)
272	18	mq^{m-}	mq^{m-1}
273	6	$1+b^2 > 2b$	addatur: si b non est $= 1$.
274	15	$N\phi)2^m - n)$	$N\phi(2^m - n)$
275	6	Exponens numeri $m+n$	Exponens $m+n$
281	10	vel $b = d$	hoc deleatur
282	13	(§. 139. X.)	addatur: si nulla Differentia est negativa
393	4	His positis, sequitur	His positis, dividendo $\frac{1}{(1-x)^{n-1}}$ per $1-x$ vel multiplicando per $1+x+x^2+x^3 \ldots$, (§. 333.) sequitur.
420	8	de primis Fractionum	de primis Functionum
436	15	est sunt Summa	est Summa
460	11	*Zusdtze zu den*	*Zusätze zu dem*
—		Newtom	Newton
484	*penultima*	$b+dz$	$c+dz$.

solutio

18	19	2	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	a
1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				10												2
														11		3
2	2		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4
	9									15			11	8		5
	5				16			18				24	8			6
5	8							22	15			8	23	19		7
				20							8					8
3	3		3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	9
8								13	8							10
	7			16	19			8		11						11
							8							22		12
7						8	13	15	11				19			13
					8					17						14
				8		24		11		20				29		15
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	16
	6						11	21						28		17
0				19		18										18
9	0				13	11			17			19		14		19
	20	0								25			22	16		20
		21			11	15								27	9	21
				13					20				14	9		22
				11									9			23
					18			17				9	16		12	24
			5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	25
					24					9				12		26
									9					26		27
								9	26		14	16	12	21		28
				15	23		9						29	18		29
				18		9						12	28			30
					9				25	14						31
				9							12					32
			9			21							27			33
					22	17			14	12			18			34
													21	25		35
			48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	

tali su
e in p
n reliq

[illegible]

ve soluti

36

17	18	19	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	a
4				7			23					17			1
7	4	6			7			22			18		23		2
		4	12			7					15				3
8				14		10	7					24			4
	7		17					7				13			5
			22	12			10		7			20	17		6
							24			7		15			7
3	8	7			14			10			7		13		8
5	3			21	12		16					7			9
		3	23				19		10				7		10
	5			17			25	23	22				15	7	11
		8	24			12				10	27				12
2		5	6				26					25	20		13
	2	9		6				16			10		24		14
6		2			6		12				21			15	15
1				22		6	14					10			16
0	1		9		17		6								17
18	0	1			21			6			18		10		18
	19	0	18	9					6						19
		20	15					14		6		26		10	20
				23	9				12		6				21
												6			22
						9		25				21	6		23
			5	24			20		14	12		18	25	6	24
				5			9					27			25
			11	18	5			26							26
			13			5		9			12				27
							5			14		28			28
				11			17	5	9		16	29			29
					15				5			12	18		30
			19	13						5			21		31
					11						5		26		32
			4		18						9	5	12		33
			8	4								16	5		34
					4	11		17	25			9		5	35
			49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	

izontali
atque in
; in re

— 1 (mod

36 | 37 | 38
1
37 1
38
39

n	22	23	24	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	21	22	23	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
2		11		25		26		27		28		29	
3	7	15			17	35		18	37		19	39	
4		17		38		13		41		14		44	
5	13	9	19	10	31	21	43		11	34	23	47	
6		19				44		9				49	
7	3	13	17	29	37	15	23	47		8	33	42	17
8		20		19		33		48		7		22	
9	17	5			23	47		6	31		45	13	
10		16		5		37				17		53	
11		2	13	37	33	24	49		5	31	21	16	49
12		21				22		32				54	
13	5	7	11	47		4	29	38	43	35	49	9	23
14		18		40		34		51		4		21	
15	19	3			45	7			41		27	55	
16		10		35		43		24		32		11	
17	9	4	7		3	28	19	42	23	10	17	52	7
18		14				50		3				36	
19	15	6	5	8	41	39	17	26	53		3	31	41
20		8		28		45				37		56	
21	1	12			47	5		34			11	14	
22		1		44		12				44		8	
23	23		1	31	9	23	7	43	17	52	5	41	13
24		24				11		16				27	
25			25	2	27	36	41		47	41	51	33	
26				49		2		19		46		34	
27					25	51		2	29		15	24	
28				20		17		53		2		40	
29				7	43	42	13	36	27	55		2	31
30						30						57	
31				23	5	41	47	39	9	11	43	19	29
32				43		48		12		16		35	
33					11	8			39		7	25	
34						14		21		5		26	
35				16	49	3	37			13	53	32	
				51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

rizontali
atque in
es n; in

36 | 36 / 37

46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	n
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	24		25		26		27		28		29		30		2
31	16		33	17		35	18		37	19		39	20		3
	12		37		13		40		14		43		15		4
37	19	29	10		41	21	32	11		45	23	35	12		5
	8		41				9		46				10		6
33	27	7		43	22	15	38	31	8		49	25	17	43	7
	6		43		32		20		7		50		37		8
41	21		11	39		29	6		49	25		13	46		9
	33		5		46		16				40		6		10
21	30	35	9	41	14	19	29	5		51	26	37	43	71	11
	4		45				31		23				5		12
39	29	37	34	27	4		49	25	17	13	22	9	50	37	13
	37				11		19		4		53		38		14
43	22		36			7	46			15		31	4		15
	3		46		16		10		31		25		48		16
19	36	17	26	3		49	25	35	13	33	47	41	7	53	17
	34		30				3		52				23		18
17	5	43	31	29	43	11	14	37	29	3		55	28	19	19
	40		27		23		8				20		3		20
11	9			31		5	48		21			47	45		21
	15		29		7		41				13		51		22
	45	23	32	37	20	43	30	47	12	39	5	53	18	47	23
	2		47				42		39				32		24
35	32	25	2		49	25	17	13		9	16	7	26		25
	38		17		2		51		36		11		25		26
29	7		20	13		27	2		53	27		43	35		27
	42				31		36		2		55		19		28
27	13	5	22	19	44	9	11	41	19	29	2		57	29	29
	11		18				23						2		30
3	44	31	19	21	28	47	12	7	16	47	46	15	40	31	31
	25		23		8		5		43		41		24		32
7	10		3	47		41	45			17		51	34		33
	18		13				39		34		52		33		34
25	43	11			35	3	50	17			44	5	27		35
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	

